Unidade 6 - Matrices e sistemas lineais – Boletín 1

1 - Exercicios con operacións combinadas, determinantes e cálculo da inversa.

1 **(PAU Ordinaria 2025 ADAPTADO)** — Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule a matriz inversa de A, A^{-1}. b) Calcule a matriz inversa da matriz trasposta de A, $(A^t)^{-1}$, utilizando o apartado anterior. c) Calcule o valor de de $X=(A-I)^{-1}\cdot A^t$.

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ *b)* $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$ *c)* $A-I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$

2 **(PAU Extraordinaria 2025 ADAPTADO)** — Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcule a inversa da matriz A. b) Calcule a matriz BA^t; c) Calcula $X=(BA^t-B)\cdot A^{-1}$.

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $B\cdot A^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $X=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & -2 & -12 \end{pmatrix}$

3 **(ABAU Ordinaria 2024 ADAPTADO)** — Considere A e B as matrices seguintes: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a) Calcule, se é posible, a inversa da matriz A b) Calcula $X=(AB^t-B)\cdot A^{-1}$.

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $AB^t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *c)* $X=(AB^t-B)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

4 **(ABAU Extraordinaria 2024 ADAPTADO)** — Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}$

a) Calcule para que valor de k non existe a matriz inversa de A. b) Calcule a matriz A^{-1} (inversa de A) para k=-2.

a) A non ten matriz inversa se k=-5 *b)* $A^{-1}=\frac{-1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

5 **(ABAU Ordinaria 2023 ADAPTADO)** — Sexan as matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule a matriz A^t (sendo A^t a matriz trasposta de A) e calcule a matriz $A\cdot B$

b) Calcule a matriz $X=(A\,B)^{-1}(C+I)$ onde $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I a matriz identidade 2x2.

a) $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{pmatrix}$

6 **(ABAU Extraordinaria 2023)** — Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule os valores de a para os cales a matriz A ten inversa.

b) Para $a=1$ calcule, se é posible, a inversa da matriz A

c) Exprese en forma matricial o sistema de ecuacións seguinte ~~e resólvao~~: $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2y-z=-1 \\ x+y=1 \end{cases}$

a) A matriz A ten inversa para tódolos valores de a distintos de 2/3 b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7 **(ABAU Ordinaria 2022 ADAPTADO) —** Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

a) Calcule as matrices A^2-B e $A-I$, onde I representa a matriz identidade de orde 3. b) Calcule, se é posible, a inversa da matriz $A-I$. c) Calcula $X=(A^2-B)\cdot(A-I)^{-1}$.

a) $A^2-B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $A-I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *c) X=(A²-B) ·(A-I)*$^{-1}$*;* $X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8 **(ABAU Extraordinaria 2022 ADAPTADO) —** Dadas as matrices $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ e $2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

a) Calcule as matrices A e B. b) Calcule $X=(A-I)^{-1}\cdot B$.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ *e* $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ *b) X=(A-I)*$^{-1}$*·B* $X=\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

9 **(ABAU Xuño 2021 ADAPTADO) —** Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix} m & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determine para que valores de m existe a matriz inversa de A.

b) Calcúle $X=(C-B)\cdot A^{-1}$ para m=1.

a) Existe inversa da matriz A para todo m≠0 *b)* $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *;* $X=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

10 **(ABAU Xuño 2020 ADAPTADO) —** Consideramos as matrices $A=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule as matrices $A+B$ e $3C-B$

b) Expese en forma matricial o sistema de ecuacións que se obtén ó formular A+B = 3C-B ~~e resólvao~~.

a) $A+B=\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $3C-B=\begin{pmatrix} 3c-b & b-9 & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ *a=-3; b =3; c=1*