

U8 - Interpolación Polinómica - TEORÍA

La **interpolación** es una técnica matemática utilizada para estimar valores desconocidos de una función a partir de un conjunto de puntos de datos conocidos. Imagina que tienes varias mediciones de una variable en diferentes momentos, pero te gustaría conocer el valor de esa variable en un momento intermedio. La interpolación te ayuda a calcular esos valores desconocidos de manera precisa, sin necesidad de tener la ecuación de la función.

¿Para qué sirve la interpolación?

- **Predicción de datos:** Si tenemos un conjunto de datos y queremos predecir un valor intermedio o desconocido.
- **Análisis de datos experimentales:** Si realizamos un experimento y no podemos medir en todos los puntos, la interpolación nos permite estimar los valores entre las mediciones.
- **Reconstrucción de funciones:** En situaciones donde no tenemos una función explícita, pero sí varios puntos de datos, la interpolación puede ayudarnos a aproximar la función.

Ahora bien, existen varios métodos para realizar interpolación. Los más comunes que veremos son la **Interpolación Lineal**, el **Polinomio de Interpolación de Newton**, el **Polinomio de Interpolación de Lagrange** y el **Polinomio de Interpolación de Taylor**.

1 - INTERPOLACIÓN LINEAL

La **Interpolación Lineal** es el método más sencillo. Se utiliza cuando tenemos dos puntos conocidos de una función, $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$, y queremos estimar el valor de la función en un punto x que se encuentra entre estos dos.

La fórmula general de la interpolación lineal es: $f(x) \approx y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$

Explicación: La idea es tomar los dos puntos y dibujar una línea recta entre ellos. Luego, usamos la ecuación de la recta para calcular el valor y en el punto x .

Ejemplo: Obtén el polinomio interpolatorio de grado 1, que pase por los puntos (1,2) y (2,3)

$$f(x) \approx y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) = 2 + \frac{3-2}{2-1}(x-1) = 2+1 \cdot (x-1) = x+1$$

Por lo tanto el polinomio de interpolación es $f(x) = x+1$

Ejemplo: Dados los puntos (1,2) y (4,10), obtén el polinomio interpolatorio de grado uno, y empléalo para estimar el valor de y en $x=3$.

Primero vamos a calcular el polinomio de interpolación

La fórmula de la interpolación lineal es: $f(x) \approx y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) = 2 + \frac{10-2}{4-1}(x-1)$

$$f(x) = 2 + \frac{8}{3} \cdot (x-1) = \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$f(3) = \frac{8}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} = 7,33$$

Por lo tanto, el valor estimado de $f(3)$ es aproximadamente **7.33**.

2 - POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON

Queremos encontrar un polinomio de grado n que pase por los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ para ello vamos a calcular **polinomio de interpolación de Newton**, es un método para encontrar el polinomio de interpolación que pasa por un conjunto dado de puntos.

Polinomio de interpolación de Newton de grado 1:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

Polinomio de interpolación de Newton de grado 2:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

Polinomio de interpolación de Newton de grado 3:

$$P_3(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \frac{y_3 - P_2(x_3)}{(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Polinomio de interpolación de Newton de grado n :

$$P_n(x) = y_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

$$\text{con } a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} \text{ y } a_i = \frac{(y_i - P_{i-1}(x_i))}{((x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}))} \text{ para } i=2, 3, \dots, n$$

Ejemplo: Encuentra el polinomio de interpolación de Newton de grado 2 para los puntos: $P_0(0,1)$, $P_1(1,2)$, y $P_2(3,3)$.

$$x_0=0 \quad y_0=1 \quad x_1=1 \quad y_1=2 \quad x_2=3 \quad y_2=3$$

$$\text{Vamos a necesitar esta fórmula: } P_2(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

- Para ello primero tenemos que calcular P_1

$$P_1(x) = 1 + \frac{(2-1)}{(1-0)}(x-0) = 1 + 1(x-0) = x + 1$$

- Ahora calculamos $P_1(x_2)$

$$P_1(3) = 4$$

- Ya tenemos todo lo necesario para nuestra fórmula:

$$P_2(x) = 1 + \frac{(2-1)}{(1-0)}(x-0) + \frac{3-4}{(3-0) \cdot (3-1)} \cdot (x-0) \cdot (x-1)$$

$$P_2(x) = 1 + 1 \cdot (x-0) - \frac{1}{6} \cdot (x-0) \cdot (x-1)$$

$$\text{Operando, el polinomio de interpolación de Newton es: } P_2(x) = 1 + \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^2$$

3 - POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Queremos encontrar un polinomio de grado n que pase por los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, para ello vamos a calcular el **polinomio de interpolación de Lagrange**, es otra forma de obtener un

polinomio que pase por todos los puntos. Su ventaja es que no requiere el cálculo de los polinomios de orden inferior.

Polinomio de interpolación de Lagrange de grado 1:

$$P_1(x) = \frac{y_0}{x_0 - x_1} \cdot (x - x_1) + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Polinomio de interpolación de Lagrange de grado 2:

$$P_2(x) = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_2) + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

Polinomio de interpolación de Lagrange de grado 3:

$$P_2(x) = b_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) + b_1 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) + b_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_3) + b_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$b_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \quad b_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$b_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \quad b_3 = \frac{y_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Polinomio de interpolación de Lagrange de grado n:

$$P_n(x) = b_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + b_1 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + \dots + b_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

$$\text{con } b_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}$$

Ejemplo: Encuentra el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 2 para los puntos: $P_0(0,1)$, $P_1(1,2)$, y $P_2(3,3)$.

$$x_0=0 \quad y_0=1 \quad x_1=1 \quad y_1=2 \quad x_2=3 \quad y_2=3$$

Vamos a necesitar esta fórmula:

$$P_2(x) = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_2) + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

Vamos a ir calculando primero cada b de la fórmula general

$$b_0 = \frac{1}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3} \quad b_1 = \frac{2}{(1-0)(1-3)} \cdot (x-0) \cdot (x-3) = -1 \quad b_2 = \frac{3}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{2}$$

Sustituimos en nuestra fórmula y obtenemos

$$P_2(x) = \frac{1}{3} \cdot (x-1) \cdot (x-3) - 1 \cdot (x-0) \cdot (x-3) + \frac{1}{2} \cdot (x-0) \cdot (x-1)$$

Operando, el polinomio de interpolación de Lagrange es: $P_2(x) = 1 + \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}x^2$

4 - POLINOMIO DE TAYLOR

El **polinomio de Taylor** es útil cuando tenemos información sobre la función y sus derivadas en un punto específico. Los polinomios de Taylor proporcionan aproximaciones de una función para un valor puntual, mientras que los polinomios de interpolación sirven para encontrar la función que pase por los puntos dados en un intervalo.

Polinomio de Taylor de grado 1 para f en el punto a:

$$T_{1,a} = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Polinomio de Taylor de grado 2 para f en el punto a:

$$T_{2,a} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2$$

Polinomio de Taylor de grado 3 para f en el punto a:

$$T_{3,a} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3$$

Polinomio de Taylor de grado n para f en el punto a:

$$T_{n,a} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

$$\text{Llamaremos: } a_0 = f(a) \quad a_1 = f'(a) \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Ejemplo: Obtener el polinomio de Taylor de grado 4 de la función exponencial en el punto $a=0$. Usar este polinomio para aproximar el valor de $x=1$.

$$a=0$$

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x \quad f'''(x) = e^x \quad f^{IV}(x) = e^x$$

- Primero calculamos a_0 , a_1 , a_2 , a_3 y a_4

$$a_0 = f(0) = e^0 = 1 \quad a_1 = f'(0) = e^0 = 1 \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{e^0}{6} = \frac{1}{6} \quad a_4 = \frac{f^{IV}(0)}{4!} = \frac{e^0}{24} = \frac{1}{24}$$

- Calculamos ahora el polinomio de interpolación de Taylor:

$$T_{n,a} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \frac{f^{IV}(a)}{4!} \cdot (x-a)^4$$

$$T_{4,0} = 1 + 1(x-0) + \frac{1}{2} \cdot (x-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (x-0)^3 + \frac{1}{24} \cdot (x-0)^4$$

El polinomio de Taylor de grado 4 es: $T_{4,0} = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4$

- Usamos el polinomio de Taylor para obtener una aproximación de $x=1$

$$T_{1,0} = 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 1^3 + \frac{1}{24} \cdot 1^4 = 2,7083$$