

Unidade 5 – Gráficas de Funcións e Cálculo Integral - Exercicios

1 - Integrales inmediatas

1 Obtén a integral indefinida en cada caso:

a) $\int 3 dx = 3x + C$

b) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

c) $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C$

d) $\int 3x^5 dx \Rightarrow F(x) = \frac{x^6}{2} + C$

e) $\int \frac{1}{x^3} dx \Rightarrow F(x) = \frac{1}{-2x^2} + C$

f) $\int \sqrt{x^3} dx \Rightarrow F(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$

g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \Rightarrow 3\sqrt[3]{x} + C$

h) $\int \frac{5}{x^2} dx \Rightarrow F(x) = \frac{-5}{x} + C$

i) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

j) $\int (3x^3 - 5x^2 + 2) dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x + C$

k) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

l) $\int e^t dt = e^t + C$

m) $\int 3500 \cdot 1,05^t dt$

$= \frac{3500}{\ln 1,05} \cdot 1,05^t + C \approx 71736 \cdot 1,05^t + C$

n) $\int 3500 \cdot 1,05^{-t} dt$

$= \frac{-3500}{\ln 1,05} \cdot 1,05^{-t} + C \approx -71736 \cdot 1,05^{-t} + C$

o) $\int (200 + 100e^{-t}) dt$

$= 200t - 100e^{-t} + C$

p) $\int \frac{1}{x-5} dx = \ln|x-5| + C$

q) $\int (2^x + 3^x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

r) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + C$

2 - Problemas de ABAU/PAU de Galicia [2024-2001]

2 **Exemplo 1 2026 – Competencial Análise** — O radon é un gas radioactivo invisible e inodoro, que pode acumularse en interiores de edificios, especialmente en plantas baixas e espazos con pouca ventilación. A exposición durante períodos prolongados de tempo a altas concentracións de radon é perigosa, podendo orixinar cancro de pulmón. Estudos recentes revelan que o risco de cancro aumenta un 16% por cada 100 becquerelios por metro cúbico (Bq/m³). Este risco incrementase en persoas fumadores. É importante medir os niveles de radon nas vivendas e, no caso de ser altos, empregar métodos para baixar o nivel. Para estudar a radioactividade producida polo radon nun edificio histórico, unha profesora de Física realizou medicións con material da Universidade de Santiago de Compostela nas que se empregaron medidas correctoras. Observouse que segue o modelo matemático $R(t) = 200 + k e^{-t}$, sendo t os meses transcorridos e $R(t)$ a cantidade de radon medida en Bq/m³.

a) Calcule o valor de k sabendo que no momento inicial ($t=0$) a cantidade de radon é 300.

b) Represente graficamente a evolución da cantidade de radon co paso do tempo (estude, polo menos, a súa monotonía e a súa tendencia).

c) Determine a cantidade de radon que se acumula dende o primeiro ata o segundo mes $\left(\int_1^2 R(t) dt \right)$.

3 **Exemplo 2 2026 – Competencial Análise** — En outubro de 2025, o IBEX acadou o seu máximo histórico, superando os 16000 puntos. Aínda que inflúen outros factores, a evolución da bolsa está influenciada por cambios políticos, económicos e sociais. Hai períodos de crecemento cando hai confianza ou en momentos de expansión económica. A longo prazo tenden a crecer pero en períodos cortos o seu comportamento pode ser volátil, ás veces por movementos especulativos dos inversores. O valor de cotización das accións dunha empresa en decenas de euros ao longo dos días,

dende que saíu a Bolsa, ven dado pola función $V(t) = \begin{cases} -0,04t^2 + 2,4t & \text{se } 0 \leq t < 40 \\ \frac{40t - 320}{t} & \text{se } t \geq 40 \end{cases}$. Responda estes tres apartados:

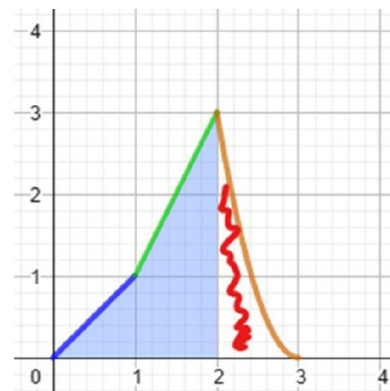
a) Estude se o valor da acción creceu ou decreceu ao longo do tempo. Fundamente a súa resposta.

b) Se unha persoa mercou 15 accións aos 30 días de saír a Bolsa e vendeunas aos 45 días, tivo ganancias ou perdas? A canto ascenderon estas?

c) Se un inversor merca accións aos 30 días de saír a Bolsa e mantenas no tempo, cal sería a ganancia máxima que podería esperar por acción? Fundamente a súa resposta.

4 Exemplo 3 2026 – Competencial Análise — O pasado 2 de setembro, Madrid acolleu o maior campionato de escalada celebrado en España, con máis de 400 participantes. É un deporte con gran expansión polo que tamén aumentan as empresas que venden material para a súa práctica. Segundo os encargados dunha empresa de publicidade, os logotipos relacionados coa escalada deberían transmitir a esencia deste deporte: verticalidade e conexión coa natureza. Por iso mesmo, empregan liñas e formas xeométricas que parecen indicar montañas ou escaladores en movemento. As cores empregadas soen ser azuis, verdes ou tons terra. A representación do logotipo dunha marca de material para practicar escalada é a que se mostra a continuación e a función que o delimita superiormente ten a expresión

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2x - a & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ b(x-3)^2 & \text{se } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



Responda estes dous apartados: a) Calcule os valores de a e b . b) No logotipo orixinal, a proporción da área azul respecto á área total é de $2/3$. Tendo en conta o anterior, poderíase afirmar se o logotipo da figura é orixinal ou unha falsificación?

5 Exemplo 4 2026 – Competencial Análise — O éxito do turismo normalmente é debido á combinación de varios factores: boas infraestruturas, prezos razoables, paisaxes únicos, patrimonio cultural interesantes, gastronomía,... Galicia recolle tódolos factores anteriores polo que converteuse nun destino ideal para descansar e desfrutar. A oferta hoteleira de calidade está a incrementarse nos últimos anos. No mes de outubro de 2025 os hoteis galegos recibiron máis de medio millón de persoas. O hotel de cinco estrelas Miradoiro das Mareas, situado nunha zona turística en auge, ofrece 80 habitacións a un prezo de 450 euros por noite e 500 euros con almuerzo incluído. Durante a tempada de verán, o hotel está cheo todos os días. Responda estes dous apartados:

- a) Exprese mediante unha función a facturación diaria do hotel en temporada estival.
- b) O hotel foi adquirido recentemente por unha gran cadea hoteleira “Hoteles Rincón del Océano”, que non permite a opción de só aloxamento, pero os seus responsables deciden subir o prezo das habitacións con almuerzo. Se por cada 10 euros que aumenta o prezo das habitacións con aloxamento e almuerzo, perde unha reserva deixando de ingresar os cartos desa habitación, canto debería aumentar o prezo para maximizar os ingresos diarios?

6 [2025 Ordinaria P3.1] Dada a seguinte función $B(t) = (4-t)(t-1)^2$; $0 \leq t \leq 4$

- a) 3.1.1. Estude o crecemento e decrecemento da función, e os seus máximos e mínimos, se existen.
- b) 3.1.2. Estude os seus intervalos de concavidade e convexidade e os seus puntos de inflexión, se existen.
- c) 3.1.3. Represente a gráfica da función $B(t)$.

a) $B'(t) = -3t^2 + 12t - 9$; PC en $t=1$ (min r con $B(1)=0$) e $t=3$ (max rel con $B(3)=4$); B é decrecente en $(0,1) \cup (3,4)$ e decrecente en $(1,3)$. Como $B(0)=4$ e $B(4)=0$, B presenta mínimos absolutos en $t=1$ e $0=4$ e máximos absolutos en $t=0$ e $t=3$. b) $B(t) = -6t + 12$ e $t=2$ posible punto de inflexión. B é convexa en $(0,2)$ e cóncava en $(2,4)$. En $t=2$ hai un punto de inflexión. <https://www.geogebra.org/classic/b49xavz6>

7 [2025 Ordinaria P3.2] Dada a función $f(x) = ax^2 + bx - 3$ sendo a, b números reais

- a) 3.2.1. Calcule a e b sabendo que dita función pasa polo punto $(4,5)$ e ten un mínimo en $x=1$.
- b) 3.2.2. Para $a=1$ e $b=-2$, calcule a área limitada por $f(x)$ e a recta $y=x-3$.

a) $f'(x) = 2ax + b$; $a=1$ e $b=-2$. b) Puntos de corte: $x=0$ e $x=3$; $A=9/2$ u² <https://www.geogebra.org/classic/vakjk5ev>

8 [2025 Extraord P3.2] Dada a función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$.

- a) 3.2.1. Realice a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo.
- b) 3.2.2. Calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función f e as rectas $x=1$, $x=2$ e $y=4$.

9 (Ord. 2024 P3) — O número de vehículos vendidos por un concesionario ao longo do último ano estímase que vén dado pola función $N(t) = \begin{cases} 28 - (t-4)^2 & \text{se } 0 \leq t < 6 \\ (t-10)^2 + 8 & \text{se } 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$ onde t é o tempo transcorrido en meses.

- a) Determine os períodos de crecemento e decrecemento do número de vehículos vendidos. Cal foi o maior número de vehículos vendidos? E o menor? En que momentos se produciron? Xustifique as súas respostas.
- b) Coa información do apartado anterior, represente a gráfica da función.
- c) Houbo algún período do ano no que o número de vehículos vendidos fora inferior a 12 unidades? Xustifique a súa resposta.

a) $t=4$ é P.C.N crece en $(0,4)$ e $(6,10)$ Decrece en $(4,6)$ e $(10,12)$. Hai max. rel. en $(4,28)$ e min. rel en $(10,8)$. b) <https://www.geogebra.org/classic/zsjsybfz> c) O número de vehículos vendidos foi inferior a 12 unidades no período que vai dende transcorridos 8 meses ata rematar o ano.

10 (Ord. 2024 P4) — Considérese a seguinte función: $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ onde a, b, c son números reais.

- a) Calcular a, b, c sabendo que a función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ e que ten un extremo relativo en $(0,16)$.
- b) Para $a=b=0$ e $c=16$ calcule a área a rexión limitada pola función e a recta $y=8$.

a) $a = b = 0$ e $c = 16$ b) $A = 64/3 u^2$

11 (Extraord.. 2024 P3) — A función $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c son números reais pasa pola orixe de coordenadas e ten un máximo no punto $P(4, 16)$.

- a) Calcule os valores de a, b, c .
- b) Realice a representación gráfica da función $f(x)$ e determine a área comprendida entre a dita función e o eixe OX.

a) $a=-1$; $b=8$; $c=0$; $f(x)=-x^2+8x$ b) $A=256/3 u^2 \approx 85,33 u^2$.

12 (Extraord.. 2023 P3) — O número de exemplares vendidos dunha revista (en miles de unidades) nos primeiros cinco meses del ano ven dado pola función $N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t-1 & \text{se } 3 < t < 5 \end{cases}$

- a) Estude o crecemento e decrecemento do número de exemplares vendidos. Calcule en que momentos se produciron o máximo e o mínimo número de ventas e a canto ascenderon.
- b) Represente graficamente a función $N(t)$. Calcule a area da rexión delimitada pola gráfica da función $N(t)$, o eixe de abscisas e as rectas $t=0$ e $t=5$.

a) O número de exemplares vendidos crece desde o momento inicial ata transcorrido 1 mes e desde transcorridos 3 meses ata transcorridos 5 meses. O máximo número de ventas prodúcese transcorrido 1 mes e tamén transcorridos 5 meses e ascende a 9000 exemplares. O número mínimo de ventas prodúcese transcorridos 3 meses e é de 5 000 exemplares. b) Área = $38 u^2$

13 (2022 Extraordinaria P4) — Dada a función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - a & \text{se } x > 1 \end{cases}$

- a) Calcule o valor do parámetro a para que a función $f(x)$ sexa continua en todo $\mathbb{R}$.
- b) Para $a=2$ calcule os extremos relativos da función $f(x)$ e represéntea.
- c) Calcule a área da rexión delimitada pola función $f(x)$, para $a=2$, e as rectas $Y=0$, $X=0$ e $X=2$.

a) Se $a=2$ f é continua todo $\mathbb{R}$. b) En $(-\infty,0)$ e $(1,\infty)$ f é crecente e en $(0,1)$ é decrecente. Ten un máximo relativo en $(0,1)$ e un mínimo relativo en $(1,0)$ c) $A=5/3 u^2$

14 (2022 Ordinaria P4) — Dada a función $f(x)=x^3-ax^2+8x$

a) Calcule o valor do parámetro "a" tendo en conta que a función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x=2$.

b) Para $a=6$, calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x)$ e o eixe OX.

a) $a=6$ b) $A=8 u^2$

15 (2021 Ord P3) — Un fabricante de automóbiles fai un estudo sobre os beneficios, en miles de euros, ao longo dos dez últimos anos, e comproba que estes se axustan á función $B(t)=t^3-18t^2+81t-3$ se $0 \leq t \leq 10$, (t en anos). (a) Que beneficios obtivo a empresa o último ano do estudo? (b) Determine os períodos de crecemento e decrecemento dos beneficios. En que anos se producen os beneficios máximos e mínimos e a canto ascenden? (c) Calcule $\int_1^2 B(t)dt$

a) O último ano obtivo 7000 € de beneficio b) Os beneficios aumentan entre o inicio e o terceiro ano $(0,3)$ e entre os anos 9 e 10 $(9,10)$. Diminúen entre o terceiro e noveno ano $(3,9)$. c) $I=80,25$

16 (2020 Ord P4) — Dada a función $f(x)=-4x^2+12x-5$

a) Realice a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo.

b) Calcule a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x)$, o eixe OX e as rectas $x=1$, $x=2$.

a) Corta a OY en $(0,-5)$ e corta a OX en $(1/2,0)$, e $(5/2,0)$. É crecente en $(-\infty,3/2)$ e decrecente en $(3/2, +\infty)$. Ten un máximo en $x_0=3/2$ que vale $y=f(3/2)=4$. b) $A=11/3 u^2$

17 (modelo 2020) — Considerase a función $f(x)=\begin{cases} 9-2x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 9-(x-4)^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

a) Representa a gráfica da función estudando previamente os puntos de corte cos eixes de coordenadas, os intervalos de crecemento e decrecemento, os extremos e concavidade ou convexidade .

b) Calcula de forma exacta a área pechada por dita función e os dous eixes de coordenadas.

18 (2019 Xun B2) — Dada a función $f(x)=x^2-6x+8$ (a) Realiza a súa representación gráfica estudando os seus puntos de corte cos eixes, monotonía e extremo relativo. (b) Calcula a área do recinto limitado pola gráfica da función e os eixes de coordenadas.

a) Dominio de f : todo $\mathbb{R}$. Punto de corte OY en $(0,8)$ e corta a OX en $(4,0)$ e $(2,0)$. En $(-\infty, 3)$ f é decrecente e en $(3, \infty)$ f é crecente. En $x=3$ hai un mínimo relativo. $(3, -1)$ é o punto mínimo. b) $A=8 u^2$

19 (2019 Xull B2) — Considera a función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 7-x & \text{se } 4 < x \leq 7 \end{cases}$ (a) Representa a función estudando os seus

puntos de corte cos eixes, monotonía e extremos relativos. ¿Para que valores de x é $f(x) \geq 0$? (b) Calcula a área do recinto limitado polos eixes e a parte da función tal que $f(x) \geq 0$

a) Dominio de f : $(0,4] \cup (4,7]$. Punto de corte con OY en $(0,3)$ e corta a OX en $(7,0)$. En $(0, 2)$ f é decrecente e en $(2, 4)$ f é crecente. En $(4,7)$ f é decrecente. En $x=2$ hai un mínimo e $f(2)=-1 \rightarrow (2, -1)$ mínimo. b) $A=43/6 u^2$

20 (2018 Xun A2) — Dada a función $f(x)=x^3-3x^2+2x$,

a) Calcula a primitiva F de f verificando que $F(2)=1$.

b) Estuda o crecemento e decrecemento e representa graficamente a función f .

c) Calcula a área limitada pola curva $f(x)$ e o eixe X entre $x=0$ e $x=2$.

a) $C=1$ b) Dominio de f : todo $\mathbb{R}$. Puntos corte: con OY en $(0,0)$ e con OX en $(0,0)$, $(0,1)$ e $(0,2)$.

En $(-\infty, 1-\sqrt{3}/3)$ e $(1+\sqrt{3}/3, +\infty)$ f é crecente. En $(1-\sqrt{3}/3, 1+\sqrt{3}/3)$ f é decrecente. En $1-\sqrt{3}/3$ hai un máximo relativo e en $1+\sqrt{3}/3$ hai un mínimo relativo c) $A=1/2 u^2$ <https://www.geogebra.org/classic/sm29ppaj>

21 (2017 Xun B2) — Os beneficios dunha compañía en millóns de euros, nos seus primeiros sete anos, foron estimados pola función $B(x)=ax^3-3x^2+bx$, $0 \leq x \leq 7$, onde x indica o tempo transcorrido en anos, desde a súa fundación.

(a) Calcula os valores de a e b sabendo que a compañía tivo uns beneficios máximos de 8 millóns de euros no segundo ano. (b) Supoñamos que $a = 1/4$ e $b = 9$. Determina cando a empresa non tivo beneficios. Calcula $\int_0^6 B(x) dx$.

a) $a = 1/4$ e $b = 9$ b) Non tivo beneficios no sexto ano c) $I=27$

22 (2017 Set B2) — Sexan as funcións $f(x)=x^2+2x-8$ e $g(x)=-x^2+4$. (a) Representa o recinto limitado polas gráficas de $f(x)$ e $g(x)$, estudando os puntos de corte cos eixes, máximos, mínimos e os puntos nos que se cortan ambas as funcións. (b) Calcula a área do devandito recinto.

a) A función $f(x) = x^2 + 2x - 8$ corta aos eixes nos puntos $(0, -8)$, $(-4, 0)$ e $(2, 0)$. Presenta un mínimo no punto $(-1, -9)$. A función $g(x) = -x^2 + 4$ corta aos eixes nos puntos $(0, 4)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. Presenta un máximo no punto $(0, 4)$. Ambas funcións cortanse en $(-3, -5)$ e $(2, 0)$ b) $A = 125/3 u^2$

23 (2003 Xun) — (a) Determina a función $f(x)$ se se sabe que pasa polo punto $(0, 1)$ e que a súa derivada é $f'(x)=x^3+2x$ (b) Determina o punto da gráfica no que a recta tanxente ten pendente 0. ¿Que máis se pode afirmar dese punto? Xustifíquese a resposta.

a) $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ onde $a=1/4$; $b=1$ e $c=1$ b) Igualando a primeira derivada a 0 obtense o punto da gráfica $(0,1)$. Xustificar que se trata dun mínimo porque a segunda derivada é positiva nese punto.

24 (2003 Set) — Determinar os parámetros a , b e c na función polinómica $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, sabendo que ten un mínimo relativo no punto $(3, 0)$ e que a área, $\int_0^3 f(x) dx$, limitada pola gráfica da función $f(x)$ e o eixe x é $\frac{27}{4}$.

$27a + 9b + 3c = 0$ (E1); $27a + 6b + c = 0$ (E2) $81/4 a + 9b + 9/2 c = 27/4$ (E3?) logo $a=1$, $b=-6$, $c=9$

25 (2002 Xun) — Dada a parábola $f(x)=x^2+bx+c$, calcular b e c se pasa polo punto $(0, 2)$ e ten un mínimo en $x = 1$. Calcular a área limitada por $f(x)$, o eixe x e as rectas $x=1$ e $y=-x+4$.

$b=-2$; $c=2$;

26 (2002 Set) — Dada a función $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2-4x+8 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ Calcula-la area limitada pola función e o eixe x .

27 (2001 Xun) — (a) Dada a función $f(x)=-x^2+bx+c$, calcúlense os valores b e c se esa función pasa polo punto $(1,4)$ e neste punto a ecuación da recta tanxente é $y = 4$. (b) Calcúlese a área comprendida entre a función $f(x)=-x^2+2x+3$ e a recta $y = x + 1$.

3 - Problemas complementarios

28 Calcula a área que determina a curva $y=-x^2+4$ co eixe X entre as abscisas -1 e 1 .

29 Calcula a área que determina a curva $y=x^2+x-2$ co eixe X entre as abscisas -1 e 2 .

30 Calcula a área do recinto limitado pola recta $y=x$ e a parábola $y=x^2$.

31 Dadas as parábolas $f(x)=2x^2+2x-12$ e $g(x)=-x^2-x+6$, atopa a área do recinto acoutado encerrado entre ambas.

32 Calcula a área do recinto limitado polas rectas $y=x$, $y=2x$ e a parábola $y=x^2$.

- 33 Calcula a área do recinto limitado pola recta $y=2-x$ e a curva $y=x^2$
- 34 Calcula a área da rexión do plano limitada polo eixe OX e a curva $y=x^3-9x$
- 35 Calcula a área do recinto limitado polas parábolas $y=x^2-4x$, $y=\frac{-1}{2}x^2+2x$
- 36 Calcula a área do recinto limitado polo eixe OX e a parábola $y=\frac{x^2}{4}-x$
- 37 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta $x+y=7$ e a gráfica da parábola $f(x)=x^2+5$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade e convexidade)
- 38 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y=-x^2+1$ e as rectas tanxentes a esta parábola nos puntos de corte da parábola co eixe OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade e convexidade)
- 39 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x)=x^2-2x+1$, a súa recta tanxente no punto $(3,4)$ e o eixe OX. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice e concavidade ou convexidade)
- 40 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x)=-3x^2+3$ e a recta $y=-9$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 41 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y=-x^2+2x+3$, a recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no que a tanxente é paralela á recta $y=4x$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 42 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x)=x^3-4x^2+4x$ e a bisectriz do primeiro cadrante. (Nota: para o debuxo da gráfica de $f(x)$, é suficiente utilizar o apartado anterior e calcular os puntos de corte cos eixos)
- 43 Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x)=-x^2+9x$, e as rectas $y=20$, $x-y+15=0$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)
- 44 Debuxa e calcula a área da rexión limitada polas gráficas da parábola $f(x)=4x-x^2$ e as rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos correspondente a $x=0$ e $x=2$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos de coordenadas, o seu vértice e concavidade ou convexidade)
- 45 Dada a función $f(x)=ax^3+bx+c$, determina a , b e c sabendo que $y=2x+1$ é a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente á abscisa $x=0$ e que $\int_0^1 f(x)dx=1$
- 46 Unha inmobiliaria está interesada en adquirir uns terreos que poden ser representados nun determinado plano como a superficie encerrada entre a parábola $f(x)=-x^2+2x+4$ e a recta $g(x)=2x$. (a) Fai a representación gráfica simultánea destas dúas funcións. (b) Se unha unidade da área deste plano equivale a 1 km² e o prezo do quilómetro cadrado é de 30 millóns de euros, ¿que importe debe pagar a inmobiliaria por eses terreos?
- 47 Un publicista diseña un cartel publicitario que ten a seguinte forma: base horizontal de 10 m de lonxitude e o resto do contorno limitado pola función $f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -x+10 & \text{se } 5 < x \leq 10 \end{cases}$
- Debuxa o contorno correspondente ao cartel publicitario e calcula a súa área.

4 - Problemas de ABAU/PAU de otras comunidades

48 [Murcia 2025 Extraordinaria Ap2 Cu1] Dada la función: $f(x) = \frac{-9+x^2}{x^2-4}$

a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de $f(x)$ con los ejes de coordenadas. b) Estudia sus asíntotas. c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. d) Halla y clasifica sus extremos relativos. e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

49 [Murcia 2025 Extraordinaria Ap2 Cu2] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por: $B(x) = 144x - 0,1x^2 - 50000$ donde x es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? b) Evalúa e interpreta la primera derivada de $B(x)$ en $x = 750$ ¿Qué recomendarías al propietario? c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $B(x)$. d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual?

50 [Murcia 2025 Extraordinaria Ap3 Cu1] Realiza:

a) Calcula $\int \left(\frac{2}{x-1} + 3\sqrt{x} \right) dx$ b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$.

51 [Murcia 2025 Extraordinaria Ap3 Cu2] Realiza:

a) Calcula $\int \left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x} \right) dx$ b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = 4 - x^2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

52 [La Rioja 2025 Extraordinaria Op 3.1] Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5$ (a : número real). Se pide:

a) Calcula el valor de " a " para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ tenga por ecuación: $y = 37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x=2$. b) Calcula el valor de " a " para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$. c) Qué valor debe tomar " a " para que se verifique la igualdad: $\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = 152$

53 [La Rioja 2025 Extraordinaria Op 3.2] Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función: $f(t) = t^3 - 3t + 10$ con $0 \leq t \leq 6$ (t : meses transcurridos desde el inicio del estudio) Se pide:

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula cuándo los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$ e indica cuándo se han alcanzado. b) Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros. c) Representa gráficamente la función en el intervalo $[0,6]$. d) Calcula en qué punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

54 [La Rioja 2025 Ordinaria Op 3.2] El beneficio de una empresa, expresado en miles de euros, a lo largo de 6 meses viene dado por la función $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8$, $0 \leq t \leq 6$ siendo t el número de meses transcurridos.

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio. Calcula en qué mes ha obtenido la empresa el máximo beneficio en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$ y cuál es valor de dicho beneficio. b) Estudia si hay o no puntos de inflexión y en el caso de haberlos, calcúlalos. Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$. c) Calcula el área limitada por la gráfica de f , el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$.

55 (Valencia 2024 Ord – P4) — Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{se } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ siendo a un número real.

- a) Determina el valor de a para que esta función sea continua.
- b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $] -9/2, -3/2[$.
- c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX .

56 (Asturias 2024 Extraord – P4) — Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, se pide:

- a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.
- b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$.

57 (Asturias 2024 Ord – P4) — Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, se pide:

- a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.
- b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

58 (Madrid 2024 Ord – P3) — (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente

expresión: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si } x < 1 \\ a \cdot e^{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
- b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

59 (Madrid 2024 Extra – P2) (2 puntos)

a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^2 (\sqrt{x} - a) dx = \frac{2}{3}$

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Determine para qué valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. *Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b [No se pregunta en Galicia].*

60 (Navarra 2024 Ord – EJ4) — Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{se } x < -1 \\ 4 - x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Estudie la continuidad de $f(x)$, clasificando sus puntos de discontinuidad.
- b) *Estudie la derivabilidad de $f(x)$. [No se pregunta en Galicia]* c) Calcule $\int_0^2 f(x) dx$

61 (Navarra 2024 Ord – EJ4) — La primera derivada de cierta función $f(x)$ viene dada por $f'(x) = x \cdot (x-2)^2$.

- a) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- b) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de x la función $f(x)$ presenta puntos de inflexión?
- c) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$

62 (Navarra 2024 Extra – EJ3 ii) — Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 5}{x}$ que cumpla $F(1) = 1$.

63 (Cantabria 2021 Modelo) — Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y $g(x) = x^2 - x$

- Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.
- Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
- Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.
- Calcular el área de la región anterior.

64 (Asturias 2021 Ord.) — Dada la función $f(x) = \frac{a \cdot x}{3 \cdot x^2 + 1}$, se pide:

- Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \frac{4}{3} \cdot \ln(4)$, donde F denota una primitiva de f .
- Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

65 (Asturias 2021 Extraord.) — Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

- Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.
- Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3,2$ y $x = -2$.

66 (Asturias 2020 Ord.) — Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

- Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot \ln(2)$, donde F denota una primitiva de f .
- Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 2$.

67 (Asturias 2020 Extraord.) — Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide:

- Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.
- Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$, Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

68 (Asturias 2023 Extraord. P4) — Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

- [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.
- [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.