

1 - Definición e clasificación de matrices

Unha **matriz** é un conxunto de números reais ordenados en filas e columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A \text{ é unha matriz de dimensión } \mathbf{m \times n} \text{ porque ten } \mathbf{m} \text{ filas e } \mathbf{n} \text{ columnas. } a_{ij} \text{ é o elemento que está na fila } \mathbf{i}, \text{ columna } \mathbf{j}, \text{ e } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Exemplo: A é unha matriz de dimensión 4×3 .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{onde } \begin{matrix} a_{11}=3, & a_{12}=5, & a_{13}=6, \\ a_{21}=3, & a_{22}=0, & a_{23}=1 \end{matrix}$$

Chámase **matriz trasposta** de A á matriz que se obtén ao cambiar as filas polas columnas na matriz A . Denótase por A^t

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad A^t \text{ é unha matriz } 3 \times 4, \text{ onde } a_{ij}^t = a_{ji}$$

Chámase **matriz fila** ou **vector fila** a unha matriz de dimensión $1 \times n$. Por exemplo: $(3 \ 0 \ 1) = (3,0,1)$

Chámase **matriz columna** ou **vector columna** a unha matriz de dimensión $n \times 1$. Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Chámase **matriz cadrada** a unha matriz co mesmo número de filas que de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{é unha matriz cadrada de orden } 3. \\ \text{Chámase } \mathbf{diagonal principal} \text{ dunha matriz cadrada ao conxunto de elementos da} \\ \text{forma } a_{ii}. \text{ Neste exemplo a diagonal principal é } \left(0, -\frac{3}{2}, -1\right) \end{matrix}$$

Tipos de **matrices cadradas**:

Matriz diagonal: $a_{ij}=0$ se $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

os elementos por debaixo da diagonal son nulos

Matriz triangular inferior

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

os elementos por enriba da diagonal son nulos

Matriz simétrica:

cando é igual á súa trasposta: $a_{ij}=a_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

$a_{ij}=1$ si $i=j$; $a_{ij}=0$ si $i \neq j$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica: cando a súa trasposta é igual á súa oposta: $A^t = -A$

2 - Operacións con matrices.

2.1.- Suma e resta de matrices

◦ Súmase *elemento a elemento*. As matrices teñen que ter o mesmo tamaño.

Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; $A-B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$; Pero $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (6 \ 3 \ 3)$ é imposible

2.2.- Produto dun número por unha matriz

Exemplo: $3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2.3.- Combinación lineal de vectores e produto escalar.

Definimos como **vector** calquera obxecto matemático que se poida **multiplicar por números reais e sumar con elementos semellantes a el.**

Por exemplo, son vectores os polinomios, as ecuacións, as funcións co mesmo dominio, os vectores xeométricos no plano e no espazo, as cantidades e ingredientes dunha receita, un lote de produtos en cantidades variables, o total dunha lista da compra, etc

Dados varios vectores P_1, P_2, P_3 e varios números reais c_1, c_2, c_3 , definimos unha **combinación lineal** como

$A = c_1 \cdot P_1 + c_2 \cdot P_2 + c_3 \cdot P_3 = \sum c_i \cdot P_i$. Chámasele **escalares** as números c_1, c_2, \dots, c_n , porque *cambian a escala (tamaño/cantidad)* dos vectores P_i .

Para entender o contexto dalgúns problemas temos que ver a mestura de produtos como unha combinación lineal.

Á combinación lineal de $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ e $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ tamén se lle chama produto escalar entre P e C, aínda que para definir axeitadamente o produto escalar hai que multiplicar un *vector fila* por un *vector columna*:

$$P \cdot C = (P_1, P_2, P_3) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 \cdot P_1 + c_2 \cdot P_2 + c_3 \cdot P_3$$

As matrices e as súas operacións describen as combinacións lineais de obxectos matemáticos e as súas relacións.

2.4.- Produto de matrices.

Para que dúas matrices A e B poidan multiplicarse, o número de columnas da 1ª matriz ten que coincidir co número de filas da 2ª matriz. O produto de matrices non é conmutativo. Multiplícase “escalarmente” cada fila de A por cada columna de B, para obter o elemento C_{ij} de $A \cdot B$; é dicir:

$$C = A \cdot B \Rightarrow C_{ij} = \text{Fila}_i \cdot \text{Columna}_j = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} \text{ de forma que } (A_{m \times n}) \cdot (B_{n \times p}) = (C_{m \times p})$$

$$\begin{pmatrix} A_{2 \times 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{3 \times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} c_{11} = 1^{\text{ª fila}} \cdot 1^{\text{ª columna}} = -1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = -2 & c_{12} = 1^{\text{ª fila}} \cdot 2^{\text{ª columna}} = -1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 9 \\ c_{21} = 2^{\text{ª fila}} \cdot 1^{\text{ª columna}} = 3 \cdot 4 + (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 7 & c_{22} = 2^{\text{ª fila}} \cdot 2^{\text{ª columna}} = 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = 10 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

En xeral o produto de matrices non é conmutativo, é dicir $A \cdot B \neq B \cdot A$ (aínda que pode haber excepcións)

3 - Determinantes

◦ Dada a matriz cadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, chámase **determinante de A** ao número real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}; \quad \text{Exemplo: } \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) = 10$$

◦ Dada a matriz cadrada de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, chámase **determinante de A** ao número real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Isto pode recordarse *facilmente* usando a **Regra de Sarrus**:

Sumandos sin cambio de signo

Sumandos con cambio de signo

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 0 + (-2) - 4 - 0 - (-9) = 18$$

4 - Matriz inversa

◦ Dada unha matriz cadrada A, chámase **adxunto do elemento** a_{ij} desa matriz, e denótase por $\text{adj}(a) = A_{ij}$, ao número que resulta de **multiplicar** $(-1)^{i+j}$ polo **determinante da matriz cadrada** que se obtén de **eliminar a fila i e a columna j** na matriz A:

Exemplo: os adxuntos dos elementos a_{13} e a_{23} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ son, respectivamente,

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 = 3 \quad ; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 = -2$$

◦ Dada unha matriz cadrada A, chámase **matriz inversa de A**, e denótase por A^{-1} , á matriz que verifica que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Exemplo: A matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ porque

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedemento: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj} A)^t$, ie, a **inversa de A é a matriz de adxuntos trasposta dividida polo determinante**

Corolario: unha matriz cadrada A ten inversa $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Exemplo: calcular a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

1 Calcúlase $|A|$. Se $|A| = 0$, a matriz non ten inversa. Neste caso $|A| = -4$

2 Calcúlase a matriz dos adxuntos de A (son 9 determinantes de orde 2!!) $\text{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -10 & -7 \\ -12 & 4 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3 Traspoñemos a matriz adxunta: 4 Obtemos a matriz inversa dividindo a matriz anterior polo determinante de A:

$$(\text{adj} A)^t = \begin{pmatrix} 23 & -12 & 7 \\ -10 & 4 & -2 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj } A)^t = \begin{pmatrix} -\frac{23}{4} & 3 & -\frac{7}{4} \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

5 - Rango dunha matriz

5.1.- Menor de orde r

◦ Chámase **menor de orde r** dunha matriz ao determinante dunha **submatriz cadrada de orde r** de esa matriz.

Exemplo: Dada a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, un posible menor de orde 2 é $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$.

Outro menor de orde 2 é, por exemplo, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$. Esta matriz ten moitos menores diferentes de orde 2, e 4 de orde 3

Un menor de orde 3 é, por exemplo, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 13$

5.2.- Rango dunha matriz

◦ O **rango dunha matriz** é a maior orde dos seus menores non nulos:

- calquera matriz $A \neq 0$ é, como mínimo, de rango 1
- buscamos se hai menores de orde 2 non nulos; se hai algún, como mínimo o rango é 2
- buscamos se hai menores de orde 3 non nulos; se hai algún, como mínimo o rango é 3; etc
- se $\text{Dim}(A) = m \times n$ con $m < n$, entón o rango máximo é m

Exemplo: Calcular o rango da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [Como $\text{dim}(A) = 4 \times 3$, o rango máximo é 3]

1 Buscamos un menor de orde 2 cuxo valor sexa distinto de cero; se non existe, quere dicir que o rango da matriz é 1

Escollemos, por exemplo, o menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

2 Engadimos a este menor, unha fila e unha columna ata atopar un menor de orde 3 diferente de cero (**orlamos** o menor). Se non hai ningún que sexa distinto de cero, quere dicir que o rango da matriz é 2.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ Como hai un menor de orde 3 non nulo, o rango da matriz A é 3.

6 - Operacións combinadas con matrices. Ecuacións matriciais.

◦ A suma (e resta) de matrices ten as mesmas propiedades que os números reais:

é conmutativa: $X + A = A + X$

é asociativa: $X + (A + B) = (X + A) + B = X + A + B$

◦ O produto **non é conmutativo**, polo que debemos distinguir o caso no que multiplicamos pola esquerda e pola dereita; igualmente debemos considerar esa diferenza cando sacamos factor común. Ademais, o elemento neutro é I:

NON É conmutativo: $X \cdot A \neq A \cdot X \Rightarrow XA + B \neq AX + B$

•Podemos sacar factor común, pero:

$$X \cdot A + A = X \cdot A + I \cdot A = (X + I) \cdot A \text{ (factor común multiplicando pola dereita)}$$

$$A \cdot X + A = A \cdot X + A \cdot I = A \cdot (X + I) \text{ (factor común multiplicando pola esquerda)}$$

6.1.- Resumen de ecuaciones matriciales básicas

◦ Cando manipulamos ecuacións matriciais para despegar unha incógnita, usaremos a técnica da “**mesma operación en ambos membros**”, tendo moito coidado coa multiplicación:

$$X \cdot A = B \xrightarrow{\text{Multiplicación dereita por } A^{-1}} X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \xrightarrow{\text{Reducindo}} X = B \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot X + B = C \xrightarrow{\text{Traspoñemos } -B} A \cdot X = C - B \xrightarrow{\text{Multiplicación esquerda por } A^{-1}} A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \xrightarrow{\text{Reducindo}} X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$A \cdot X - B = X \xrightarrow{\text{Traspoñemos } -B \text{ e } X} A \cdot X - X = B \xrightarrow{\text{Factor común } X \text{ pola dereita}} (A - I) \cdot X = B$$

$$A^t + B \cdot X = 5C \xrightarrow{\text{Traspoñemos } A^t} B \cdot X = 5C - A^t \xrightarrow{\text{Multiplicamos por } B^{-1} \text{ pola esquerda}} B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot [5 \cdot C - A^t]$$

$$A^2 \cdot X + A \cdot B = B \xrightarrow{X=X \cdot I=I \cdot X} A \cdot X + I \cdot X = B \xrightarrow{\text{Factor común pola dereita}} (A + I) \cdot X = B$$

$$AX + X = B \xrightarrow{\text{Factor común pola dereita}} (A + I) \cdot X = B \xrightarrow{\text{Multiplicar por } (A + I)^{-1} \text{ pola esquerda}} (A + I)^{-1} \cdot (A + I) \cdot X = (A + I)^{-1} \cdot B \xrightarrow{\text{Reducir}} X = (A + I)^{-1} \cdot B$$

7 - Sistemas de ecuacións lineais

7.1.- Dependencia e independencia lineal

Unha **combinación lineal** de dous obxectos matemáticos A e B é o resultado de calquera operación $C = x \cdot A + y \cdot B$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Aos obxectos matemáticos susceptibles de formar combinacións lineais se lles chama, en xeral, **vectores**, e ao conxunto de todas as combinacións lineais, **espacio vectorial**.

B é **combinación lineal** de A $\Leftrightarrow B = x \cdot A$ (B é proporcional a A). Diremos que A e B son **linealmente dependentes**.

Exemplo: $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases}$ Como $Ec_2 = -2 \cdot Ec_1$, entón as ecuacións son combinación lineal unha da outra (e o sistema é indeterminado)

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ Como $C_3 = 4 \cdot C_1$, entón as *columnas 1 e 3 son combinación lineal* unha da outra (o determinante da matriz que forman é cero!). Pola contra as *columnas 1 e 2 non son combinación lineal* unha da outra e o seu determinante non é cero.

C é **combinación lineal** de A e B $\Leftrightarrow C = x \cdot A + y \cdot B$. Diremos que A, B e C son **linealmente dependentes**.

En caso contrario, $C = x \cdot A + y \cdot B$ non ten solución e diremos que A, B e C son **linealmente independentes**.

Exemplo: $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2z = 0 \\ 2x - 6y + z = -8 \end{cases}$ Como $Ec_3 = 2 \cdot Ec_1 + \frac{1}{2} Ec_2$, entón as ecuacións son combinación lineal unhas das outras (e o sistema é indeterminado)

7.2.- Forma matricial dun sistema de ecuacións

Usando o produto de matrices podemos reescribir un sistema de ecuacións e poñelo en **forma matricial**:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x & -y & -z \\ 3x & -2y & -2z \\ -5x & 3y & 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B$$

Onde: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ é a **matriz de coeficientes**; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ é a matriz ou **vector de incógnitas** e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ é a matriz

ou **vector de termos independentes**.

É habitual escribir o sistema en forma de matriz ampliada, que permite executar certos cálculos con máis facilidade (por exemplo, o método de Gauss de resolución de sistemas de ecuacións): $(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 2 \\ 3 & -2 & -2 & | & 2 \\ -5 & 3 & 5 & | & -1 \end{pmatrix}$

7.3.- Teorema de Rouché-Frobenius

Clasificamos os sistemas lineais de ecuacións como: **compatible determinado** (CD), cando ten unha solución única; **compatible indeterminado** (CI), cando ten infinitas solucións; **incompatible** se non ten solución.

Un sistema de ecuacións $A \cdot X = B$ é **compatible** $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$

Polo tanto, se $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|B) \Leftrightarrow$ o sistema de ecuacións é **incompatible**

Un sistema de ecuacións con n incógnitas é **compatible determinado** $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = n$

7.4.- Resolución de sistemas de ecuacións:

Temos métodos variados para resolver un sistema de ecuacións lineais:

Matriz inversa: non é práctico pois soe requirir máis operacións que o resto de métodos: $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Método de Gauss: hai que transformar o sistema/matriz en triangular, substituindo ecuacións/filas por combinacións lineais das mesmas e logo despegar as incógnitas.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + 3z = 4 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 2 & -5 & 3 & | & 4 \\ 5 & 1 & 7 & | & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 11 & 2 & | & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + 11F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 13 & | & -26 \end{pmatrix}$$

E agora podemos reconstruír o sistema e resolvelo substituindo en cada ecuación o valor das incógnitas:

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -y + z = -2 \\ 13z = -26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

Podedes ver os detalles neste vídeo de 10 minutos: <https://www.youtube.com/watch?v=sHBlmYy7-0U>.

8 - Apéndice: Propiedades dos determinantes.

Supoñamos que a matriz A está formada por 3 liña (filas ou columnas). Denotamos isto como $A = (C_1 \ C_2 \ C_3)$ (o mesmo para as filas). Entón, o determinante de A cumpre que:

O determinante de A trasposta é igual ao determinante de A	O determinante dunha matriz cunha liña nula ou con dúas liñas repetidas é nulo	Cambiando de orde dúas liñas de A fan cambiar de signo ao determinante
$ A = A^t $	$ C_1 \ C_2 \ \mathbf{0} = C_1 \ C_2 \ C_2 = 0$	$ C_1 \ C_2 \ C_3 = - C_1 \ C_3 \ C_2 $
Determinante do produto matricial	Determinante da matriz inversa	Multiplicar una liña de A por un escalar tamén multiplica ao determinante de A
$ A \cdot B = A \cdot B $	$ A^{-1} = A ^{-1} = \frac{1}{ A }$	$ k \cdot C_1 \ C_2 \ C_3 = k \cdot C_1 \ C_2 \ C_3 = k \cdot A $
Sumar a unha liña outra liña da matriz multiplicada por un k non cambia ao determinante		Se unha liña é suma de dúas liñas, podemos descompoñer o determinante tamén en dúas sumas:
$ C_1 \ C_2 \ C_3 = C_1 \ C_2 \ kC_2 + C_3 $		$ C_1 \ C_2 \ C_3 + C_4 = C_1 \ C_2 \ C_3 + C_1 \ C_2 \ C_4 $