
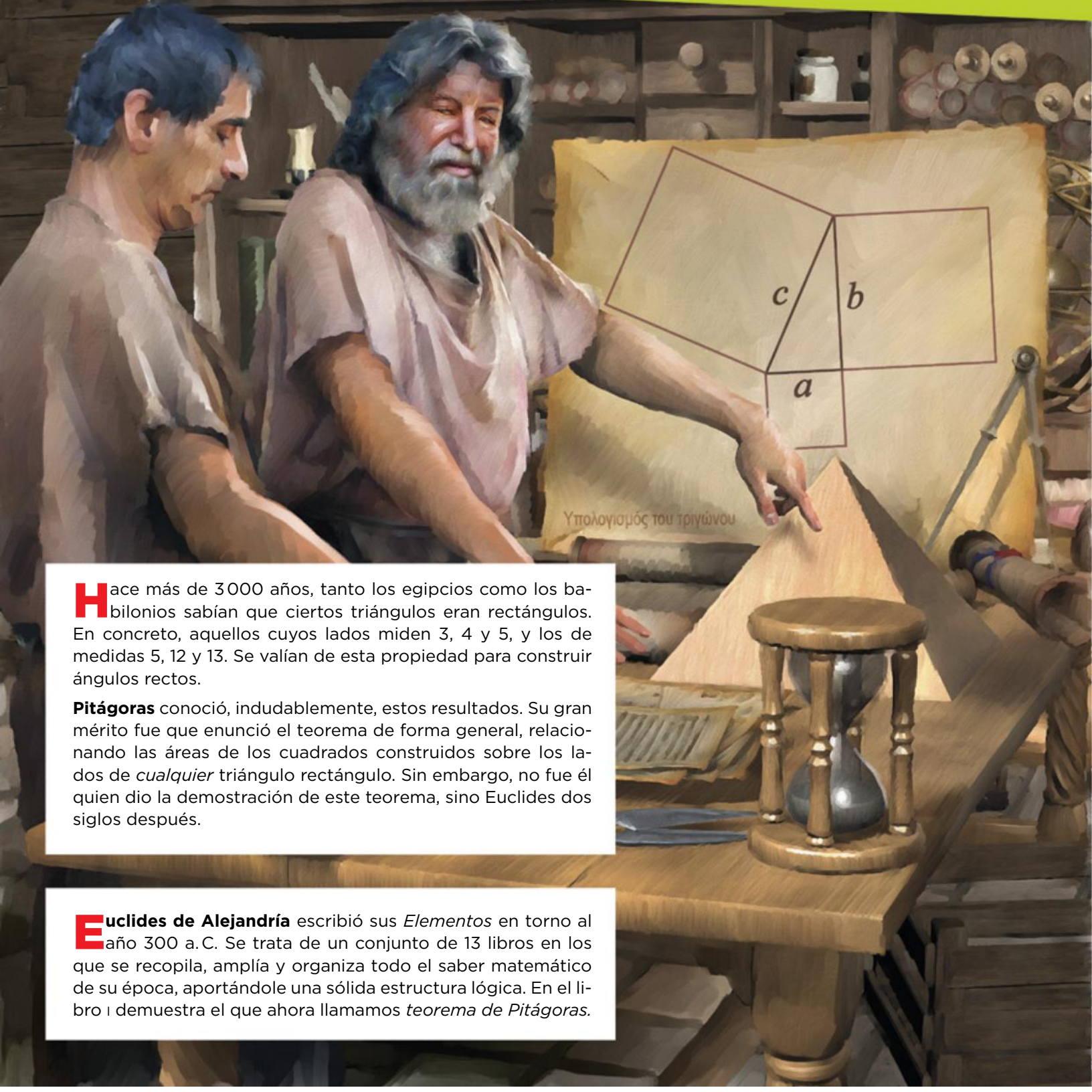


9

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es un importantísimo resultado geométrico. Como sabes, relaciona los cuadrados de los lados de cualquier triángulo rectángulo. 



Hace más de 3000 años, tanto los egipcios como los babilonios sabían que ciertos triángulos eran rectángulos. En concreto, aquellos cuyos lados miden 3, 4 y 5, y los de medidas 5, 12 y 13. Se valían de esta propiedad para construir ángulos rectos.

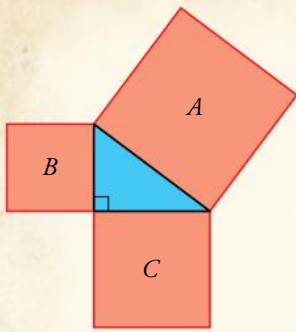
Pitágoras conoció, indudablemente, estos resultados. Su gran mérito fue que enunció el teorema de forma general, relacionando las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de *cualquier* triángulo rectángulo. Sin embargo, no fue él quien dio la demostración de este teorema, sino Euclides dos siglos después.

Euclides de Alejandría escribió sus *Elementos* en torno al año 300 a.C. Se trata de un conjunto de 13 libros en los que se recopila, amplía y organiza todo el saber matemático de su época, aportándole una sólida estructura lógica. En el libro I demuestra el que ahora llamamos *teorema de Pitágoras*.

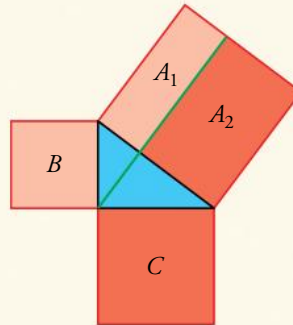
El teorema de Pitágoras y la demostración de Euclides

El teorema de Pitágoras afirma que si el triángulo azul es rectángulo, las áreas de los dos cuadrados pequeños suman igual que el área del cuadrado grande.

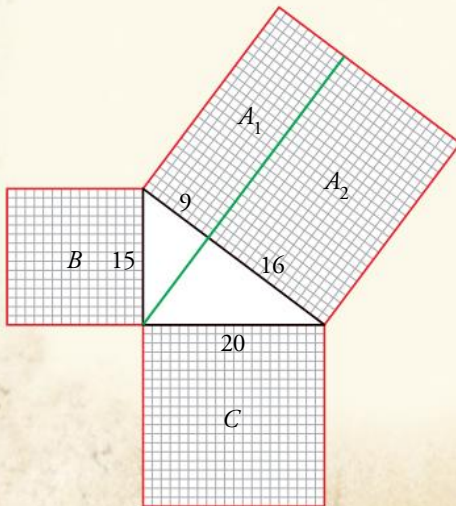
$$B + C = A$$



Euclides, para demostrarlo, trazó la recta verde de la figura. Es perpendicular al lado grande del triángulo y, por tanto, parte al cuadrado grande en dos rectángulos. Y probó que $B = A_1$ y $C = A_2$.



■ Comprueba en esta figura la propiedad anterior. Para ello:



- ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado pequeño, B ? Comprueba que son los mismos que los del rectángulo A_1 .
- Comprueba que el número de cuadraditos del cuadrado C coincide con el de A_2 .
- Enuncia la propiedad.

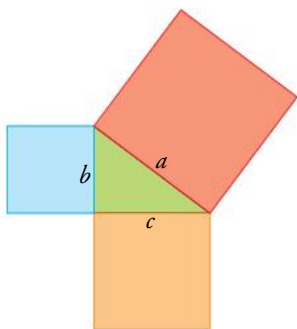


- 1 Construye con regla y compás dos triángulos: uno de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm, y otro de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm.

Comprueba que ambos triángulos son rectángulos. Para esto, puedes utilizar una esquina de una hoja de papel.



1 Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Se llaman **catetos**. El lado mayor se llama **hipotenusa**.

En general, llamaremos a a la hipotenusa y b y c a los catetos.

El **teorema de Pitágoras** afirma lo siguiente: $a^2 = b^2 + c^2$

Esto quiere decir que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Esta relación es cierta, solamente si el triángulo es rectángulo.

Sorprendente!

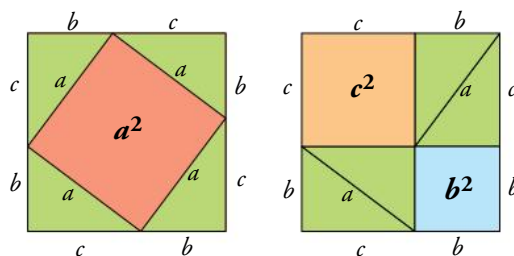
Esta demostración la construyeron los chinos 400 años antes de que naciera Pitágoras.

En la web

Demostración gráfica del teorema de Pitágoras.

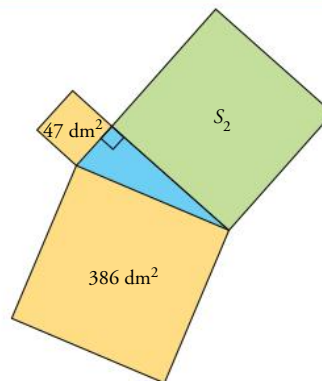
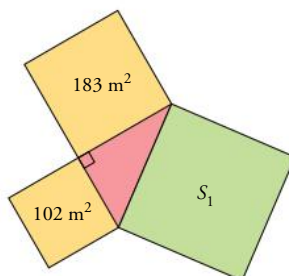
Observa la siguiente demostración:

Los dos cuadrados iguales tienen por lados $b + c$. Comparando las dos descomposiciones, es claro que $a^2 = b^2 + c^2$.



Ejercicio resuelto

¿Cuáles son las áreas de los cuadrados desconocidos en las siguientes figuras?



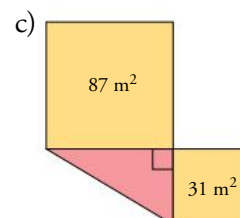
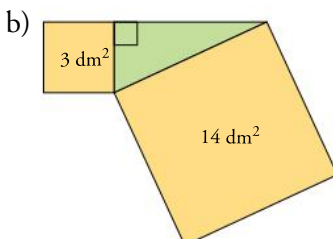
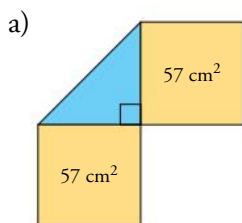
Como ambos triángulos son rectángulos, en los dos casos el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados menores. Por tanto:

$$S_1 = 183 \text{ m}^2 + 102 \text{ m}^2 = 285 \text{ m}^2$$

$$S_2 = 386 \text{ dm}^2 - 47 \text{ dm}^2 = 339 \text{ dm}^2$$

Piensa y practica

1. Dibuja en tu cuaderno estas figuras. Complétalas construyendo el cuadrado que falta en cada una y di cuál es su área.



En la web

Actividad manipulativa para razonar sobre la demostración del teorema de Pitágoras.

Los lados determinan el tipo de triángulo

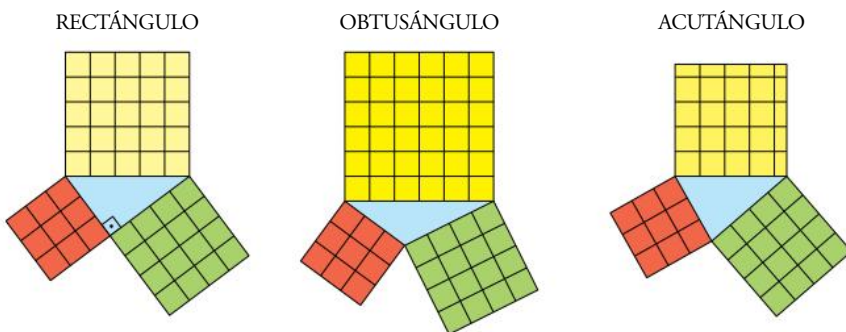
Si conocemos los lados de un triángulo, podemos averiguar si es o no rectángulo, comparando el cuadrado del lado mayor con la suma de los cuadrados de los otros dos.

¿ a^2 es igual que $b^2 + c^2$?

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, el triángulo es **rectángulo**.
- Si $a^2 > b^2 + c^2$, el triángulo es **obtusángulo**.
- Si $a^2 < b^2 + c^2$, el triángulo es **acutángulo**.

Justificación

Si en un triángulo rectángulo abrimos el ángulo que forman los dos catetos, el lado opuesto aumenta y, por tanto, su cuadrado también aumenta. Si cerramos dicho ángulo (lo hacemos agudo), el lado opuesto es menor de lo que era la hipotenusa.



5^2 es igual a $3^2 + 4^2$ 6^2 es mayor que $3^2 + 4^2$ $4,5^2$ es menor que $3^2 + 4^2$

Ejercicio resuelto

Indicar si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

- a) 70 cm, 240 cm, 245 cm
- b) 15 dm, 36 dm, 39 dm
- c) 18 m, 80 m, 83 m

- a) $70^2 + 240^2 = 4900 + 57600 = 62500$; $245^2 = 60025$
 245^2 es menor que $70^2 + 240^2$, por tanto, el triángulo es ACUTÁNGULO.
- b) $15^2 + 36^2 = 1521$; $39^2 = 1521$
 Como son iguales, el triángulo es RECTÁNGULO.
- c) $18^2 + 80^2 = 6724$; $83^2 = 6889$
 83^2 es mayor que $18^2 + 80^2$, por tanto, el triángulo es OBTUSÁNGULO.

Ternas pitagóricas

Si tres números naturales, c , b , a , cumplen $c^2 + b^2 = a^2$, es decir, si pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, entonces decimos que forman una **terna pitagórica**. Aquí tienes algunas:

3, 4, 5	8, 15, 17	12, 35, 37
5, 12, 13	9, 40, 41	13, 84, 85
7, 24, 25	11, 60, 61	16, 63, 65

Fíjate que si c , b , a es una terna pitagórica, también lo es kc , kb y ka .

Por ejemplo, 6, 8, 10 (obtenidas al multiplicar por 2 cada uno de los componentes de la terna 3, 4, 5) es una terna pitagórica.

Piensa y practica

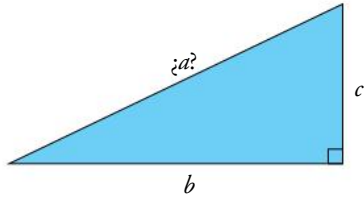
- 2. Comprueba que las nueve ternas de arriba son, efectivamente, pitagóricas.
 Por ejemplo, 3, 4 y 5 es pitagórica, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$.

- 3. Clasifica según sus ángulos estos triángulos:
 - a) 17 m, 6 m, 14 m
 - b) 64 cm, 84 cm, 57 cm
 - c) 45 dm, 28 dm, 53 dm
 - d) 5 mm, 5 mm, 8 mm

2

Cálculo de un lado conociendo los otros dos

Si sabemos que un triángulo es rectángulo, y conocemos la longitud de dos de sus lados, el teorema de Pitágoras nos permite calcular la longitud del tercero.



Cálculo de la hipotenusa conociendo los dos catetos

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Ejemplos

- En un triángulo rectángulo, sus catetos miden 88 m y 105 m. Calcula la longitud de la hipotenusa.

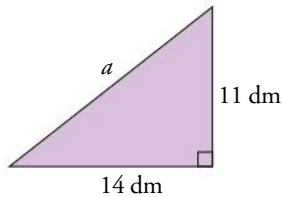
$$a = \sqrt{88^2 + 105^2} = \sqrt{7744 + 11025} = \sqrt{18769} = 137$$

La hipotenusa mide 137 m.

- Halla la hipotenusa del triángulo del margen.

$$a = \sqrt{14^2 + 11^2} = \sqrt{196 + 121} = \sqrt{317} = 17,8$$

La hipotenusa mide 17,8 dm aproximadamente.



Cálculo de un cateto conociendo el otro y la hipotenusa

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Ejemplos

- En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 130 cm, y uno de los catetos, 32 cm. Halla la longitud del otro cateto.

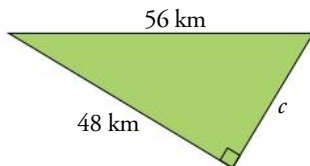
$$b = \sqrt{130^2 - 32^2} = \sqrt{16900 - 1024} = \sqrt{15876} = 126$$

El otro cateto mide 126 cm.

- Halla la longitud del lado desconocido en el triángulo del margen.

$$c = \sqrt{56^2 - 48^2} = \sqrt{3136 - 2304} = \sqrt{832} = 28,84$$

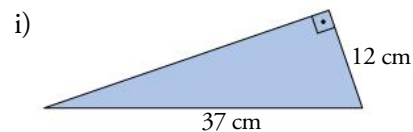
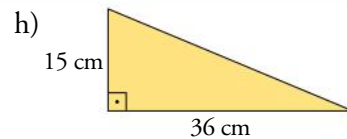
El lado desconocido mide 28,84 km aproximadamente.



Piensa y practica

1. Halla la longitud del lado desconocido en estos triángulos rectángulos, donde a es la hipotenusa, aproximando cuando haga falta hasta dos cifras decimales:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| a) $c = 70$ mm | $a = 74$ mm |
| b) $b = 15$ cm | $a = 25$ cm |
| c) $b = 14$ m | $c = 48$ m |
| d) $b = 13$ pulgadas | $c = 84$ pulgadas |
| e) $b = 5,5$ cm | $a = 30,5$ cm |
| f) $c = 24$ km | $a = 26$ km |
| g) $b = 65$ m | $a = 425$ m |

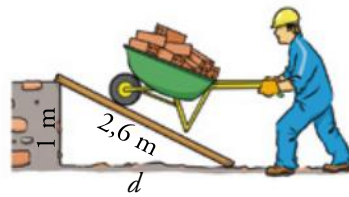


- j) Los catetos del triángulo rectángulo miden 3 dam y 5 dam respectivamente.
- k) La hipotenusa del triángulo rectángulo mide 10,7 m, y uno de los catetos, 7,6 m.

Ejercicios resueltos

1. Queremos salvar un escalón de 1 m de altura para pasar con la carretilla. Disponemos de un tablón de 2,6 m. ¿A qué distancia del escalón empieza la rampa?

En este triángulo rectángulo, conocemos la hipotenusa y un cateto. Hemos de calcular el otro cateto.



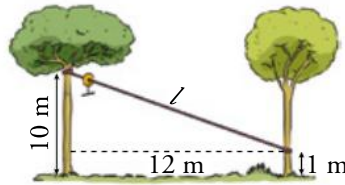
$$d^2 = 2,6^2 - 1^2 = 6,76 - 1 = 5,76$$

$$d = \sqrt{5,76} = 2,4 \text{ m}$$

El pie del tablón estará situado a 2,4 m del escalón, o algo menos para que pueda apoyarse arriba.

2. Hay que hacer una trolina entre dos árboles separados 12 m. El cable estará atado a 10 m de altura de un árbol y a 1 m de altura en el otro. ¿Cuál es la longitud del cable en tensión?

Conociendo los catetos, hallamos la hipotenusa.



$$l^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

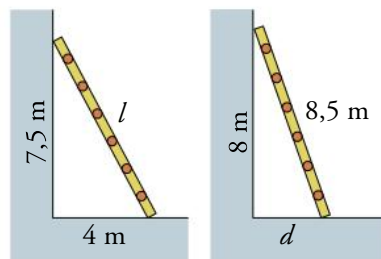
$$l = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$$

La longitud del cable tenso es de 15 m. Además, habrá que tener en cuenta la longitud necesaria para atarlo a cada árbol.

3. Una escalera cuyo pie está a 4 m de la pared se apoya en esta, alcanzando una altura de 7,5 m. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el pie para que llegue a una altura de 8 m?

Calculamos primero la longitud de la escalera.

$$l^2 = 4^2 + 7,5^2 = 72,25 \rightarrow l = \sqrt{72,25} = 8,5 \text{ m}$$



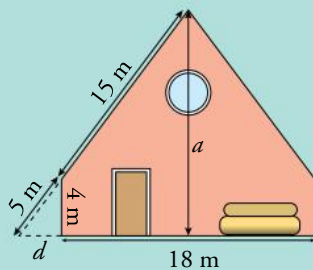
Ahora calculamos la distancia a la que debe estar para alcanzar 8 m de altura:

$$d^2 = 8,5^2 - 8^2 = 72,25 - 64 = 8,25$$

$$d = \sqrt{8,25} = 2,87 \text{ m}$$

El pie de la escalera debe situarse a 2,87 m de la pared.

4. Álvaro ha tomado estas medidas para hallar la altura, a , de la pared de su buhardilla. Calcular d y, luego, a .



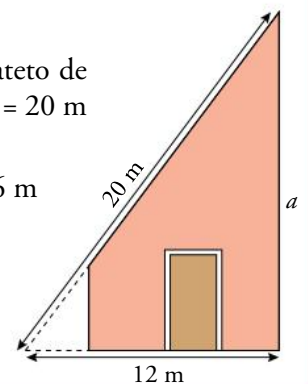
Calculamos la distancia d .

$$d^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow d = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$$

Ahora calculamos la altura, a , sabiendo que es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $15 + 5 = 20 \text{ m}$ y el otro cateto $3 + 9 = 12 \text{ m}$:

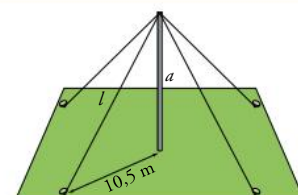
$$a^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 \rightarrow a = \sqrt{256} = 16 \text{ m}$$

La altura de la buhardilla es de 16 m.



Piensa y practica

2. Para colocar un mástil, se han utilizado 64 m de cable. Se sujeta con cuatro cables y se necesita 1 m de longitud por cada amarre. Si todos los cables están atados al extremo de arriba y a un tornillo anclado en el suelo a 10,5 m de su pie, ¿qué altura alcanza el mástil?



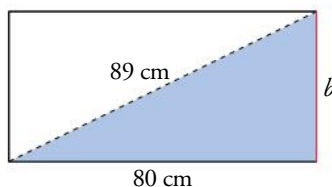
Hay multitud de polígonos en los que algunos de sus elementos son lados de un triángulo rectángulo. Eso permite relacionarlos mediante el teorema de Pitágoras y calcular la longitud de uno de ellos conociendo los otros dos.

Ejercicios resueltos

1. La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y uno de los lados, 80 cm. Calcula su área.

El área de un rectángulo de lados a y b es: $A = a \cdot b$

Empezamos por calcular el otro lado:



$$b = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39$$

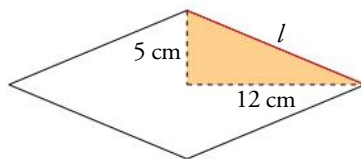
El lado corto mide 39 cm.

El área es:

$$A = 80 \cdot 39 = 3120 \text{ cm}^2$$

2. Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Hallar su perímetro.

Comenzamos por calcular la longitud de un lado:



$$l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

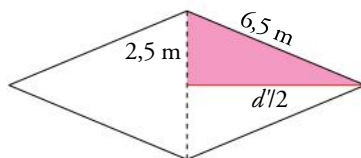
Cada lado mide 13 cm.

El perímetro es:

$$P = 4 \cdot 13 = 52 \text{ cm}$$

3. El lado de un rombo mide 6,5 m y una de sus diagonales, 5 m. Hallar su área.

El área de un rombo cuyas diagonales son d y d' es: $A = \frac{d \cdot d'}{2}$



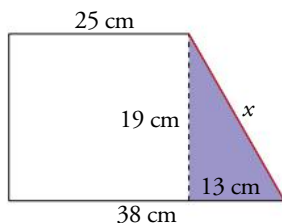
Conocemos una diagonal. El teorema de Pitágoras nos permite calcular la otra:

$$\frac{d'}{2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ m}$$

La segunda diagonal mide, pues, $6 \cdot 2 = 12$ m. Por tanto, $A = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ m}^2$.

4. Las bases de un trapecio rectángulo miden 25 cm y 38 cm, y la altura, 19 cm. Hallar su perímetro.

Empezamos calculando la longitud del lado oblicuo:



$$x = \sqrt{13^2 + 19^2} = \sqrt{530} \approx 23,02$$

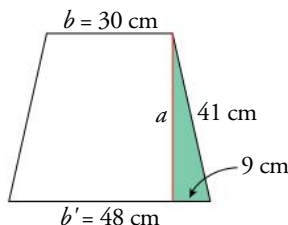
El lado oblicuo mide 23 cm aproximadamente.

El perímetro es:

$$P = 38 + 19 + 25 + 23 = 105 \text{ cm}$$

5. Hallar el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 48 cm, y el lado oblicuo, 41 cm.

Recordemos que el área de un trapecio es: $A = \frac{(b + b') \cdot a}{2}$



Hemos de empezar calculando su altura, a . En el triángulo verde, el lado pequeño mide $(48 - 30) : 2 = 9$ cm.

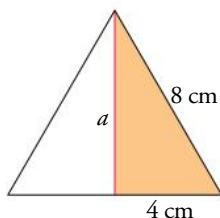
$$a = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$$

La altura del trapecio mide 40 cm.

$$A = \frac{(30 + 48) \cdot 40}{2} = 1560 \text{ cm}^2$$

6. Calcular el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

Empezamos calculando la altura:



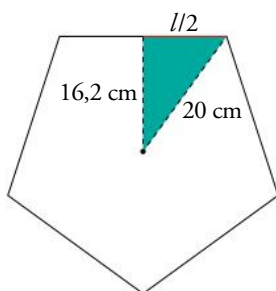
$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6,9$$

La altura mide 6,9 cm aproximadamente.

El área es:

$$A = \frac{8 \cdot 6,9}{2} = 27,6 \text{ cm}^2$$

7. Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 16,2 cm, y el radio, 20 cm.



Primero calculamos el lado:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{20^2 - 16,2^2} = \sqrt{137,56} \approx 11,7$$

El lado del pentágono mide:

$$l = 11,7 \cdot 2 = 23,4 \text{ cm}$$

Por tanto, su perímetro es:

$$P = 23,4 \cdot 5 = 117 \text{ cm}$$

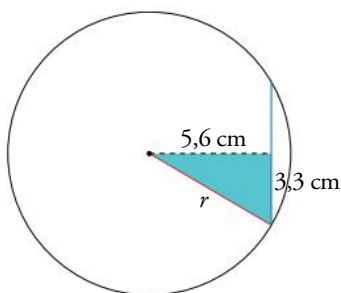
Finalmente, calculamos el área.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{117 \cdot 16,2}{2} = 947,7 \text{ cm}^2$$

8. Hallar el perímetro de una circunferencia en la que se ha trazado una cuerda de 6,6 cm a una distancia de 5,6 cm del centro.

Calcular el área del círculo correspondiente.

Comenzamos calculando el radio. En el triángulo rectángulo coloreado, el lado pequeño mide $6,6 : 2 = 3,3 \text{ cm}$.



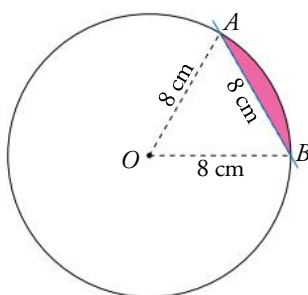
$$r = \sqrt{3,3^2 + 5,6^2} = \sqrt{42,25} = 6,5$$

El radio mide 6,5 cm.

$$P = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 6,5 \approx 40,8 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot 6,5^2 \approx 132,7 \text{ cm}^2$$

9. Una circunferencia de 8 cm de radio es cortada por una recta en dos puntos A y B que distan 8 cm entre sí. Calcular el área del segmento circular determinado por la cuerda \widehat{AB} .



El segmento circular, en rojo, es la diferencia entre el sector circular de arco \widehat{AB} y el triángulo OAB .

El triángulo OAB , equilátero, es el mismo cuya área hemos obtenido en el ejercicio 6 de esta página ($A_{\text{TRIÁNGULO}} = 27,6 \text{ cm}^2$).

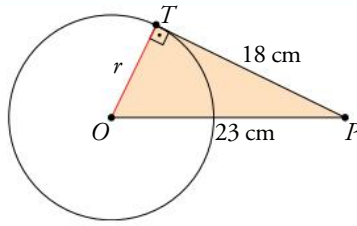
Como el triángulo es equilátero, $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Por tanto, el área del sector es la sexta parte del área de todo el círculo:

$$A_{\text{SECTOR}} = (\pi \cdot 8^2) : 6 = 33,5 \text{ cm}^2$$

Por tanto:

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 33,5 - 27,6 = 5,9 \text{ cm}^2$$

10. La distancia de un punto P al centro O de una circunferencia es $\overline{OP} = 23$ cm. Trazamos una tangente desde P a la circunferencia. El segmento tangente PT mide 18 cm. Hallar el área del círculo.

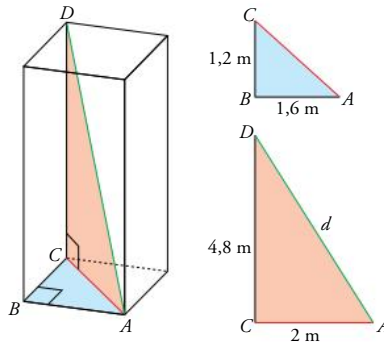


La recta tangente es perpendicular al radio. Por tanto, el triángulo PTO es rectángulo en T :

$$r^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PT}^2 = 23^2 - 18^2 = 205$$

$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 205 \approx 643,7 \text{ cm}^2$$

11. Hallar la diagonal de un ortoedro de dimensiones 1,2 m; 1,6 m y 4,8 m.



$$\overline{AC} = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2 \text{ m}$$

$$d = \sqrt{2^2 + 4,8^2} = 5,2 \text{ m}$$

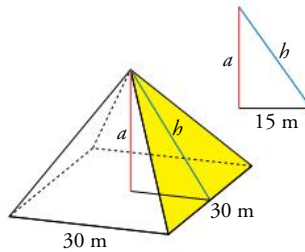
La diagonal del ortoedro mide 5,2 m.

Observa que se puede hallar directamente:

$$d = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2 + 4,8^2} = 5,2 \text{ m}$$

En general, en un ortoedro de dimensiones $a \times b \times c$ la diagonal es $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

12. Calcular la altura, a , de una pirámide cuadrangular regular cuya base es un cuadrado de 30 m de lado y cuya cara lateral tiene un área de 255 m^2 .



Primero hallamos la altura de la cara lateral.

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \rightarrow 255 = \frac{30 \cdot h}{2} \rightarrow h = 17 \text{ m}$$

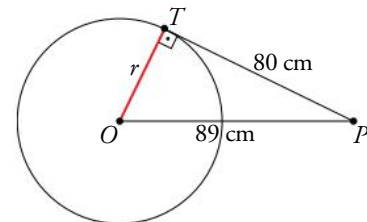
A partir de la altura de la cara lateral, calculamos la altura de la pirámide:

$$a = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ m}$$

La pirámide tiene 8 m de altura.

Piensa y practica

- El lado de un rombo mide 8,5 m, y una de sus diagonales, 15,4 m. Calcula su área.
- Halla el área de un triángulo equilátero de 54 cm de perímetro.
- Calcula el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 70 dm y 134 dm, y el lado oblicuo, 85 dm.
- Halla el área y el perímetro de un trapecio isósceles cuyas bases miden 3,2 m y 6,4 m, y su altura, 6,3 m.
- Calcula el área de un hexágono regular de 18 cm de lado. (Recuerda que en un hexágono regular, el lado mide igual que el radio).
- En una circunferencia de radio 9,7 m, se traza una cuerda de 13 m. ¿A qué distancia de la cuerda se encuentra el centro de la circunferencia?
- La distancia de un punto P al centro O de una circunferencia es de 89 cm. Trazamos una tangente desde P a la circunferencia. El segmento tangente PT tiene una longitud de 80 cm. Halla el perímetro de la circunferencia y el área del círculo.



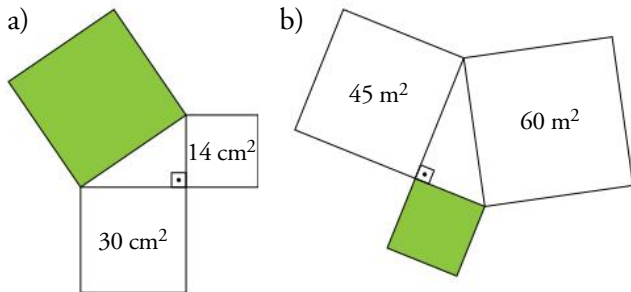
- Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 1 m. Su perímetro es 5,85 m. Calcula su área.
- Halla la longitud de la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 8 dm, 6 dm y 14 dm.



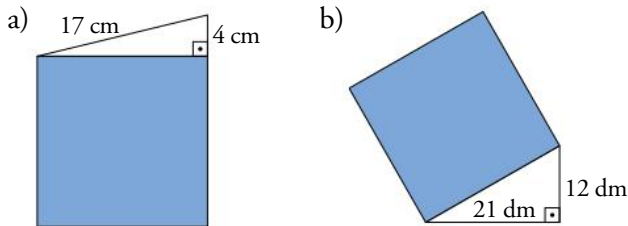
Ejercicios y problemas

Teorema de Pitágoras

1. Calcula el área del cuadrado verde en cada uno de los siguientes casos:



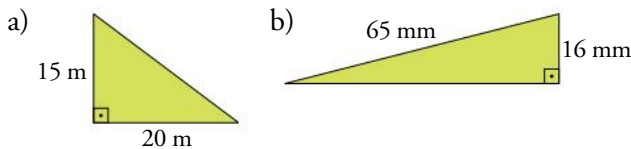
2. Calcula el área de los siguientes cuadrados:



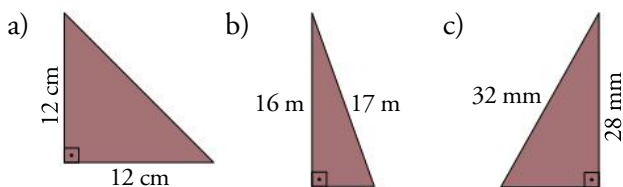
3. Di si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

- a) 15 cm, 10 cm, 11 cm
- b) 35 m, 12 m, 37 m
- c) 23 dm, 30 dm, 21 dm
- d) 15 km, 20 km, 25 km
- e) 17 millas, 10 millas, 5 millas
- f) 21 mm, 42 mm, 21 mm
- g) 18 cm, 80 cm, 82 cm

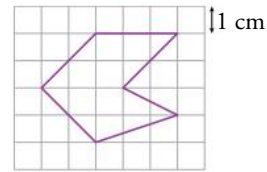
4. Calcula el lado desconocido en cada triángulo rectángulo:



5. Calcula el lado desconocido en cada triángulo aproximando hasta las décimas:



6. Halla el perímetro de la siguiente figura:



7. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.

8. Halla la diagonal de un cuadrado cuyo perímetro mide 28 dm.

9. Los lados paralelos de un trapecio rectángulo miden 13 dm y 19 dm, y el lado oblicuo mide 10 dm. Calcula la altura.

10. Calcula los lados iguales de un triángulo isósceles sabiendo que el lado desigual mide 5 m y la altura correspondiente, 6 m.

11. Calcula la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 1 dm y 2,4 dm.

12. Halla la altura de un triángulo equilátero de 40 cm de lado. Aproxima hasta los milímetros.

13. Halla la apotema de un hexágono regular de 20 cm de lado. (Recuerda que en el hexágono regular el lado mide lo mismo que el radio).

14. Un pentágono regular de 11,7 cm de lado está inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. Calcula su apotema.

15. Una recta pasa a 10 cm del centro de una circunferencia de 15 cm de radio. Halla, aproximando hasta las décimas, la longitud de la cuerda que se genera.

16. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de 8 cm de radio debe pasar una recta para que la cuerda mida 8 cm?

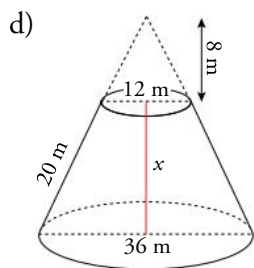
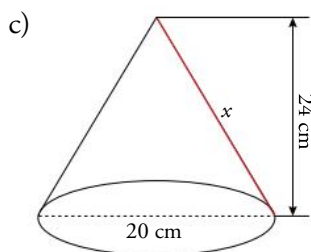
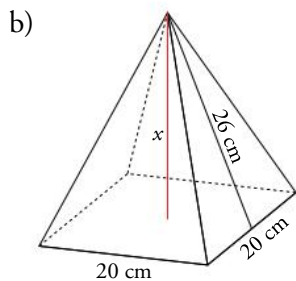
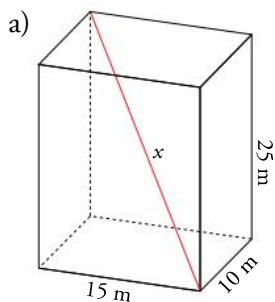
17. Calcula la diagonal de un cubo de 20 cm de arista. Aproxima hasta los milímetros.

18. Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 3 cm, 4 cm y 12 cm.

19. Desde un punto P exterior a una circunferencia de radio 10 m se traza un segmento tangente de 24 m. ¿A qué distancia está P del centro de la circunferencia?

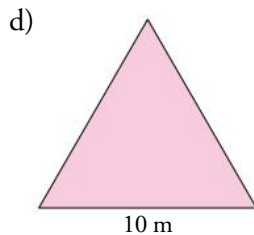
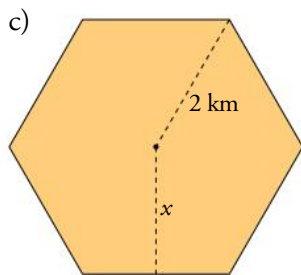
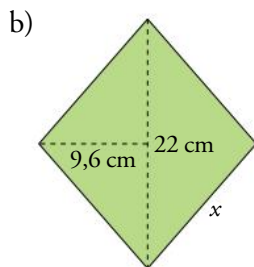
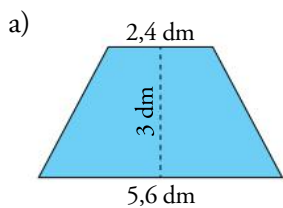
Ejercicios y problemas

20. Calcula, con una cifra decimal, la longitud de x en cada uno de los siguientes cuerpos geométricos:



Áreas y perímetros utilizando el teorema de Pitágoras

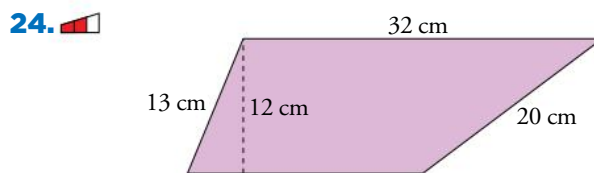
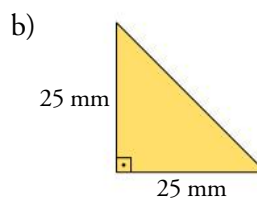
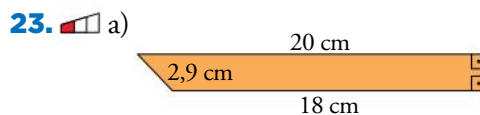
21. Halla el área y el perímetro en cada una de las siguientes figuras:



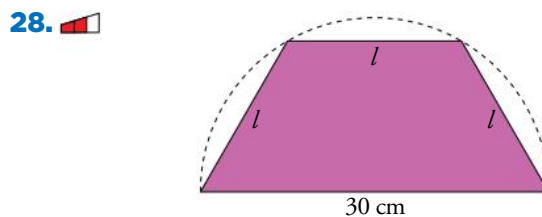
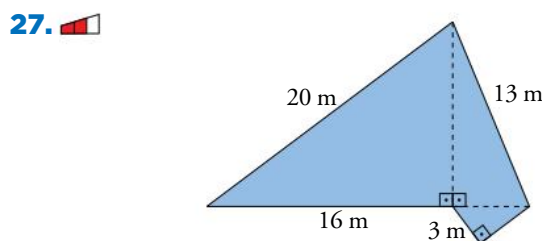
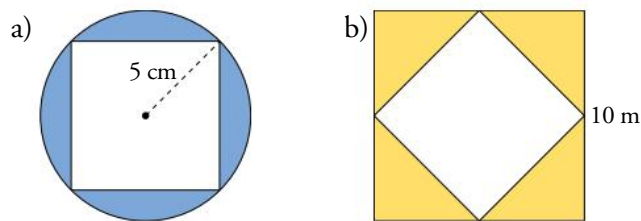
22. Halla el área y el perímetro de las figuras descritas en ...

- a) ... el ejercicio 9.
- b) ... el ejercicio 10.
- c) ... el ejercicio 11.
- d) ... el ejercicio 12.
- e) ... el ejercicio 13.
- f) ... el ejercicio 14.

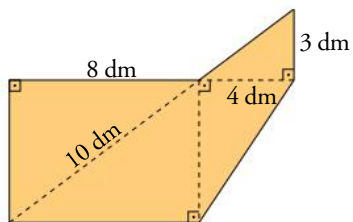
En cada una de estas figuras coloreadas, halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que calcular la medida de algún elemento (lado, diagonal, apotema, ángulo...). Si no es exacta, hállala con una cifra decimal.



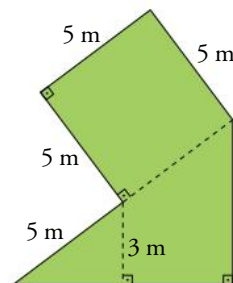
25. Observa que en estas figuras el perímetro es la periferia interior y exterior.



29. 

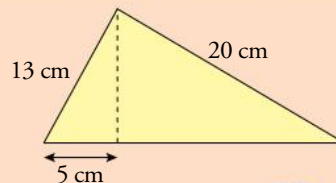


30. 



Aprende a resolver problemas

¿Es rectángulo el triángulo de la derecha? Clasifícalo justificando tu respuesta.



Comprueba que has entendido el enunciado.

¿Qué datos conocemos? ¿Qué es lo que nos piden? ¿Qué elementos nos faltan para resolver el problema?



Piensa el camino que vas a seguir para resolver el problema. ¿Qué necesitas saber?

¿Por dónde vas a empezar?

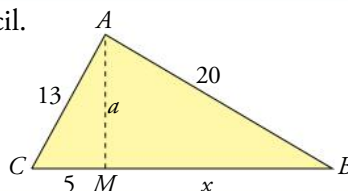
— Pues, si supiera la longitud de los tres lados comprobaría si cumplen el teorema de Pitágoras.

Cierto. Y entonces, ¿qué te falta?

— Me falta conocer un trozo de la base (x).

Sí pero, antes de nada, para entendernos, ¿por qué no das nombre a los elementos del triángulo?

— Eso es fácil.



Necesito averiguar x .

Podría hacerlo con el teorema de Pitágoras, en el triángulo AMB , pero no conozco el cateto a .

Pero si te fijas podrías superar esa dificultad (averiguar a) mirando a otro triángulo.

— ¡Claro! El triángulo ACM es rectángulo. Y entonces:

$$a = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$



Y conociendo a ...

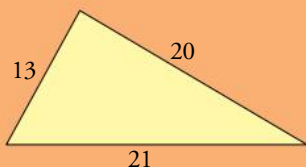


— Y conociendo a , me voy al triángulo AMB y calculo x :

$$x = \sqrt{20^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$$

— Y entonces, ¡ya tengo la base! $CB = 5 + 16 = 21$

Y finalmente, volviendo al triángulo original...



— Ahora puedo saber cómo es ese triángulo:

$$13^2 + 20^2 = 569$$


$$21^2 = 441$$

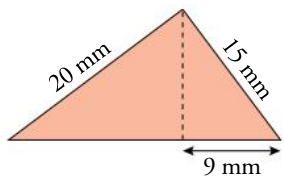
$$13^2 + 20^2 > 21^2$$


— La suma de los cuadrados de los dos lados menores supera al cuadrado del lado mayor: el triángulo es acutángulo.

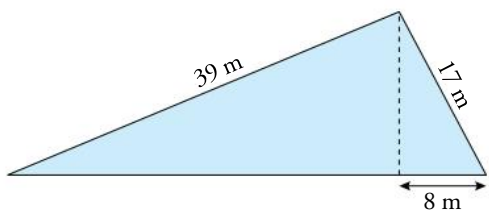
Ejercicios y problemas


Resuelve problemas

31.  Calcula las medidas que sean necesarias para clasificar el siguiente triángulo según sus ángulos:




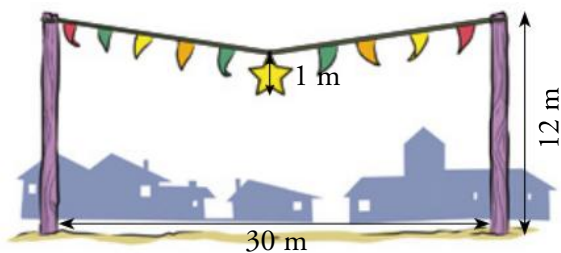
32.  Clasifica el siguiente triángulo en rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Para ello, calcula la medida de alguno de sus elementos:





33.  Un poste de 14,5 m de alto se quiebra por su base y cae sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que golpea?

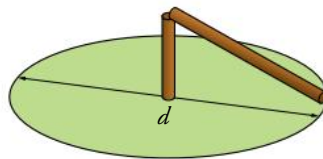



34.  En las fiestas de un pueblo, cuelgan una estrella de 1 m de altura en medio de una cuerda de 34 m que está atada a los extremos de dos postes de 12 m separados 30 m entre sí. ¿A qué distancia del suelo queda la estrella?




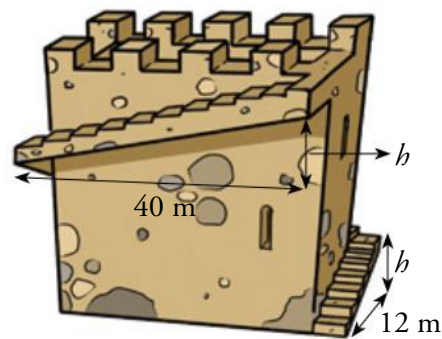
35.  Indica si una varilla de 65 cm de longitud cabe en un cilindro de 63 cm de altura y 8 cm de radio de la base.


36.  El tronco de un árbol seco de 20 m está en el centro de un parque circular. Debemos cortarlo para poner columpios, pero no queremos que al partirse se salga del recinto del parque. Para ello lo hemos cortado a un cuarto de su altura y así cae justo en el borde del recinto. ¿Cuántos metros mide el diámetro del parque?

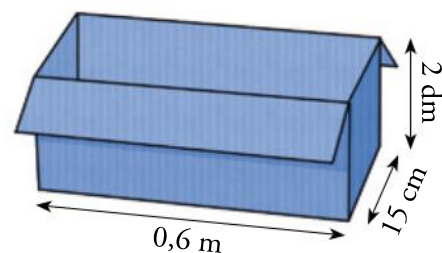


37.  Un operario de la compañía eléctrica apoya su escalera de 6,5 m de largo en una pared a una altura de 6 m. Después de arreglar la avería, sin mover la base de la escalera, apoya esta en la pared de enfrente a una altura de 5,2 m. ¿A qué distancia se encuentran las paredes?

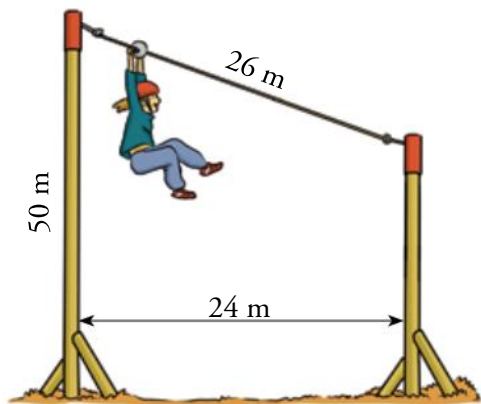
38.  En una torre con forma de prisma de 36 m de altura cuya base es un rectángulo de 40 m de largo y 12 m de ancho, hay una escalera por el exterior. Hay cuatro tramos de escalera, uno por cada cara lateral de la torre. En todos ellos se asciende la misma altura. Sabiendo que cada metro de escalera tiene 3 escalones, ¿cuántos hay para subir a la torre?



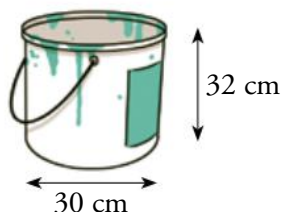
39.  Julián quiere guardar una plancha metálica de 20 cm \times 62 cm en una caja como la siguiente. Comprueba si puede hacerlo.



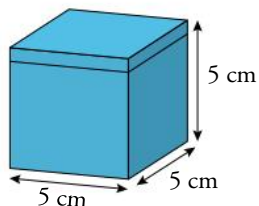
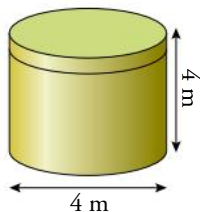
40. Una tirolina de 26 m de longitud está atada a dos postes que distan 24 m. Si Manuela sale desde el primer poste a una altura de 50 m, ¿a qué altura llegará en el segundo poste?



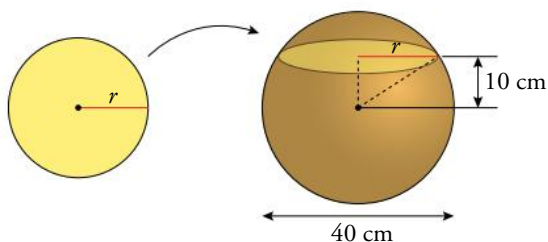
41. Este bote de pintura está lleno en sus tres cuartas partes. En su interior se ha caído un pincel de 40 cm de largo. ¿Crees que el pincel se habrá sumergido completamente en la pintura?



42. Calcula la longitud del mayor listón que cabe en cada una de estas cajas:

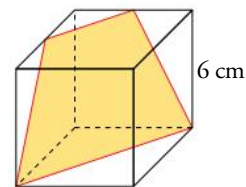
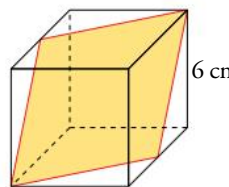
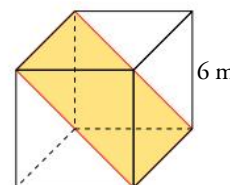
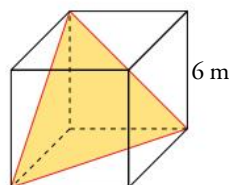


43. Calcula el radio de la circunferencia que se obtiene al cortar una esfera de 40 cm de diámetro por un plano que pasa a 10 cm del centro.



Problemas “+”

44. Hemos cortado cuatro cubos de poliestirano como se muestra en las siguientes figuras. Halla el área y el perímetro de estos polígonos.



45. El edificio El Pentágono, en Washington (Estados Unidos), es un pentágono regular de 300 m de lado y la apotema de su patio interior, también pentagonal regular, mide 86 m.

La longitud del lado del pentágono exterior es 2,4 veces la del interior y la distancia entre los vértices *A* y *B* (observa el gráfico) es de 148,51 m. ¿Qué superficie tiene su planta?



46. Si vuelas en un avión a 10 000 m de altura, ¿a qué distancia se encuentra el punto más alejado que puedes ver en el horizonte?

Radio de la Tierra: 6371 km

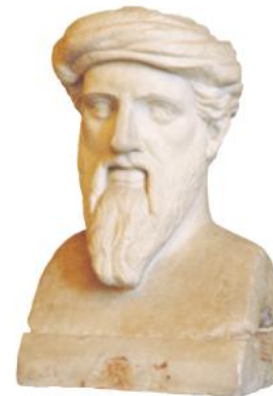


Lee y reflexiona

Pitágoras

De Pitágoras (siglo V a. C.) se sabe que fue matemático y filósofo. Pero no son muy conocidas sus contribuciones a la astronomía:

- Fue el primer griego que reconoció que el lucero del alba y el del anochecer eran la misma estrella. Ahora sabemos que es un planeta, Venus.
- También fue el primero en establecer que la órbita de la Luna no está en el plano del ecuador terrestre sino formando un cierto ángulo con ese plano.
- Y también se adelantó a los suyos al describir que varias estrellas, a las que se llamó *estrellas errantes*, no participaban del movimiento uniforme de las demás. Precisamente *errante*, en griego, se pronuncia *planeta*. Y así, planeta, se acabó llamando a esos objetos celestes que se mueven en el firmamento de forma errática. Actualmente sabemos que los planetas no tienen nada que ver con las estrellas. De ahí su anómalo movimiento aparente.



¿Cómo construir un campo de vóley playa?

Queremos dibujar un campo de vóley playa.

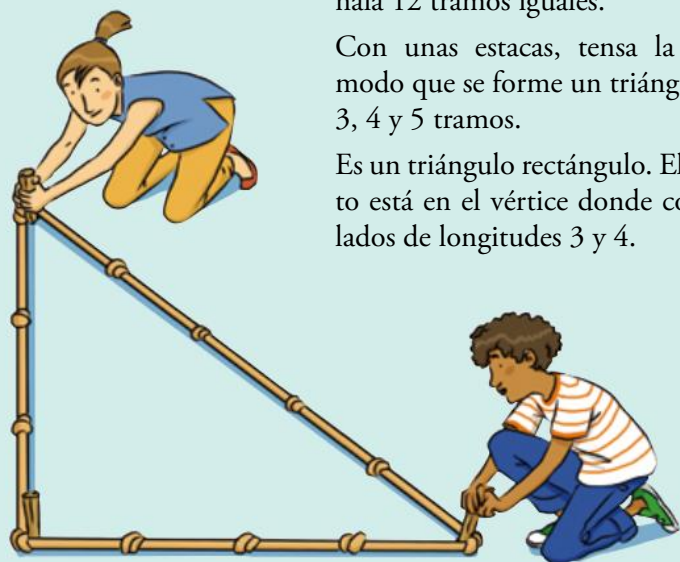
¿Cómo trazamos las líneas rectas? Nada mejor que una cuerda tensa.

¿Y cómo se consigue el ángulo recto de las esquinas?

Coge una cuerda y, mediante nudos, señala 12 tramos iguales.

Con unas estacas, tensa la cuerda, de modo que se forme un triángulo de lados 3, 4 y 5 tramos.

Es un triángulo rectángulo. El ángulo recto está en el vértice donde confluyen los lados de longitudes 3 y 4.



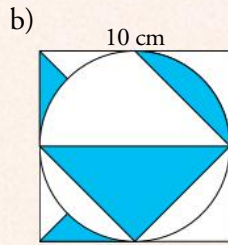
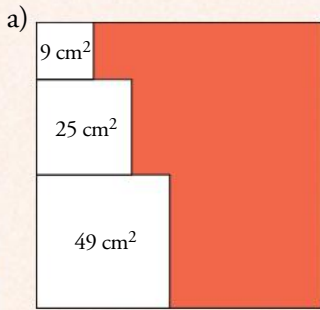
Un poco de historia

Hace más de 3 000 años, los egipcios utilizaban este procedimiento para trazar ángulos rectos. Cada año, después de las inundaciones del Nilo, debían construir las lindes entre los campos anegados. Los técnicos encargados de hacerlo se valían del método descrito a la izquierda.

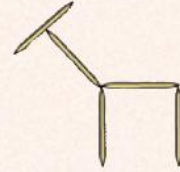
Entrénate resolviendo problemas



- Calcula la superficie de un cuadrado cuya diagonal coincide con el lado de otro cuadrado de 10 m^2 de superficie.
- Calcula el área de la parte coloreada de cada una de las siguientes figuras:



- Moviendo un único palillo es posible conseguir que la "jirafa" mire en otra dirección. ¿Sabrías hacerlo?



- ¡Medio en broma, medio en serio! Moviendo solo un palillo, forma un cuadrado. ¿Sabrías hacerlo?



Autoevaluación



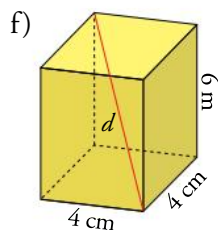
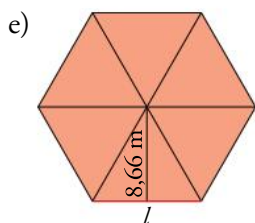
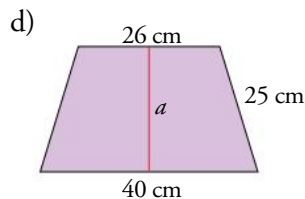
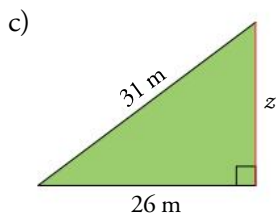
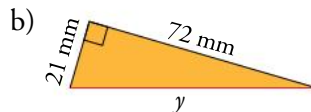
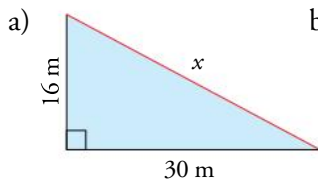
En la web



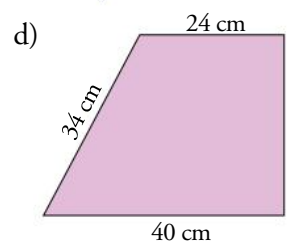
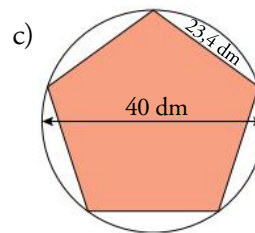
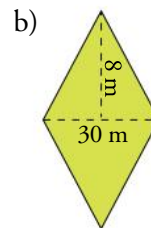
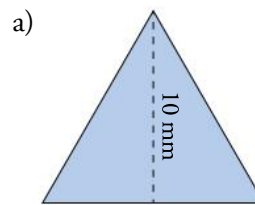
Resoluciones de estos ejercicios.

- Clasifica los siguientes triángulos en rectángulo, acutángulo u obtusángulo.
 - a) 20 cm, 24 cm, 30 cm
 - b) 5 m, 6 m, 10 m
 - c) 10 mm, 24 mm, 26 mm
 - d) 7 dm, 7 dm, 7 dm

- Calcula el segmento desconocido en cada una de estas figuras:



- Calcula las áreas y los perímetros de estas figuras:



- La plaza de un pueblo tiene la forma y las dimensiones que aparecen en el dibujo. Los ángulos señalados son todos ellos de 45° . Calcula el área y el perímetro de la plaza.

