DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Objetivos fundamentales:

1. Identificar experimentos que pueden modelarse mediante la **distribución binomial**, determinando probabilidades de diferentes sucesos.

2. Calcular probabilidades de sucesos asociados a experimentos que pueden modelarse mediante la **distribución normal**.

3. **Aproximación de la binomial por la normal** (se entiende con la corrección de 1/2 punto).

1. XUÑO 2017

En un grupo de 100 personas hay 40 hombres y 60 mujeres. Se eligen al azar 4 personas del grupo, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar más mujeres que hombres?

Supongamos el suceso X = "número de mujeres en un grupo de 4 personas"

$X \in B(4; 0'6) \quad \left[\begin{array}{l} n = 4 \\ p = 0'6 \end{array} \right.$

$$P(X > 2) = P(X=3) + P(X=4) = \underbrace{\binom{4}{3} 0'6^3 \, 0'4^1}_{0'3456} + \underbrace{\binom{4}{4} 0'6^4 \cdot 0'4^0}_{0'1296} = \boxed{0'4752}$$

2. SETEMBRO 2017

El total de ventas diarias en un pequeño restaurante es una variable que sigue una distribución normal de media 1220€ al día y desviación típica 120€ al día.

a) Calcula la probabilidad de que en un día elegido al azar las ventas excedan de 1400€.

b) Si el restaurante debe vender por lo menos 980€ al día para cubrir los gastos, ¿cuál es la probabilidad de que un día elegido al azar, el restaurante no cubra gastos?

Sea X = "Total de ventas diarias" (€) $\quad X \sim N(\overset{\mu}{1220}; \overset{\sigma}{120})$

a)

$$P(X > 1400) = P\left(Z > \frac{1400 - 1220}{120}\right) = P(Z > 1'5) = 1 - P(Z \leq 1'5)$$

$$= 1 - 0'9332 = \boxed{0'0668}$$

Tipificamos

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

b) No cubre gastos $\Rightarrow p(X<980)$

$$p(X<980) = p\left(Z < \frac{980-1220}{120}\right) = p(Z<-2) = p(Z>2) =$$

$$= 1 - \underbrace{p(Z \leq 2)}_{0'9772} = \boxed{0'0228}$$

Tipificamos

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

3. **XUÑO 2018**

a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de contestar bien por lo menos dos preguntas?

b) La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 horas y desviación típica 5 horas. Calcula la probabilidad de que una pila eléctrica de este tipo, elegida al azar, dure menos de 42 horas.

a) Sea X = "Número de respuestas acertadas" $X \sim B(10; 0'25)$

$$P(X \geq 2) = 1 - p(X<2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = \boxed{0'756}$$

$$P(X=0) = \binom{10}{0} 0'25^0 \, 0'75^{10} \qquad P(X=1) = \binom{10}{1} 0'25^1 \cdot 0'75^9$$

b) Sea X = "Duración de las pilas" (en horas).

$$X \sim N(50; 5) \quad \begin{cases} \mu = 50 \\ \sigma = 5 \end{cases}$$

$$P(X<42) = p\left(Z < \frac{42-50}{5}\right) = p(Z<-1'6) = p(Z>1'6) =$$

$$= 1 - p(Z \leq 1'6) = 1 - 0'9452 = \boxed{0'0548}$$

4. SETEMBRO 2018

En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo.

a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de dos veces.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de nueve veces.

Supongamos X = "Número de extracciones saliendo el 7"

a) $\begin{cases} n = 5 \\ p = 0'1 \end{cases} \Rightarrow X \sim B(5; 0'1)$

$$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{5}{0} 0'1^0 \cdot 0'9^5 + \binom{5}{1} 0'1^1 \cdot 0'9^4 =$$

$$= 0'5905 + 0'3281 = \boxed{0'9185}$$

b) $X \sim B(100; 0'1)$

Como $n \cdot p = 10 > 5$, $n \cdot q = 90 > 5$ Aproximación binomial a normal

$\mu = np = 10$

$\sigma = \sqrt{npq} = 3$

De aquí, $X' \sim N(10; 3)$

Tipificamos

$$P(X<9) = P(X' \leq 8'5) = P\left(Z \leq \frac{8'5-10}{3}\right) = P(Z \leq -0'5) =$$

Aplicamos corrección de Yates

$$= P(Z > 0'5) = 1 - P(Z \leq 0'5) = \boxed{0'3085}$$

5. XUÑO 2019

Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

Supongamos X = "Número de personas nacidas en enero"

$X \sim B\left(50; \frac{1}{12}\right)$

$\begin{cases} n = 50 \\ p = 1/12 \end{cases}$

$$P(X \geq 2) = 1 - [\underbrace{P(X=0)}_{0'0129} + \underbrace{P(X=1)}_{0'0586}] = \boxed{0'0715}$$

6. XUÑO 2019

En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25º C y desviación típica 4º C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

X = "Temperatura máxima de un día del mes de julio" → 31 días

$X \sim N(25, 4)$

$$P(21 \le X \le 27'2) = P\left(\frac{21-25}{4} \le Z \le \frac{27'2-25}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 0'55) =$$

$$= P(Z \le 0'55) - P(Z \le -1) = \underbrace{P(Z \le 0'55)}_{0'7088} + \underbrace{P(Z \le 1)}_{0'8413} - 1 = 0'5501$$

17 días

$0'5501 \cdot 31 \simeq 17'05$

7. XULLO 2019

La probabilidad de que un determinado jugador de futbol marque gol desde el punto de penalti es p=0,7. Si lanza cinco penaltis calcula las siguientes probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos dos goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

X = "Número de goles en 5 lanzamientos de penalti"

$\begin{cases} n = 5 \\ p = 0'7 \end{cases}$ $X \sim B(5; 0'7)$

$\boxed{1}$ $P(X=0) = \binom{5}{0} 0'7^0 0'3^5 = \boxed{2'43 \cdot 10^{-3}}$

$\boxed{2}$ $P(X \ge 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = \boxed{0'969}$

$\boxed{3}$ $P(X=5) = \binom{5}{5} 0'7^5 \cdot 0'3^0 = \boxed{0'168}$

Si lanza 2100 penaltis

$X \sim B(2100; 0'7)$

$np = 1470 > 5$
$nq = 630 > 5$ ⇒ Aproximación binomial a normal

$\begin{cases} \mu = np = 1470 \\ \sigma = \sqrt{npq} = 21 \end{cases}$ $X' \sim N(1470; 21)$ ⇒ $P(X \ge 1450) = P(X' \ge 1449'5)$

Corrección de Yates

$$P\left(Z > \frac{1449'5 - 1470}{21}\right) \simeq P(Z > -0'98) = P(Z \le 0'98) = \boxed{0'8365}$$

Tipificamos

8. **XULLO 2019**

Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm. Y desviación típica 0,01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,021 cm.

Sea X = "grosor de las piezas" $X \sim N(8; 0'01)$

$$P(7'98 \le X \le 8'021) = P\left(\frac{7'98-8}{0'01} \le Z \le \frac{8'021-8}{0'01}\right) = P(-2 \le Z \le 2) =$$

$$= P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = 2\underbrace{P(Z \le 2)}_{0'9772} - 1 = \boxed{0'9544}$$

9. **XUÑO 2020**

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

Sea X = "Tiempo, en minutos, para realizar el trabajo"

$X \sim N(20; 4)$

$$P(16 \le X \le 26) = P\left(\frac{16-20}{4} \le Z \le \frac{26-20}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 1'5) =$$

$$P(Z \le 1'5) - P(Z \le -1) = \underbrace{P(Z \le 1'5)}_{0'9332} - [1 - \underbrace{P(Z \le 1)}_{0'8413}] = \boxed{0'7745}$$

10. **XULLO 2020**

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \le 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

a) Sea X = "Número de árboles > 30 años" $X \sim B(40; 0'2)$

$$P(X = 4) = \binom{40}{4} \cdot 0'2^{4} \cdot 0'8^{36} \simeq \boxed{0'0475}$$

b) $X \sim N(15; \sigma)$

$P(X \leq 18) = P\left(Z \leq \frac{18-15}{\sigma}\right) = 0'6915 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0'6915$

Tipificamos

Buscamos en Tabla $N(0;1)$

$Z = 0'5$

De aquí, $0'5 = \frac{3}{\sigma}$ $\boxed{\sigma = 6}$

11. XUÑO 2021

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.

b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

a) Sea X = "Número de personas contagiadas de entre las 8"

$X \sim B(8; 0'1)$

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \underbrace{\binom{8}{0} 0'1^0 \cdot 0'9^8}_{0'43046} + \underbrace{\binom{8}{1} 0'1 \cdot 0'9^7}_{0'38263} + \underbrace{\binom{8}{2} 0'1^2 \cdot 0'9^6}_{0'14880} =$

$\boxed{P(X \leq 2) = 0'9619}$

b) $P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = \boxed{0'1869}$

12. XULLO 2021

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

X = "Grosor en mm de una plancha de acero" $X \sim N(8; 0'5)$

$P(7'6 \leq X \leq 8'2) = P\left(\frac{7'6-8}{0'5} \leq Z \leq \frac{8'2-8}{0'5}\right) = P(-0'8 \leq Z \leq 0'4) =$

Tipificamos

$= P(Z \leq 0'4) - P(Z \leq -0'8) = \underbrace{P(Z \leq 0'4)}_{0'6554} + \underbrace{P(Z \leq 0'8)}_{0'7881} - 1 =$

"Tabla"

$P(7'6 \leq X \leq 8'2) = \boxed{0'4435}$

13. XUÑO 2022

a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0.8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

a) $X \sim N(1;3)$

Tipificamos

$$P(-2 \leq X \leq 7) = P\left(\frac{-2-1}{3} \leq Z \leq \frac{7-1}{3}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) =$$

$$= \underbrace{P(Z \leq 2)}_{0'9772} - [1 - \underbrace{P(Z \leq 1)}_{0'8413}] = \boxed{0'8185}$$

"Tabla"

b) $X \sim N(\mu;4)$

$$P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = P\left(\frac{\mu-\alpha-\mu}{4} \leq Z \leq \frac{\mu+\alpha-\mu}{4}\right) = P\left(-\frac{\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1 = 0'8064$$

$$P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1 + 0'8064}{2} = 0'9032 \xrightarrow[\text{Tabla}]{\text{buscando}} \frac{\alpha}{4} = 1'3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5'2}$$

14. XULLO 2022

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - \alpha < X < 25 + \alpha) = 0.2128$.

a) Sea X = "Número de preguntas acertadas, de entre 60"

$\begin{cases} n = 60 \\ p = 0'25 \end{cases}$ $X \sim B(60; 0'25)$ $\begin{matrix} np = 15 > 5 \\ nq = 45 > 5 \end{matrix}$ → Aproximación binomial a Normal

$\begin{cases} \mu = np = 15 \\ \sigma = \sqrt{npq} = 3'3541 \end{cases}$ $X' \sim N(15; 3'3541)$

$$P(X \geq 16) = P(X' \geq 15'5) = P(Z \geq 0'15) = \boxed{0'44}$$

corrección Yates

b) $X \sim N(25; 2)$

$P(X<24) = P\left(Z < \frac{24-25}{2}\right) = P(Z < -0'5) = 1 - P(Z<0'5) = 0'3085$

$P(25-\alpha < X < 25+\alpha) = 0'2128$ // $P\left(\frac{25-\alpha-25}{2} < Z < \frac{25+\alpha-25}{2}\right) =$

$= P\left(\frac{-\alpha}{2} < Z < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z<\frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z<\frac{-\alpha}{2}\right) = 2P\left(Z<\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

$2P\left(Z<\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0'2128 \rightsquigarrow P\left(Z<\frac{\alpha}{2}\right) = 0'6064 \rightsquigarrow \frac{\alpha}{2} = 0'27 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0'54}$

"Tabla"

15. XUÑO 2023

a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

a) Sea X = "Número de renacuajos que llegan a adultos, de entre 2500"

$X \sim B(2500; 0'02)$ $\left\{\begin{array}{l} np = 50 \\ nq = 2450 \end{array}\right.$ $\to$ Aproximación binomial a Normal $N(50; 7)$

$\mu = np$ $\quad \sigma = \sqrt{npq}$

$P(X \geq 55) = P(X' \geq 54'5) = P\left(Z \geq \frac{54'5-50}{7}\right) = P(Z \geq 0'64) =$

$= 1 - P(Z < 0'64) = 0'2611$

b) Sea X = "Puntuación" $\quad X \sim N(100; 20)$

$P(X \geq x) = 0'05 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{x-100}{20}\right)$ // $P\left(Z < \frac{x-100}{20}\right) = 0'95$

$\frac{x-100}{20} = 1'645 \rightsquigarrow \boxed{x = 132'9}$

buscamos "Tabla"

16. XULLO 2023

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

Sea X = "Tensión arterial sistólica en mmHg" $\quad X \sim N(123'6\,;\,17'8)$

$$p(100 \le X \le 120) = p\left(\frac{100-123'6}{17'8} \le Z \le \frac{120-123'6}{17'8}\right) = p(-1'33 \le Z \le -0'20) =$$

$$= p(Z \le -0'20) - p(Z \le -1'33) = (1 - p(Z \le 0'20)) - (1 - p(Z \le 1'33)) =$$

$$= p(Z \le 1'33) - p(Z \le 0'20) = 0'9082 - 0'5793 = \boxed{0'3289}$$

$$p(X > x) = 0'67$$

$$P\left(Z > \frac{x-123'6}{17'8}\right) = 1 - p\left(Z < \frac{x-123'6}{17'8}\right) = 0'67$$

$$\frac{x-123'6}{17'8} = -0'44 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 115'768}$$

17. XUÑO 2024

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

a) Sea X = "Cantidad de agua que la máquina distribuye en botellas"

$$p(499 < X < 502) = p\left(\frac{499-500}{4} < Z < \frac{502-500}{4}\right) = \qquad X \sim N(500, 4)$$

$$= p(-0'25 < Z < 0'5) = p(Z < 0'5) - p(Z < -0'25) =$$

$$= \underbrace{p(Z < 0'5)}_{0'6915} - [1 - \underbrace{p(Z < 0'25)}_{0'5987}] = \boxed{0'2902}$$

b) $P(X>a) = P\left(Z > \frac{a-500}{4}\right) = 0'975$

$$P\left(Z > \frac{a-500}{4}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{a-500}{4}\right) = 0'975$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-500}{4}\right) = 0'025$$

"Tabla" $\rightarrow \frac{a-500}{4} = -1'96$

$a = 500 - 1'96 \cdot 4$ // $a = 492'16$ mililitros

18. XULLO 2024

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Sea X = "Número de huevos infértiles, de entre los 7"

$X \sim B(7; 0'13)$ $\begin{cases} n = 7 \\ p = 0'13 \end{cases}$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$

$$P(X=0) = \binom{7}{0} 0'13^0 \, 0'87^7 = 0'3773$$

$$P(X=1) = \binom{7}{1} 0'13^1 \, 0'87^6 = 0'3946$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (0'3773 + 0'3946) = \boxed{0'2281}$$

19. XULLO 2024

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas. a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas? b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

Sea X = "Durabilidad, en horas, de un aparato"

$X \sim N(20000; 2500)$

a) $P(X < 17000) = P\left(Z < \frac{17000-20000}{2500}\right) = P(Z < -1'2) = P(Z > 1'2) =$

$= 1 - \underbrace{P(Z \leq 1'2)}_{0'8849} = 0'1151$

b) $P(X > x) = 0'985$

$P(X > x) = P\left(Z > \frac{x-20000}{2500}\right) = P\left(Z < \frac{20000-x}{2500}\right) = 0'985$

buscamos "Tabla"

$\frac{20000-x}{2500} = 2'17$

$\boxed{x = 14575 \text{ horas}}$