1.- Sabiendo que Z es una v.a. que se distribuye según una *N(0,1)*, calcula:

a) $P(Z \leq 1{,}23)$ b) $P(Z \geq 1{,}25)$ c) $P(Z \geq -2{,}3)$ d) $P(Z \leq -0{,}84)$

e) $P(0{,}27 \leq Z \leq 1{,}74)$ f) $P(-1{,}4 \leq Z \leq -0{,}68)$ g) $P(-0{,}95 \leq Z \leq 1{,}16)$ h) $P(Z \leq 5)$

Solución:

a) $P(Z \leq 1{,}23)=0{,}8907$

b) $P(Z \geq 1{,}25)=1- P(Z \leq 1{,}25)=1-0{,}8944=0{,}1056$

c) $P(Z \geq -2{,}3)= P(Z \leq 2{,}3)=0{,}9893$

d) $P(Z \leq -0{,}84)= P(Z \geq 0{,}84)=1- P(Z \leq 0{,}84)=1-0{,}7995=0{,}2005$

e) $P(0{,}27 \leq Z \leq 1{,}74)=P(Z \leq 1{,}74)-P(Z \leq 0{,}27)=0{,}9591-0{,}6064=0{,}3527$

f) $P(-1{,}4 \leq Z \leq -0{,}68)= P(0{,}68 \leq Z \leq 1{,}4)= P(Z \leq 1{,}4)-P(Z \leq 0{,}68)=0{,}9192-0{,}7517=0{,}1675$

g) $P(-0{,}95 \leq Z \leq 1{,}16)= P(Z \leq 1{,}16)-P(Z \leq -0{,}95)= P(Z \leq 1{,}16)-[1-P(Z \leq 0{,}95)]=$
$0{,}8770-[1-0{,}8289]=0{,}8770-0{,}1711=0{,}6059$

h) $P(Z \leq 5)=1$

2.- Si X es una *Normal* de media $\mu=5$ y desviación típica $\sigma=2$, calcula:

a) $P(X \leq 6{,}84)$ b) $P(X \leq -2{,}7)$ c) $P(X \geq 3{,}5)$ d) $P(-2{,}1 \leq X \leq 4{,}5)$

Solución:

a) $P(X \leq 6{,}84) = P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{6{,}84-5}{2}\right) = P(Z \leq 0{,}92) = 0{,}8212 \quad (donde\ Z \to N(0,1))$

b) $P(X \leq -2{,}7) = P\left(\frac{X-5}{2} \leq \frac{-2{,}7-5}{2}\right) = P(Z \leq -3{,}85) = P(Z \geq 3{,}85) =$
$1 - P(Z \leq 3{,}85) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$

c) $P(X \geq 3{,}5) = P\left(\frac{X-5}{2} \geq \frac{3{,}5-5}{2}\right) = P(Z \geq -0{,}75) = P(Z \leq 0{,}75) = 0{,}7734$

d) $P(-2,1 \le X \le 4,5) = P\left(\dfrac{-2,1-5}{2} \le \dfrac{X\text{ -}5}{2} \le \dfrac{4,5-5}{2}\right) = P(-3,55 \le Z \le -0,25) =$

$P(0,25 \le Z \le 3,55) = P(Z \le 3,55) - P(Z \le 0,25) = 0,9998 - 0,5987 = 0,4011$

3.- La duración de los televisores de una determinada marca sigue una distribución normal de media 16 años y desviación típica de 2 años.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un televisor de esta marca dure más de 20 años?

b) ¿Y la de que dure entre 10 y 14 años?

Solución:

Llamaremos X a la v.a. que mide la duración (en años) de esa marca de televisores.

$X \to N(16,2)$

a) $P(X \ge 20) = P\left(\dfrac{X\text{ -}16}{2} \ge \dfrac{20-16}{2}\right) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $P(10 \le X \le 14) = P\left(\dfrac{10-16}{2} \le \dfrac{X\text{ -}16}{2} \le \dfrac{14-16}{2}\right) = P(-3 \le Z \le -1) =$

$P(1 \le Z \le 3) = P(Z \le 3) - P(Z \le 1) = 0,9987 - 0,8413 = 0,1574$

4.- La duración de cierto tipo de bombillas, expresada en horas, sigue una *N(750,175).*

a) ¿Qué % de bombillas durarán entre 400 y 575 horas?

b) En un lote de 1000 bombillas de este tipo, ¿cuántas durarán menos de 330 h?

Solución:

Llamaremos X a la v.a. que mide la duración (en horas) de ese tipo de bombillas.

$X \to N(750,175)$

a) $P(400 \le X \le 575) = P\left(\dfrac{400-750}{175} \le \dfrac{X\text{ -}750}{175} \le \dfrac{575-750}{175}\right) = P(-2 \le Z \le -1) =$

$P(1 \le Z \le 2) = P(Z \le 2) - P(Z \le 1) = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359 = 13,59\%$

b) $P(X \le 330) = P\left(\dfrac{X\text{ -}750}{175} \le \dfrac{330-750}{175}\right) = P(Z \le -2,4) = 1 - P(Z \le 2,4) =$

$1 - 0,9918 = 0,0082 = 0,82\%$

Entonces, cabe esperar que en el lote de 1000 bombillas habrá 8 (0,82% de 1000=8,2) que duren menos de 330 h.

5.- Un fabricante observa que la demanda diaria de su producto, expresada en unidades, sigue una *N(150,25).*

a) Si tiene almacenadas 165 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que no pueda atender toda la demanda?

b) Si desea que la probabilidad de quedarse algún día sin existencias sea, como máximo, 0,002, ¿cuántas unidades ha de tener almacenadas?

Solución:

Llamaremos X a la v.a. que mide la demanda (en unidades) diaria de dicho producto.

$X \rightarrow N(150,25)$

a) $P(X \geq 166) = P\left(\frac{X\text{-}150}{25} \geq \frac{166-150}{25}\right) = P(Z \geq 0,64) = 1 - P(Z \leq 0,64) = 1 - 0,7389 = 0,2611$

b) $P(X \geq a) = 0,002 \Rightarrow P\left(\frac{X\text{-}150}{25} \geq \frac{a-150}{25}\right) = 0,002 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-150}{25}\right) = 0,002$

$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-150}{25}\right) = 0,998 \Rightarrow \frac{a-150}{25} = 2,88 \Rightarrow a = 222$

Por lo tanto, si no quiere quedarse sin existencias, ha de tener almacenadas 222 unidades, como mínimo.

6.- En un concurso, los participantes responden a un cuestionario. Se sabe que las puntuaciones que obtienen siguen una *N(100,25).*

a) ¿Qué % de participantes obtienen una puntuación superior a 112?

b) ¿Y entre 100 y 120?

c) Si pasa a la siguiente fase el 25% de los participantes, ¿cuál es la puntuación mínima para poder clasificarse?

Solución:

Llamaremos X a la v.a. que mide la puntuación obtenida por los participantes.

$X \rightarrow N(100,25)$

a) $P(X \geq 112) = P\left(\frac{X\text{-}100}{25} \geq \frac{112-100}{25}\right) = P(Z \geq 0,48) = 1 - P(Z \leq 0,48) =$

$1 - 0,6844 = 0,3156 = 31,56\%$

b) $P(100 \leq X \leq 120) = P\left(\frac{100-100}{25} \leq \frac{X\text{-}100}{25} \leq \frac{120-100}{25}\right) = P(0 \leq Z \leq 0,8) =$

$P(Z \leq 0,8) - P(Z \leq 0) = 0,7881 - 0,5 = 0,2881 = 28,81\%$

c)
$$P(X \geq a) = 0,25 \Rightarrow P\left(\frac{X\text{-}100}{25} \geq \frac{a-100}{25}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-100}{25}\right) = 0,25$$
$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-100}{25}\right) = 0,75 \Rightarrow \frac{a-100}{25} \cong 0,675 \Rightarrow a \cong 116,875$$

O sea, para estar entre el 25% de los mejores hay que sacar 117 puntos como mínimo.

7. Si X es una variable aleatoria de una distribución N(μ, σ), hallar: p(μ−3σ ≤ X ≤ μ+3σ)

Solución:

$$p(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) = p\left(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma} \leq z \leq \frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) =$$
$$p(-3 \leq z \leq 3) = p(z \leq 3) - p(z \leq -3) =$$
$$= p(z \leq 3) - (1 - p(z \leq 3)) =$$
$$= 0.9987 - 1 + 0.9987 = 0.9974$$

⇨ *Aproximadamente el 99.74% de los valores de X están a menos de tres desviaciones típicas de la media.*

8. En una distribución normal de media 4 y desviación típica 2, calcular el valor de a para que:

P(4−a ≤ x ≤ 4+a) = 0.5934

Solución:

$$p\left(\frac{(4-a)-4}{2} \leq z \leq \frac{(4+a)-4}{2}\right) = 0.5934$$
$$p\left(\frac{-a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}\right) = p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) - p\left(z \leq -\frac{a}{2}\right) =$$
$$= p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) - p\left(z \geq \frac{a}{2}\right) = p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) - p\left(1 - p\left(z \leq \frac{a}{2}\right)\right)$$
$$2 \cdot p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) - 1 = 0.5934 \qquad p\left(z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.7969$$
$$\frac{a}{2} = 0.83 \qquad a = 1.66$$

9. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°

Solución:

$$p[21 < X \leq 27] = p\left(\frac{21-23}{5} < Z \leq \frac{27-23}{5}\right) =$$

$$= p(-0.4 < Z \leq 0.8) = p(Z \leq 0.8) - [1 - p(Z \leq 0.4)] =$$

$$= 0.7881 - (1 - 0.6554) = 0.4425$$

Si un mes cuenta con 30 días ➔ 0,4425·30 = 13,275 *13 días*

10. La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, halla cuántos estudiantes pesan:

1 Entre 60 kg y 75 kg
2 Más de 90 kg
3 Menos de 64 kg
4 64 kg
5 64 kg o menos

Solución:

1 Entre 60 kg y 75 kg

$$p[60 < X \leq 75] = p\left(\frac{60-70}{3} < Z \leq \frac{75-70}{3}\right) =$$

$$= p(-3.33 < Z \leq 1.67) = p(Z \leq 1.67) - [1 - p(Z \leq 3.33)] =$$

$$= 0.9525 - (1 - 0.9996) = 0.9521$$

➔ 0,9521·500 = 476,05 *476 estudiantes*

2 Más de 90 kg

$$p(X > 90) = p\left(Z > \frac{90-70}{3}\right) = p(Z > 6.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 6.67) = 1 - 1 = 0$$

Ningún estudiante

3 Menos de 64 kg

$$p(X<64)=p\left(Z<\frac{64-70}{3}\right)=p(Z<-2)=1-p(Z\le 2)=$$

$$=1-0.7772=0.02128$$

➔ *0,02128·500 = 10,64* *11 estudiantes*

4 64 kg

$$p(X=64)=p\left(Z=\frac{64-70}{3}\right)=p(Z=-2)=0$$

Ningún estudiante

5 64 kg o menos

$$p(X\le 64)=p(X<64)=11$$

11. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y desviación típica 36. Se pide:

1 ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

2 Calcula la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas)

3 Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

Solución:

1

$$p(X>72)=p\left(Z>\frac{72-78}{36}\right)=$$

$$=p(Z>-0.16)=p(Z<0.16)=0.5636$$

2

$$p(X\le N)=0.25\Rightarrow p\left(Z\le\frac{N-78}{36}\right)=0.25$$

$$\frac{N-78}{36}<0 \qquad 1-p\left(Z\le-\frac{N-78}{36}\right)=0.25$$

$$p\left(Z\le\frac{-N+78}{36}\right)=0.75\Rightarrow\frac{-N+78}{36}=0.68 \qquad N=54$$

$$p(X > 54+5) = p(X > 59) = p\left(Z > \frac{59-78}{36}\right) =$$

$$p(Z > -0.53) = p(Z < 0.53) = 0.7019 = 70.19\%$$

3

$$p(X > 84) = p\left(Z > \frac{84-78}{36}\right) = p(Z > 0.16) =$$

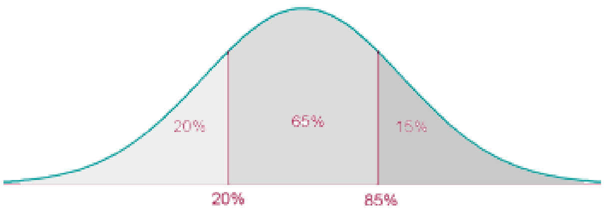
$$= 1 - p(Z < 0.16) = 1 - 0.5636 = 0.4364$$

$$p(x > 84 / x > 72) = \frac{p[x > 84 \cap x > 72]}{p(x > 72)} =$$

$$= \frac{p(x > 84)}{p(x > 72)} = \frac{0.4364}{0.5636} = 0.774$$

12. Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución N(65, 18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?

Solución:



$$p(Z \le z_1) = 0.2 \qquad p(Z \le -z_1) = 0.8$$

$$-z_1 = 0.84 \qquad z = -0.84$$

$$\frac{X_1 - 65}{18} = -0.84 \qquad X_1 = 49.88$$

$$p(Z \le z_2) = 0.2 \qquad z_2 = 1.04$$

$$\frac{X_2 - 65}{18} = 1.04 \qquad X_2 = 83.72$$

Baja cultura hasta 49 puntos.

Cultura aceptable entre 50 y 83.

Excelente cultura a partir de 84 puntos.

13. Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15

1 Determina el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110

2 ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?

3 En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

Solución:

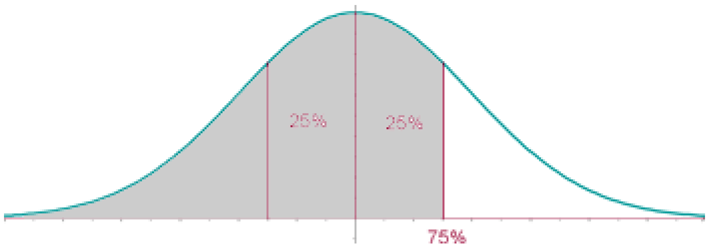
1 Determina el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110

$$p(95 < X \leq 110) = p\left(\frac{95-100}{15} < Z \leq \frac{110-100}{15}\right) =$$

$$= p(0.33 < Z \leq 0.67) = p(Z \leq 0.67) - [1 - p(Z \leq 0.33)] =$$

$$= 0.7486 - (1 - 0.6293) = 0.3779$$

2 ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?



$p = 0.75$ $z = 0.675$

$\frac{X-100}{15} = 0.675$ $X = 110$

$(90, 110)$

3 En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

$$p(X > 125) = p\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = p(Z > 1.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

⇨ *0,0475·2500 = 118,75* *119 individuos*