Prueba 5   Tema: Vectores   *Fecha: 20-03-2025*   *Curso / Grupo: 2º BACH B*

NOMBRE:..

1. Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1,2,3)$ $y\,\vec{v} = (2,0,-1)$, así como el punto A(−4, 4, 7)

a) Calcula *a* y *b* para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **[Andalucía 2022]**

2. Dados los puntos A(-2,1,1), B(0,a,-2), C(-1,1,-1) y D(1,3,-3), se pide:

a) Calcula los valores de a ∈ R para que el tetraedro con vértices A, B, C y D tenga volumen 1/3u^2.

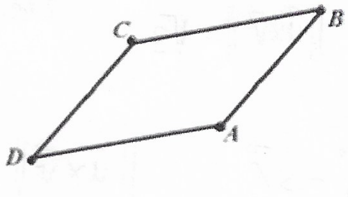
b) Calcular el valor de a ∈ R para que los cuatro puntos sean coplanarios. **[Aragón 2024]**

3. a) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$, $\vec{u}\,x\vec{v}$.

Sabiendo que $\overrightarrow{u x v}$ = (-1,1,1), calcule el volumen del paralelepípedo. **[Aragón 2020]**

b) Calcular un vector perpendicular a $\vec{u} = (1,2,0)$ $y\,\vec{v} = (2,-1,1)$ de módulo $4\sqrt{30}$.

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,3,-2), B(4,3,1) y C(1,0,1) como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D.

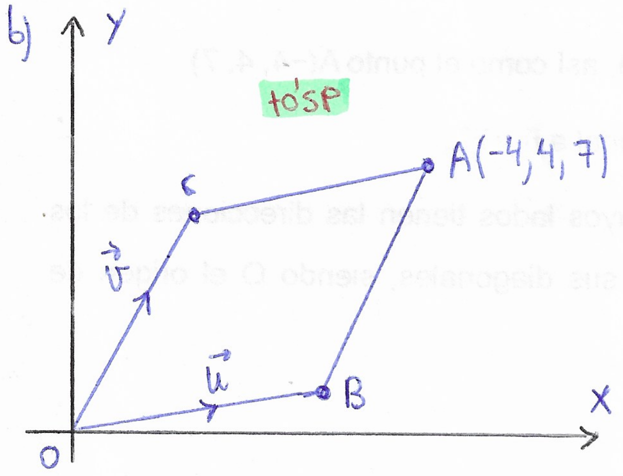
b) Calcule el área del paralelogramo. **[Extremadura 2020]**

(1) **1** $\vec{u}=(-1,2,3)$ a) $\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (-1,2,3)\cdot(1,a,b)=0$ // $-1+2a+3b=0$

a) $\vec{v}=(2,0,-1)$ $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (2,0,-1)\cdot(1,a,b)=0$ // $2-b=0$ $\boxed{a=\frac{-5}{2}}$ $\boxed{b=2}$

0'5p   0'5p

(2) b)



0'5p

$\vec{OC}+\vec{CA}=\vec{OA}$ $\beta=-1$

$\underbrace{\vec{CA}}_{\vec{OB}}$ 0'5p

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{OA}$ $\begin{cases}-\alpha+2\beta=-4\\ 2\alpha=4\\ 3\alpha-\beta=7\end{cases}$ $\alpha=2$

$\vec{OC}=\beta\vec{v} \rightsquigarrow C=(-2,0,1)$ 0'5p

$\vec{OB}=\alpha\vec{u} \rightsquigarrow B=(-2,4,6)$ 0'5p

2 $V=\frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right|$ 0'5p

(2'5) a)

$\vec{AB}=B-A=(2,a-1,-3)$

$\vec{AC}=C-A=(1,0,-2)$

$\vec{AD}=D-A=(3,2,-4)$

$\begin{vmatrix}2 & a-1 & -3\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & -4\end{vmatrix}=4-2a$ 0'5p

0'5p

$\frac{1}{6}|4-2a|=\frac{1}{3} \Rightarrow |4-2a|=2$ $4-2a=2$ $\boxed{a=1}$ $4-2a=-2$ $\boxed{a=3}$ 0'5p

0'5p

(1) b) Son coplanarios $\Leftrightarrow [\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]=0 \longrightarrow 4-2a=0$ $\boxed{a=2}$ 0'5p   0'5p

3 a) $V=\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times(\vec{u}\times\vec{v}))\right|=[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}]=[\vec{u}\times\vec{v},\vec{u},\vec{v}]=\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\right|=$

2 veces   0'5p

(2) $=\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2=\boxed{3u^3}$ pues $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{3}$ Fórmula → 0'5p   0'5p

0'5p

b) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{30}$ vector unitario $\left(\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{-1}{\sqrt{30}},\frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$ 0'5p

(1'5) 0'5p

$\vec{w}=4\sqrt{30}\left(\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{-1}{\sqrt{30}},\frac{-5}{\sqrt{30}}\right)=(8,-4,-20)$ 0'5p

Examen 6- 3ª Evaluación   Temas: Geometría   *Fecha: 03-04-2025*   *Curso / Grupo: 2º Bach B*

IES MENDIÑO   *NOMBRE:*...

Se valorará presentación, resolución, simplificación y justificación de todos los pasos. **(2,5 P cada ejercicio)**

1. a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos A(k,3,m), B(2,0,2) y C(k,2,0) estén alineados.

b) Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones

r: $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ y s: $\frac{x}{1}=\frac{y+3}{a+1}=\frac{z+2}{3}$ en función del valor de "a".

Si se cortan para algún valor de "a", calcule el punto de corte.   **[Xuño 2022]**

2. a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta r: $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{-z-3}{-1}$ y pasa por el punto P(0,1,0).   **[Xullo 2022]**

b) Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano π: $3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

3. a) Dado el plano π_1: $3x + a\ y + z = 6$. Calcule "a" para que la recta r que pasa por el punto P = (1,1,2) y es perpendicular a este plano (π_1) sea paralela al plano π_2: $x - y = 3$.   **[Set 2000]**

b) Calcule la distancia del punto P(1,3,1) al plano π': $4x + 2y - 4z = 2$ **[Xuño 2024]**

4. a) Calcule el volumen del tetraedro de vértices el punto P = (1,1,1) y los puntos de corte del plano π : $2x + 3y + z - 12 = 0$ con los ejes coordenados.   **[Xuño 2000]**

b) Calcule el punto de corte del plano π y la recta, perpendicular a π , que pasa por el punto P.

1 a) A, B y C están alineados $\Leftrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC}$ 0'25P

$\vec{AB} = B - A = (2-K, -3, 2-m)$
$\vec{AC} = C - A = (0, -1, -m)$ 0'25P $\dfrac{2-K}{0} = \dfrac{-3}{-1} = \dfrac{2-m}{-m}$ $\begin{cases} 2-K=0 & \boxed{K=2} \\ -3m = 2-m \rightsquigarrow & \boxed{m=-1} \end{cases}$ 0'5P

b) $r: \begin{cases} A(3,0,-1) \\ \vec{v_r} = (2,-1,-2) \end{cases}$ y $s: \begin{cases} B(0,-3,-2) \\ \vec{v_s} = (1, a+1, 3) \end{cases}$ $\vec{v_r} \not\parallel \vec{v_s}$ pues $\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{3}$

No son paralelas ni coincidentes 0'25P

Vamos a ver cuando se cortan o se cruzan

$[\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s}] = 0$ Se cortan

$[\vec{AB}, \vec{v_r}, \vec{v_s}] \neq 0$ Se cruzan

siendo $\vec{AB} = (-3,-3,-1)$ 0'25P

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & a+1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2(a+1) + 6 - 1 - 6(a+1) + 18 = 0 \rightsquigarrow \boxed{a=3}$$

$32 - 8(a+1) = 0$ 0'5P

Si $\boxed{a=3}$ r y s se cortan Si $\boxed{a \neq 3}$ r y s se cruzan

Para $a=3$

$r: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 0 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$

$3+2t = \lambda$
$-t = -3 + 4(3+2t)$
$-t = 9 + 8t$ $t = -1$

Pto de corte $P(1, +1, 1)$ 0'5P

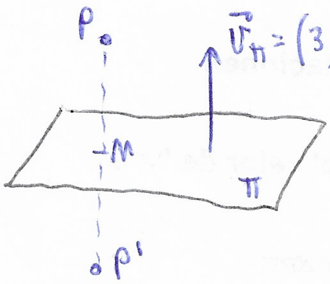
2 $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ $P(0,1,0)$

a) $\begin{cases} A(-1,-2,-3) \\ \vec{v_r} = (3,2,1) \end{cases}$ +0'25P +0'25P +0'5P

$$\begin{array}{c} \\ \vec{AP} \\ \vec{v_r} \end{array} \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x+8(y-1)-7z=0$$

$$\boxed{-3x+8y-7z-8=0}$$

b) $P(11,-14,13)$ $\pi: 3x-8y+7z+8=0$



1) $r: \begin{cases} x = 11+3\lambda \\ y = -14-8\lambda \\ z = 13+7\lambda \end{cases}$ +0'5P

2) $3(11+3\lambda)-8(-14-8\lambda)+7(13+7\lambda)+8=0$

$122\lambda+244=0$ // $\lambda=-2$

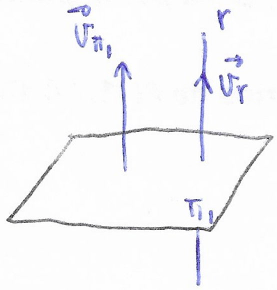
+0'5P

3) $M = \frac{P+P'}{2}$ // $P' = 2M-P$ $M(5,2,-1)$

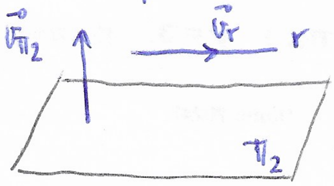
$P' = 2(5,2,-1)-(11,-14,13) = \boxed{(-1,18,-15)}$ +0'5P

3 $\pi_1: 3x+ay+z=6$

a) $r: \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 1+a\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ +0'5P pues $\vec{v}_{\pi_1} = \vec{v}_r$



Como $r \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{v}_{\pi_2} \perp \vec{v_r}$ +0'5P



$\hookrightarrow (1,-1,0)\cdot(3,a,1)=0 \Rightarrow 3-a=0$ $\boxed{a=3}$

+0'5P +0'25P

b) $d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ +0'25P $P(1,3,1)$

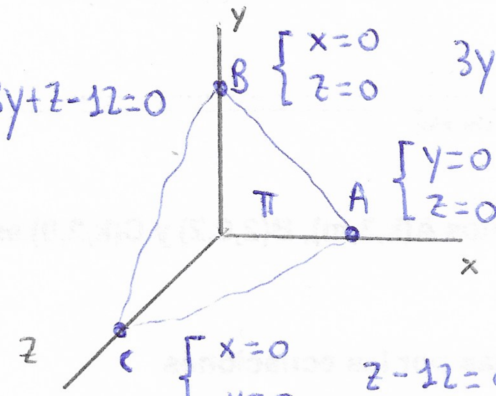
$\pi: 4x+2y-4z-2=0$

$d(P,\pi) = \frac{|4\cdot1+2\cdot3-4\cdot1-2|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}u}$ +0'5P

$\boxed{4}$ $V = \frac{1}{6}[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$ "Volumen tetraedro" +0'25p $P(1,1,1)$

a)

$\pi: 2x+3y+z-12=0$



$B \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $3y-12=0$ $y=4$ $B(0,4,0)$

$A \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $2x-12=0$ $x=6$ $A(6,0,0)$

+0'5p

$C \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $z-12=0$ $z=12$ $C(0,0,12)$

En este caso, $[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}]$

+0'5p

$\vec{PA} = (6,0,0) - (1,1,1) = (5,-1,-1)$

$\vec{PB} = (0,4,0) - (1,1,1) = (-1,3,-1)$

$\vec{PC} = (0,0,12) - (1,1,1) = (-1,-1,11)$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 165-1-1-3-5-11 = 144$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}(144)\,u^3 = \boxed{24\,u^3}$$

b) $r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \rightsquigarrow 2(1+2\lambda)+3(1+3\lambda)+(1+\lambda)-12=0$

+0'25p

$2+4\lambda+3+9\lambda+1+\lambda-12=0$ +0'5p

recta perpendicular a π que pasa por $(1,1,1)$

$14\lambda - 6 = 0$ $\lambda = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

Pto corte

$A\left(1+\frac{6}{7}, 1+\frac{9}{7}, 1+\frac{3}{7}\right)$

+0'25p

$A\left(\frac{13}{7}, \frac{16}{7}, \frac{10}{7}\right)$