

1. LEYES DE AZAR. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un experimento se llama **aleatorio** cuando no se puede predecir el resultado. Hay una serie de características que caracterizan este tipo de experimentos:

- En las mismas condiciones iniciales, pueden dar lugar a diferentes resultados finales.
- Todos los resultados posibles se conocen por adelantado.
- En general, el experimento puede repetirse en las mismas condiciones indefinidamente.

Si realizamos un experimento, pero podemos predecir el resultado, se llama **experimento determinista**.

Ejemplos:

- Experimentos deterministas: Averiguar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conocidos los catetos.
- Experimento aleatorio: Resultado de lanzar una moneda o un dado, averiguar el resultado de un partido de baloncesto, antes de que se juegue.

1.1- Espacio muestral

Dado un experimento aleatorio, se llama **espacio muestral** y se designa por E , al conjunto de todos los resultados posibles distintos de dicho experimento aleatorio. A los elementos que forman el espacio muestral E , se les conoce como **sucesos elementales**.

Ejemplos:

- Lanzar una moneda al aire $E = \{+, c\}$, siendo $+$ el suceso elemental "sacar cruz" y c el suceso elemental "sacar cara"
- Lanzar un dado al aire $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Averiguar el resultado de un partido de baloncesto $E = \{\text{gana, pierde, empata}\}$

1.2- Sucesos. Tipos de sucesos

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Tenemos dos tipos de sucesos:

- **Elementales**: Cada uno de los posibles resultados del espacio muestral.
- **Compuestos**: Formado por dos o más sucesos elementales.

Ejemplo: Si tiramos un dado al aire el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Los sucesos elementales serían: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ y $\{6\}$
- Los sucesos compuestos podrían ser: Obtener un número par $\{2, 4, 6\}$
 Obtener un número impar $\{1, 3, 5\}$
 Obtener un número mayor que 3 $\{4, 5, 6\}$

Tenemos dos **sucesos impropios** de nuestro espacio muestral:

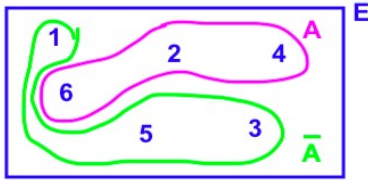
- Suceso **imposible** (\emptyset) \rightarrow No posee ningún suceso elemental.
- Suceso **seguro** (E) \rightarrow Se cumple siempre.

Si A es un suceso del espacio muestral (E); al **suceso contrario** de A lo denotamos por \bar{A} (es el que se cumple cuando no se cumple A).

\bar{A} Está formado por todos los sucesos elementales de E que no están en A .

Ejemplo: Sea A el suceso “sacar número par”, el suceso contrario \bar{A} será “sacar número impar”.

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ y } \bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

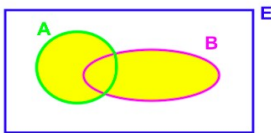


Para representar sucesos son de gran utilidad os **diagramas de Venn**.

1.3- Operaciones con sucesos

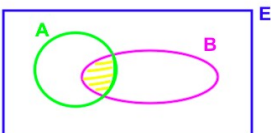
Los sucesos pueden operarse obteniendo otros sucesos nuevos.

- **Unión:** Unión de dos sucesos A y B , $A \cup B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A o B , o ambos.



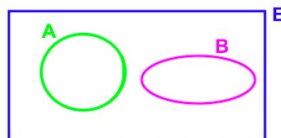
$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

- **Intersección:** Intersección de dos sucesos A y B , $A \cap B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A y B a la vez. El suceso $A \cap B$ está formado por los sucesos de A y de B .

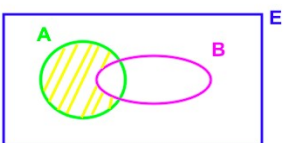


$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Cuando $A \cap B = \emptyset$, se dice que el suceso A y B son **incompatibles**.



- **Diferencia:** Diferencia de A y B , $A - B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A pero no B . Está formado por los sucesos de A que no están en B .



$$A - B = \{x \in E / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

$$A - B = A - (A \cap B) = \bar{B} \cap A$$

Ejemplo: Consideramos el experimento aleatorio “lanzar un dado”, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los sucesos $A =$ “sacar un número par”, $B =$ “sacar un número mayor que 3” y $C =$ “sacar un número impar”.

$$A=\{2, 4, 6\} \quad B=\{4, 5, 6\} \quad C=\{1, 3, 5\}$$

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \rightarrow$ sacar un número par o un número mayor que 3.

$A \cap B = \{4, 6\} \rightarrow$ sacar un número par y un número mayor que 3.

$A - B = \{2\} \rightarrow$ sacar un número par que no sea mayor que 3

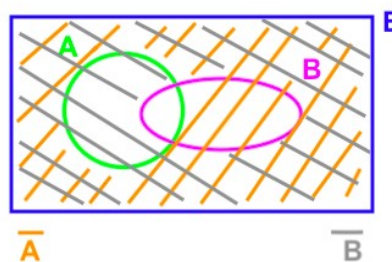
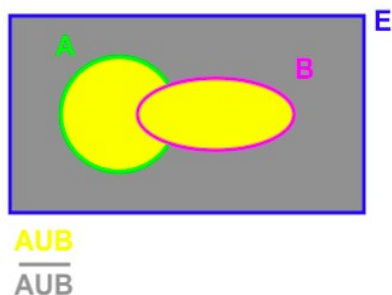
$A \cup C = E \rightarrow$ sacar un número par o un número impar, se verifica siempre, por eso es el suceso seguro.

$A \cap C = \emptyset \rightarrow$ sacar un número par y uno impar, no es posible, no se verifica nunca, es el suceso imposible.

1.4- Propiedades

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio y sean A, B y C sucesos de dicho espacio muestral. Se verifican las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:** $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$
- **Asociativa:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Complementario:** $A \cup \bar{A} = E$
 $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- **Leyes de Morgan:** $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$



La superficie gris del diagrama de la izquierda se corresponde con $\overline{A \cup B}$

La superficie rayada en gris y naranja del diagrama de la derecha se corresponde con $\bar{A} \cap \bar{B}$

Ambas representan la misma superficie rayada. Entonces $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2.- CONCEPTO DE PROBABILIDAD

La **probabilidad** de un suceso, indica el grado de probabilidad de que ocurra un suceso. A cada probabilidad se le asigna un número comprendido entre 0 y 1, y se escribe $P(A)$ (probabilidad del suceso A). Si $P(A)$ está próximo a 0 el suceso es poco probable y será más probable cuánto más se acerque a 1.

Cuando se repite un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa con la que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo, a medida que aumentan el número de pruebas realizadas (este valor es una aproximación de la probabilidad de dicho suceso).

Este resultado es conocido como **ley de los grandes números**.

2.1- Regla de Laplace

Dos sucesos se llaman **equiprobables** cuando tienen la misma probabilidad de ocurrir al realizar un experimento aleatorio.

Si en un espacio muestral, todos los sucesos son equiprobables, entonces la probabilidad de cualquier suceso A se puede calcular mediante la **ley de Laplace**, según la cual, basta contar el número de sucesos elementales que componen A y el número de sucesos elementales que componen E:

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables de } A}{N^{\circ} \text{ de casos totales}}$$

Ejemplo: Consideramos el experimento aleatorio "lanzar un dado", $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los sucesos $A = \text{"sacar un número par"} = \{2, 4, 6\}$, $B = \text{"sacar el número 2"} = \{2\}$. Vamos a calcular $P(A)$ y $P(B)$

$$P(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favorables de } A}{N^{\circ} \text{ de casos totales}} = \frac{N^{\circ} \text{ de elementos de } A}{N^{\circ} \text{ de elementos de } E} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{N^{\circ} \text{ de elementos de } B}{N^{\circ} \text{ de elementos de } E} = \frac{1}{6}$$

Ejemplo: Tenemos una bolsa con cuatro bolas rojas, dos blancas y 3 verdes, todas del mismo peso y tamaño. Consideramos los sucesos $R = \text{"sacar bola roja"}$, $B = \text{"sacar bola blanca"}$ y $V = \text{"sacar bola verde"}$

$$P(R) = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{2}{9}$$

$$P(V) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2.2- Definición axiomática de probabilidad

Se puede definir la **probabilidad** como una función P que asigna a cada suceso de un experimento aleatorio un número real.

A → P(A)
suceso n.º real

Debe verificar los siguientes **axiomas**:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(E) = 1$

3. Si A y B son dos sucesos incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2.3- Propiedades

1. Probabilidad del suceso contrario

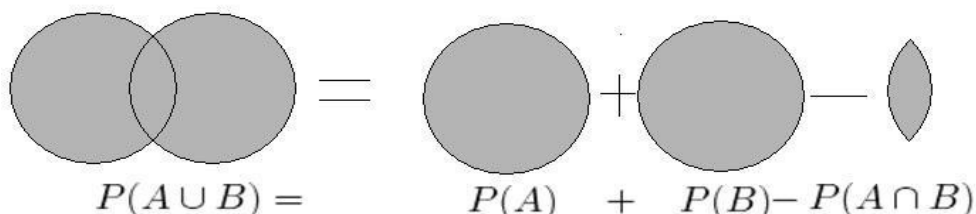
Sea A un suceso, \bar{A} es el suceso contrario. Si conocemos $P(A)$ entonces también conocemos $P(\bar{A})$: $P(\bar{A})=1-P(A)$

2. Probabilidad del suceso imposible

Vamos ahora a calcular la probabilidad del suceso imposible $\phi \rightarrow P(\phi)=0$

3. Probabilidad de la unión de sucesos

Sean A y B dos sucesos tenemos: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$



Si los sucesos son incompatibles ya sabemos que $A \cap B = \phi$ y $P(\phi)=0$, por ello $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=P(A)+P(B)$

4. Probabilidad de la diferencia

Sean A y B dos sucesos tenemos: $P(A - B)=P(A \cap \bar{B})=P(A)-P(A \cap B)$

Ejemplo: Consideramos el suceso aleatorio "lanzar un dado" y los sucesos A ="sacar un número >3 " y B ="sacar un número par"

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}$$

2.4- Sucesos independientes

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio y A, B dos sucesos de E, decimos que los sucesos A y B son **independientes** si se verifica que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ejemplo: En el ejemplo anterior del dado

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \quad P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = P(A \cap B) \rightarrow A \text{ y } B \text{ no son independientes}$$

2.5- Probabilidad condicionada

La probabilidad de un suceso A puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso B. Para medir la influencia entre esos sucesos, se define la **probabilidad de A condicionada por B**, se denota por $P(A/B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Ejemplo: Consideramos el suceso aleatorio "lanzar un dado" y los sucesos A="sacar un número >3" y B="sacar un número par". ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor que 3 sabiendo que ha salido un número par?

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

¿Qué pasaría con la **probabilidad condicionada** si A y B son **sucesos independientes**?

Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

2.6- Teorema de Bayes

El **teorema de Bayes** nos dice que $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

De las fórmulas de la propiedad condicionada tenemos

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1) \quad \text{y} \quad P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (2)$$

Despejamos $P(A \cap B)$ en la fórmula (2) $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$ y lo sustituimos en la

fórmula (1) y obtenemos $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$