

UNIDAD 6: GRAFOS

1. GRAFOS

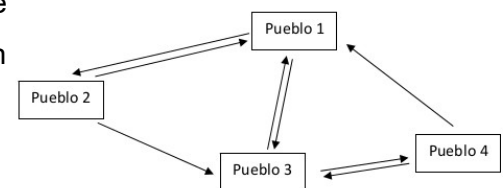
1. 1.- Aplicación cotidiana de la teoría de grafos

Los **grafos** resultan de gran utilidad a la hora de afrontar problemas cotidianos, pues nos permiten organizar la información que disponemos en tablas de forma esquemática.

Por ejemplo: Existen 4 pueblos situados en algún lugar de la geografía española. Dichos pueblos permanecen comunicados entre sí por una red de carreteras, algunas de un solo sentido, y otras de doble sentido, tal y como se recoge en la siguiente tabla:

	Pueblo 1	Pueblo 2	Pueblo 3	Pueblo 4
Pueblo 1	NO	SÍ	SÍ	SÍ
Pueblo 2	SÍ	NO	NO	NO
Pueblo 3	SÍ	SÍ	NO	SÍ
Pueblo 4	NO	NO	SÍ	NO

Donde hemos escrito «SÍ» si existe carretera directa que comunique dichos pueblos, y «NO» en caso contrario. Vemos que la información recopilada en la tabla la podemos representar de la siguiente forma:



Este **esquema recibe el nombre de grafo**, y resulta muy conveniente porque nos permite visualizar la misma información que queda recopilada en la tabla pero de forma más sencilla, y nos resulta más conveniente a la hora de extraer conclusiones.

En la vida cotidiana hacemos uso de los grafos sin darnos cuenta; por ejemplo en las redes sociales. ¿Nunca has mirado entre tus seguidores de Instagram quién te seguía de vuelta o quién seguía a tus amigos o dejaba de seguir a otro usuario?

Las aplicaciones de la **Teoría de Grafos** son muchísimas: conocer la localización óptima donde se pueden construir infraestructuras públicas, conocer el camino óptimo que puede seguir un camión de reparto entre distintas ciudades para reducir el gasto de combustible, organización del tráfico aéreo, organizando los vuelos de diferentes compañías entre las distintas ciudades, etc.

1. 2.- Definición formal de grafos

En Matemáticas y Ciencias de la computación se llama grafo al conjunto de vértices o nodos unidos por aristas o arcos que representan una relación entre los elementos de un conjunto.

Notación:

Dado un grafo $G (V , E)$, llamamos V al conjunto de vértices o nodos y E al conjunto de pares no ordenados de vértices, o, simplemente, al conjunto de aristas.

Nótese que $V \neq \Phi$, aunque sí se puede dar el caso de que E sea el conjunto vacío (si no existen conexiones entre los elementos sometidos a estudio; se llama **grafo vacío**).

Así por ejemplo, si volvemos al problema inicial sobre los cuatro pueblos que se encontraban conectados entre sí por diferentes carreteras, podemos distinguir en el grafo que hicimos los siguientes elementos:

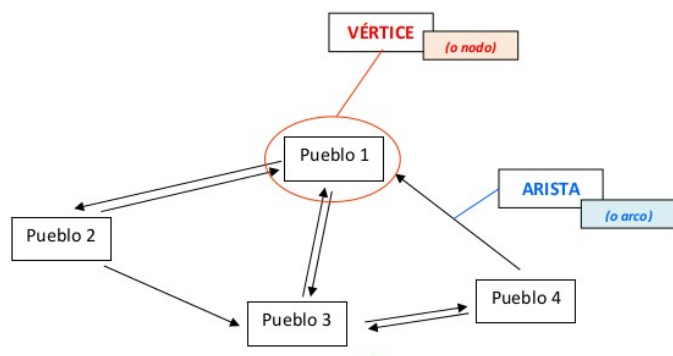
Luego el conjunto de vértices de este grafo estará formado por el conjunto de todos los pueblos:

$V = \{ \text{Pueblo1, Pueblo2, Pueblo3, Pueblo4} \}$

Y al conjunto de aristas o arcos lo escribiremos así:

$E = \{ (\text{Pueblo1, Pueblo2}), (\text{Pueblo1, Pueblo3}),$
 $(\text{Pueblo2, Pueblo1}), (\text{Pueblo2, Pueblo3}),$
 $(\text{Pueblo3, Pueblo4}), (\text{Pueblo4, Pueblo1}),$
 $(\text{Pueblo4, Pueblo3}) \}$

Importante: Si un vértice no recibe o emite ninguna arista o arco, lo llamamos **vértice aislado**.



Dados los vértices v_1 y v_2 , representamos la relación existente entre ellos a través de una arista o un arco. De esta forma, **diferenciamos entre arista y arco** argumentando que **un arco es una arista orientada**. Abundaremos en la orientación de las aristas en el punto 2, cuando estudiemos el **grafo orientado**.

2. TIPOS DE GRAFOS

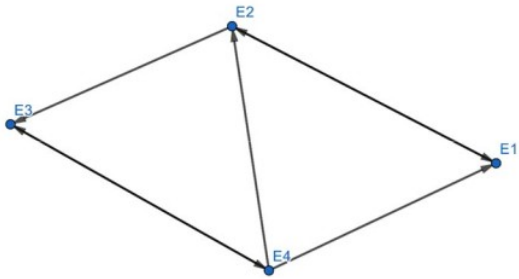
2. 1.- Grafos dirigidos

Un **grafo dirigido** es aquel que **tiene en consideración la dirección de la relación existente entre los vértices o nodos**.

Ejemplo:

El metro de una determinada ciudad tiene una línea de sentido único desde la estación E1 hasta la estación E2. Desde dicha estación salen dos líneas de sentido único, también: una hacia la estación E3 y otra hasta la estación E4, que conecta únicamente con la estación E1, de sentido único. La E4 conecta con todas las anteriores también en sentido único.

Si representamos el grafo correspondiente al enunciado, obtendremos la siguiente figura.



Que haya aristas con **doble sentido** indica que entre ambas estaciones hay dos líneas diferentes y cada una circula en una dirección.

Como vemos, damos la dirección asignada por el enunciado a cada arista, en función del sentido de la línea. A partir de este ejemplo, podemos llegar a una conclusión muy importante:

“En un grafo dirigido, se debe tener en cuenta la dirección de la relación entre los nodos, por lo que dado un arco que une los vértices v_1 y v_2 , diremos, de forma general que $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$, puesto que (v_1, v_2) indica que v_1 conecta con v_2 en el sentido v_1 hacia v_2 , mientras que (v_2, v_1) indica la misma conexión pero en sentido opuesto: v_2 hacia v_1 ”.

2. 1.1.- Tipos de relaciones en un grafo dirigido

ARCO	Relación que indica dirección. Entre dos vértices puede existir más de un arco.
CAMINO	<p>Como su nombre indica, es el <i>camino</i> o <i>ruta</i> que debemos seguir para llegar de un vértice origen a un vértice extremo. Al camino lo representamos por la letra griega γ, y entre paréntesis escribimos los vértices por los que pasamos: $\gamma(v_i, v_j, \dots)$</p> <p>Luego, dado un camino que tiene como inicio al vértice v_0 y final al vértice v_f, escribiremos: $\gamma(v_0, v_f) = \gamma(v_0, v_i, v_j, \dots, v_f)$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Camino elemental: Es aquel camino que no pasa más de una vez por un mismo vértice. • Camino compuesto: Es aquel camino que pasa más de una vez por un mismo vértice. • Ciclo (o circuito): Es aquel camino que vuelve a su punto de origen. Cualquier punto de un ciclo puede ser punto de salida (y a su vez de llegada). • Diferenciamos entre ciclos (o circuitos) elementales, si solo pasa una vez por un mismo vértice, o ciclos (o circuitos) compuestos, en caso contrario.
BUCLE	Es la conexión de un vértice consigo mismo.

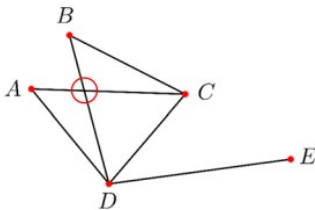
Grado de un nodo en un grafo dirigido

- **Grado de recepción un vértice o nodo:** Llamamos grado de recepción de un vértice o nodo y denotamos por $Gr(v_i)$, donde v_i es el vértice de interés, al número de arcos que recibe v_i .
- **Grado de emisión de un vértice o nodo:** Llamamos grado de emisión de un vértice o nodo y denotamos por $Gr_E(v_i)$, donde v_i es el vértice de interés, al número de arcos que emite v_i . Los **vértices** cuyo **grado de emisión es mayor que 1** se llaman **ramificaciones**.

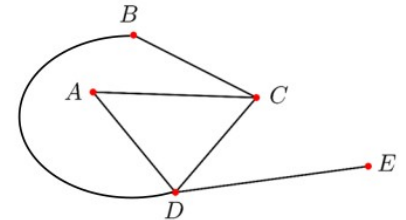
2. 2.- Grafos planos

Denominamos **grafo plano** a aquel grafo cuyas **aristas solo se cortan en los puntos que representan a los vértices**.

Por ejemplo:

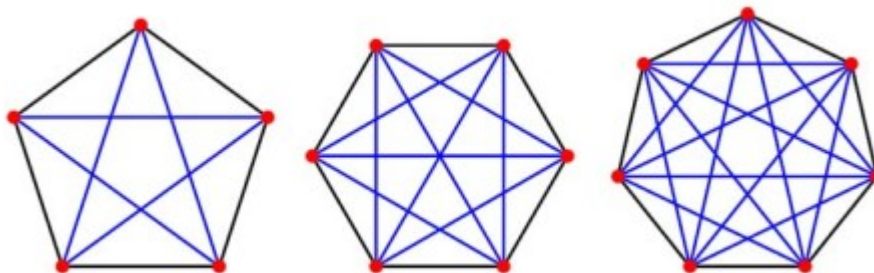


Fíjate cómo podemos rediseñar este grafo y convertirlo en un grafo plano, de forma que sus aristas no se intersequen:



Si un grafo que **aparentemente no es plano** logramos representarlo en un plano de forma que ninguna arista se cruce, entonces diremos que el grafo en cuestión **sí es plano**.

Ejemplos de grafos no planos serían los siguientes:



2. 3.- Grafos ponderados

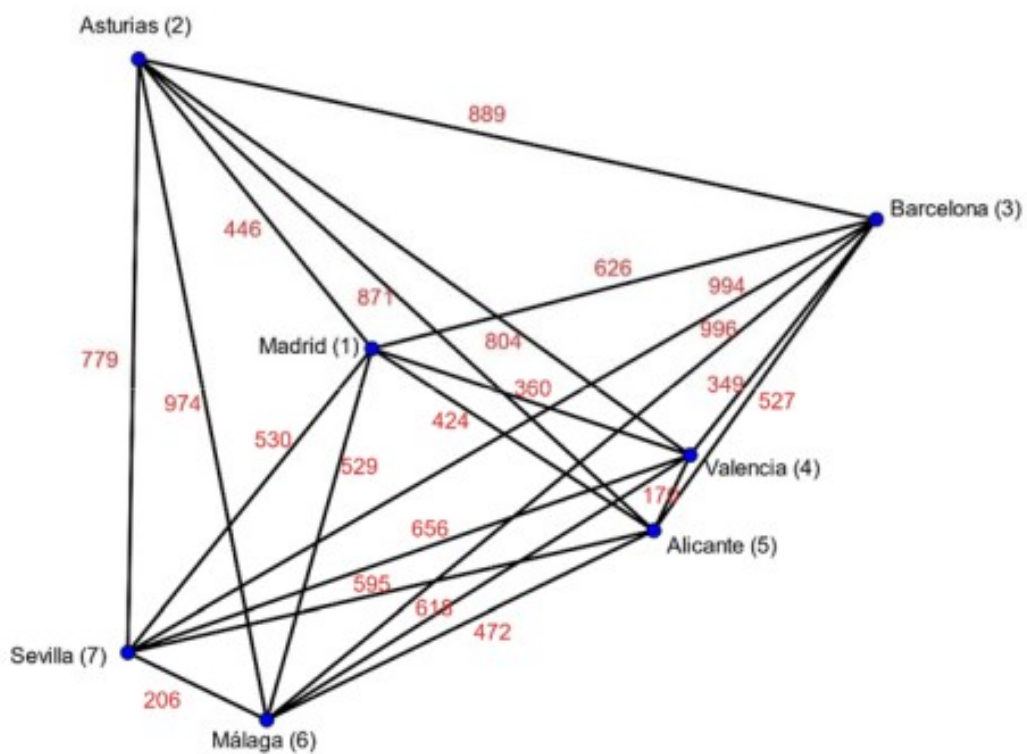
Denominamos **grafo ponderado** a aquellos grafos donde **las aristas** están acompañadas de **un valor numérico** que recibe el nombre de **peso o coste** que denotamos por **$p(v_i, v_j)$** siendo v_i y v_j , los vértices de la arista.

Ejemplo:

Queremos hacer un viaje por la geografía española visitando las ciudades de Málaga, Madrid, Barcelona, Valencia, Sevilla, Alicante y Asturias. Hemos consultado en Google Maps la longitud, en km, de cada trayecto, y las hemos recopilado en la siguiente tabla:

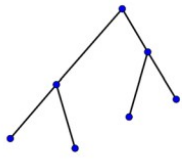
	Málaga	Madrid	Barcelona	Valencia	Sevilla	Alicante	Asturias
Málaga	0	529	996	618	206	472	974
Madrid	529	0	626	360	530	424	446
Barcelona	996	626	0	349	994	527	889
Valencia	618	360	349	0	656	170	804
Sevilla	206	530	994	656	0	595	779
Alicante	472	424	527	170	595	0	871
Asturias	974	446	889	804	779	871	0

Decidimos hacer un **grafo ponderado** con esta información, de manera que al lado de cada arista colocamos la distancia que separa a las ciudades que forman la arista:

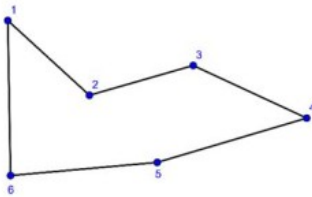


2. 4.- Árboles

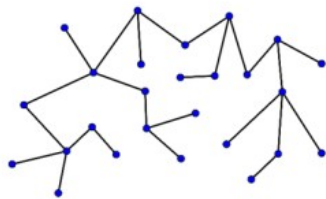
Llamamos **árbol** a aquel grafo que es **acíclico** y además, **cada par de vértices del árbol** debe estar conectado por **exactamente un camino**.



Fíjate como **este grafo es un árbol**, puesto que todos los vértices están conectados por al menos un camino y, además, es acíclico (no contiene ciclos).



Por el contrario, nota como este otro grafo no es un árbol, porque pese a que todos sus vértices estén conectados por un camino, el grafo presenta un ciclo.



Sí se trata de un árbol. No está tan “claro” como el anterior, pero observa como no existe ningún ciclo, tomes el camino que tomes, nunca vuelves al punto de partida.

3. GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

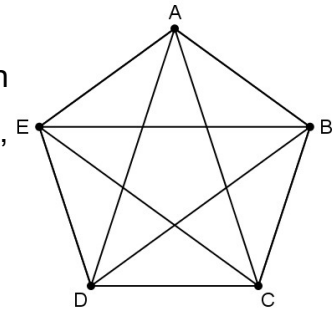
3. 1.- Grafos eulerianos

Grafo conexo: decimos que un **grafo es conexo** si en él **existe al menos un camino entre cualquier par de vértices** (es posible ir desde cualquier vértice hasta cualquier vértice por lo menos por un camino)

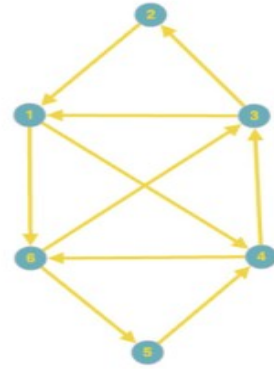
Ciclo euleriano: recibe el nombre de ciclo euleriano (nombrado así en honor a Leonhard Euler), aquel **ciclo o circuito** que recorre **todas las aristas del grafo una única vez y regresa al punto inicial**. Definimos como **grafo euleriano al grafo que contiene un ciclo euleriano**. Es decir, se puede partir de cualquier vértice y volver a él tras pasar por todas las aristas exactamente una vez.

Sea un grafo no dirigido y conexo, se verifica que:

- Si el grado de cada vértice es par, el grafo tomado en consideración contiene un ciclo euleriano y, por tanto, es un grafo euleriano.



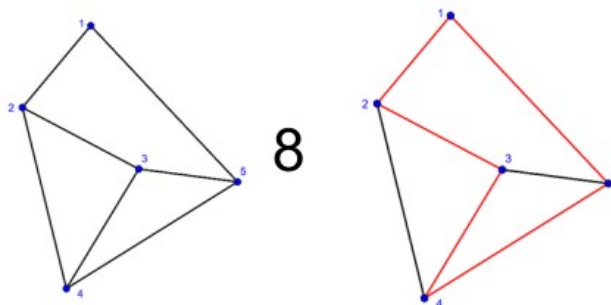
Dado un grafo dirigido y conexo, decimos que es euleriano si el grado interno de sus vértices es igual al grado externo.



3. 2.- Grafos hamiltonianos

Ciclo hamiltoniano: recibe el nombre de **ciclo hamiltoniano** (nombrado así en honor al matemático, físico y astrónomo irlandés William R. Hamilton) el **ciclo simple** (solo pasa una vez por cada vértice) que **recorre todos los vértices del grafo**. Definimos como **grafo hamiltoniano al grafo que contiene un ciclo hamiltoniano**.

Fíjate como el siguiente grafo, G , contiene un ciclo hamiltoniano, que se ha señalado en rojo en la figura de al lado.



Como te has podido dar cuenta, los grafos eulerianos y hamiltonianos parecen estar muy relacionados; sin embargo, la relación entre eulerianos y hamiltonianos dependerá del grafo estudiado, no todos los grafos eulerianos son hamiltonianos, ni al revés.