

Unidade 5 – Integración – Solucións Exercicios complementarios

Ex 1 Obtén a integral indefinida en cada caso:

$$a) \int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} dx = \int \left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{2}x^2 + 3x - 4 \ln|x| + C$$

$$b) \int (1 + \sqrt[3]{x^2}) dx = x + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

$$c) \int \frac{x^2 + 3x - 1}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + C_1 \right) = \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + C_2$$

$$d) \int (\sqrt[5]{x^2} - 3x^2 + 7) dx = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} - x^3 + 7x + C \quad e) \int \frac{6x+6}{x^2+2x+7} dx = 3 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+7} dx = \ln|x^2+2x+7| + C$$

$$f) \int (2x-4)(3x+1) dx = \int (6x^2 - 10x - 4) dx = 2x^3 - 5x^2 - 4x + C$$

$$g) \int (2^x + 3^x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C \quad h) \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + C$$

Ex 2 Obtén a integral indefinida en cada caso:

$$a) \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx \Rightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

$$b) \int \left(\frac{3-5x}{2} \right)^3 dx \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{10} \left(\frac{3-5x}{2} \right)^4 + C$$

$$c) \int \frac{x-1}{x^2-2x+1} dx \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+1| + C$$

$$d) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \Rightarrow F(x) = \ln(e^x+1) + C$$

$$e) \int 7^{2x-5} dx \Rightarrow F(x) = \frac{7^{2x-5}}{2 \ln 7}$$

$$f) \int \sqrt{3x+1} dx \Rightarrow F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + C$$

$$g) \int \frac{x^2+2}{x^3+6x+1} dx \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} \ln|x^3+6x+1| + C$$

$$h) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow F(x) = -2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$i) \int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt \Rightarrow F(x) = \sqrt{t^2+2t+3} + C$$

$$j) \int 2x(x^2+1)^{20} dx \Rightarrow F(x) = \frac{(x^2+1)^{21}}{21} + C$$

$$k) \int \frac{3}{s+1} ds \Rightarrow F(x) = 3 \ln|s+1| + C$$

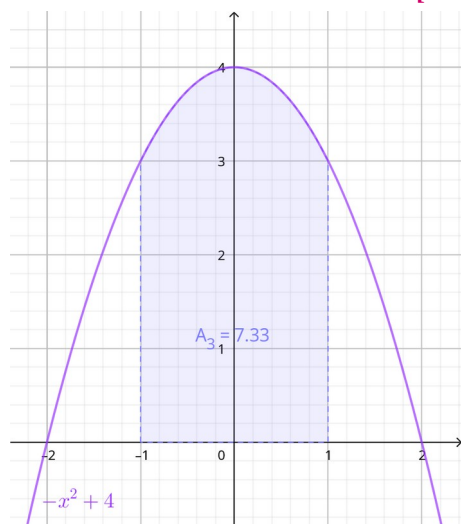
$$l) \int \frac{x}{(x^2+3)^5} dx \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{8} \cdot (x^2+3)^{-4} + C$$

$$m) \int 5^{x^3-6x+1} \cdot (x^2-2) dx \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3 \ln 5} 5^{x^3-6x+1} + C$$

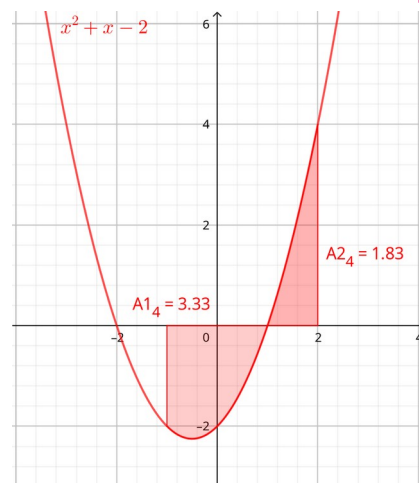
$$n) \text{ Función } f(x) \text{ tal que } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2x + e^x + 1 \text{ e } f(0) = 2 \\ \Rightarrow f(x) = 2\sqrt{x} - x^2 + e^x + x + 1; \text{ pois } C=1$$

- Problemas complementarios

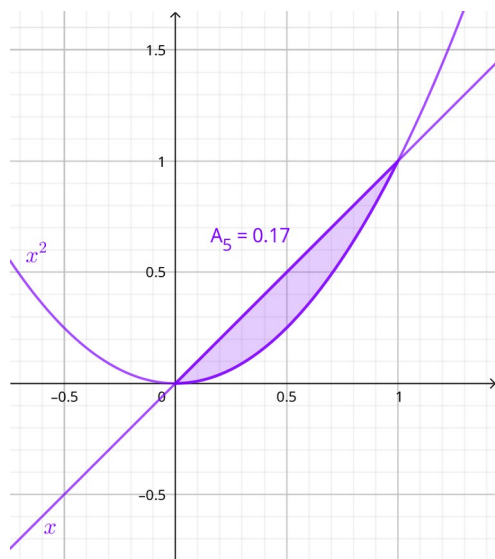
Exercicio 28: Calcula a área que determina a curva $y = -x^2 + 4$ co eixe X entre as abscisas -1 e 1. **[A=7,33]**



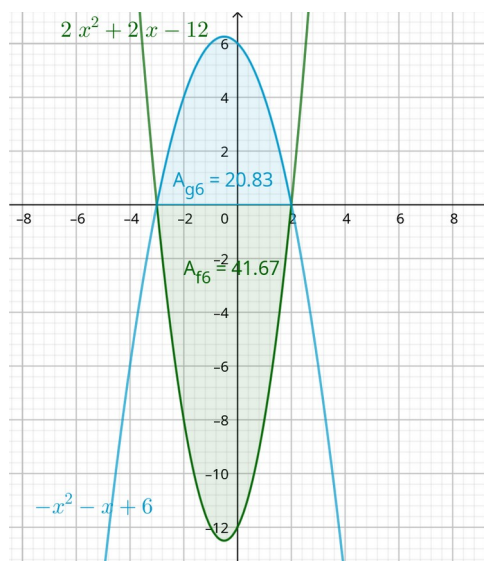
Exercicio 29: Calcula a área que determina a curva $y = x^2 + x - 2$ co eixe X entre as abscisas -1 e 2. **[A=5,17]**



Exercicio 30: Calcula a área do recinto limitado pola recta $y=x$ e a parábola $y=x^2$. **[A=0,17]**

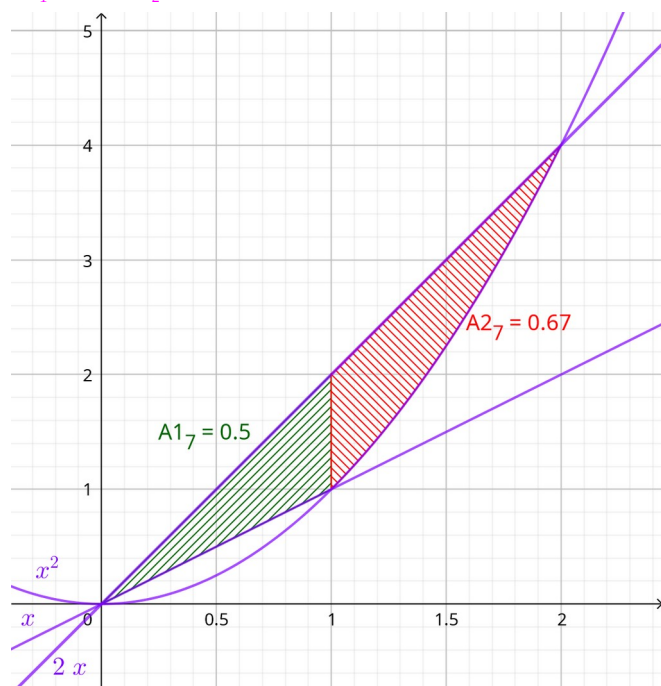


Exercicio 31: Dadas as parábolas $f(x)=2x^2+2x-12$ e $g(x)=-x^2-x+6$, atopar a área do recinto acoutado encerrado entre ambas. **[A=62,5]**

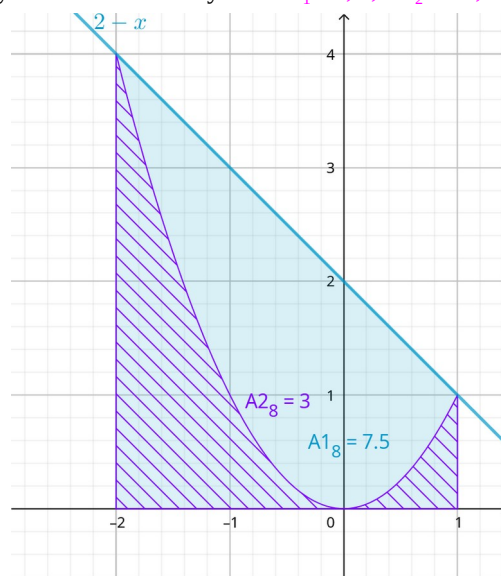


Exercicio 32: Calcula a área do recinto limitado polas rectas $y=x$, $y=2x$ e a parábola $y=x^2$.

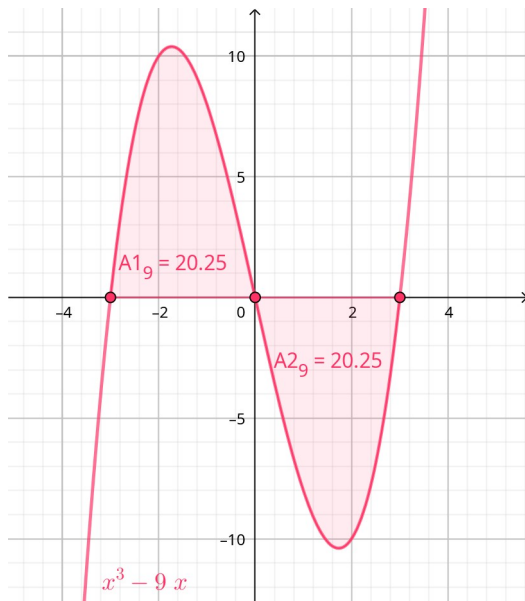
$A_1=0,5$; $A_2=0,67$; $A=1,17$



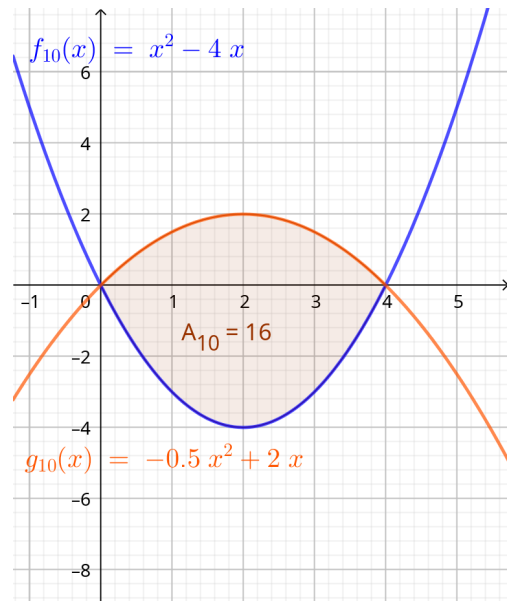
Exercicio 33: Calcula a área do recinto limitado pola recta $y=2-x$ e a curva $y=x^2$. **$A_1=7,5$; $A_2=03$; $A=4,5$**



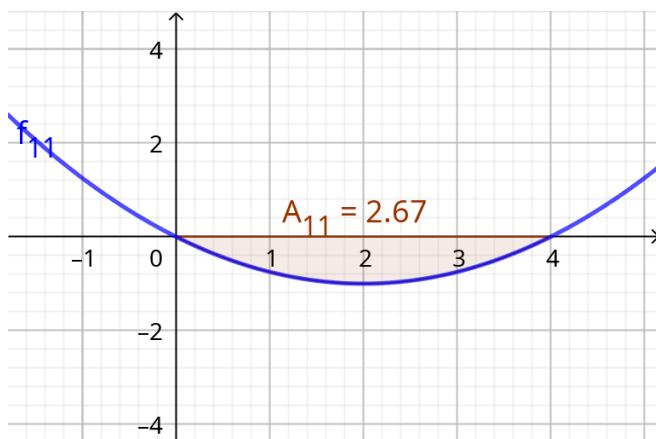
Exercicio 34: Calcula a área da rexión do plano limitada polo eixe OX e a curva $y = x^3 - 9x$ [A=40, 5]



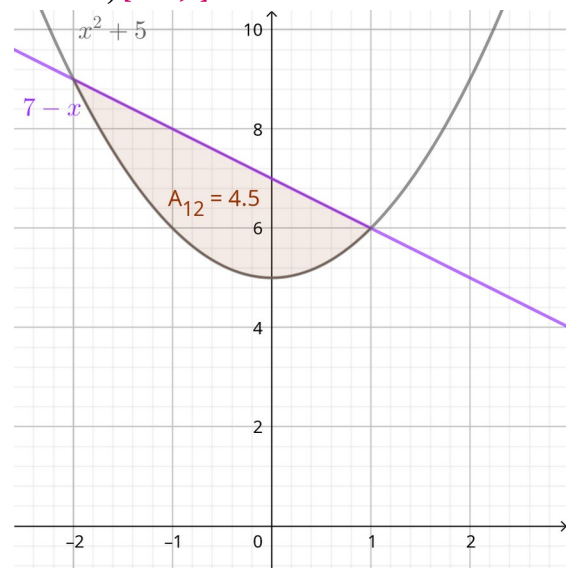
Exercicio 35: Calcula a área do recinto limitado polas parábolas $y = x^2 - 4x$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ [A=16]



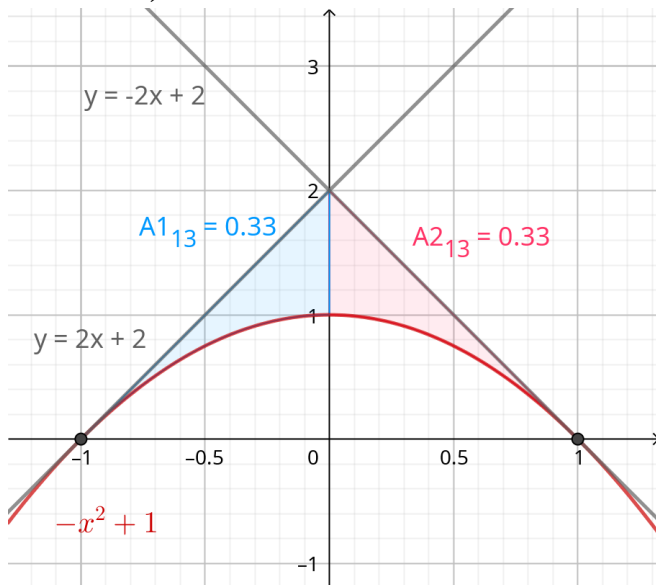
Exercicio 36: Calcula a área do recinto limitado polo eixe OX e a parábola $y = \frac{x^2}{4} - x$ [A=2,67]



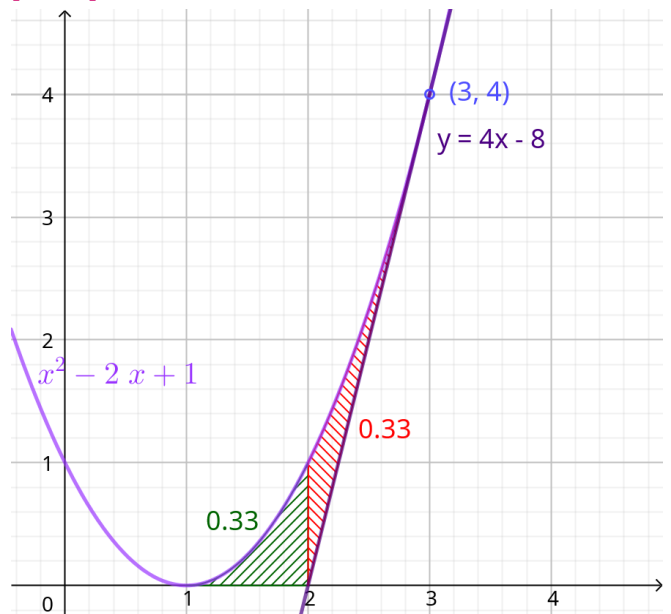
Exercicio 37: Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta $x + y = 7$ e a gráfica da parábola $f(x) = x^2 + 5$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade e convexidade) [A=4,5]



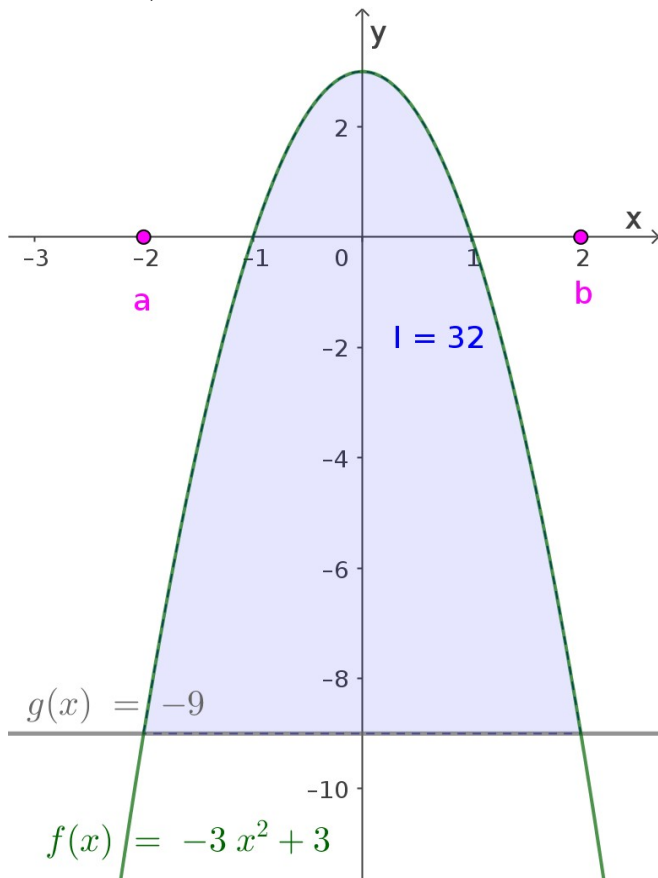
Exercicio 38: Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y = -x^2 + 1$ e as rectas tanxentes a esta parábola nos puntos de corte da parábola co eixo OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade e convexidade) **[A=2/3]**



Exercicio 39: Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$, a súa recta tanxente no punto (3, 4) e o eixo OX. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice e concavidade ou convexidade) **[A=2/3]**



Exercicio 40: Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -3x^2 + 3$ e a recta $y = -9$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade) **[A=32]**



Exercicio 41: Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, a recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no que a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade) **[A=2/3]**

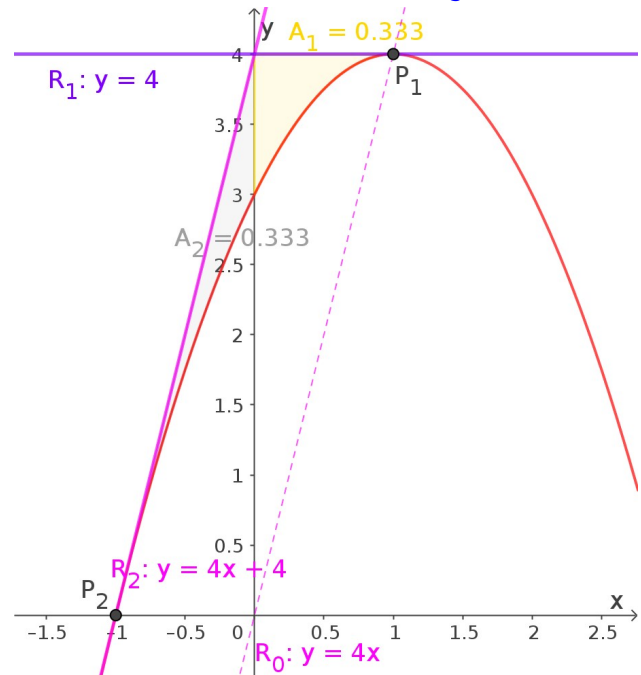
- R_1 : recta tanxente no punto onde a parábola ten un extremo é unha recta horizontal: $f'(x) = m = 0$
 $y' = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow R_1: y = 4$
 (tamén podemos buscar o vértice da parábola)
- R_2 : tanxente no punto no que esta é paralela á recta $R_0: y = 4x$ ---> tanxente onde a pendente é 4 ---> temos que buscar x tal que $f'(x) = 4$ --->
 $y' = 4 \Rightarrow -2x + 2 = 4 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R_2: y = 4x + 4$

Unha vez feita a gráfica vemos que a área pedida pode calcularse con dúas integrais:

$$A_2 = \int_{-1}^0 (R_2 - f(x)) dx = \int_{-1}^0 [(4x + 4) - (-x^2 + 2x + 3)] dx = 1/3$$

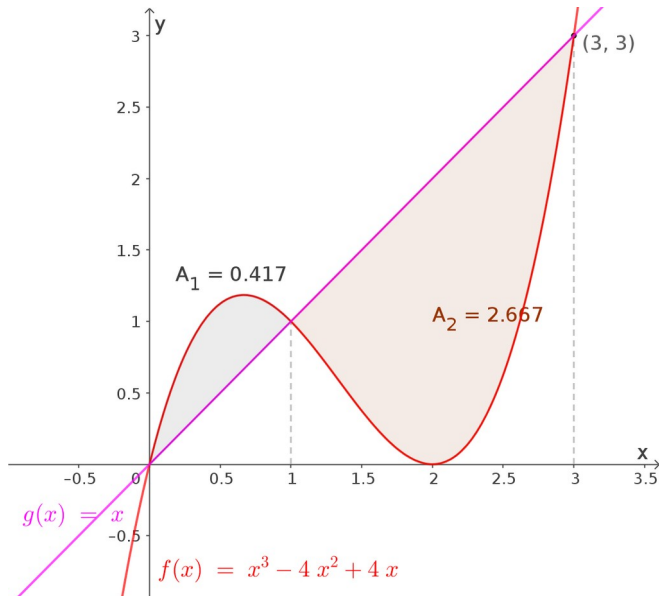
$$A_1 = \int_0^1 (R_1 - f(x)) dx = \int_0^1 [(4) - (-x^2 + 2x + 3)] dx = 1/3$$

Podes consultar os detalles de cada integral en A_1 e A_2 .



Exercicio 42: Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x)=x^3-4x^2+4x$ e a bisectriz do primeiro cadrante. (Nota: para o debuxo da gráfica de $f(x)$, é suficiente utilizar o apartado anterior e calcular os puntos de corte cos eixes) **[A=5/12+8/3=37/12]**

- o *o exercicio é parte dun antigo problema de selectividade onde se pide anteriormente analizar e representar f*
- o *a bisectriz é a recta $g(x)=x$*
- o *os puntos de corte son as solucións de $f(x)=g(x) \Rightarrow x=0; x=1$ e $x=3$*



O cálculo das integrais definidas poden verse en A_1 e A_2

Exercicio 43: Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x)=-x^2+9x$, e as rectas $y=20$; $x-y+15=0$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade) **[A=]**

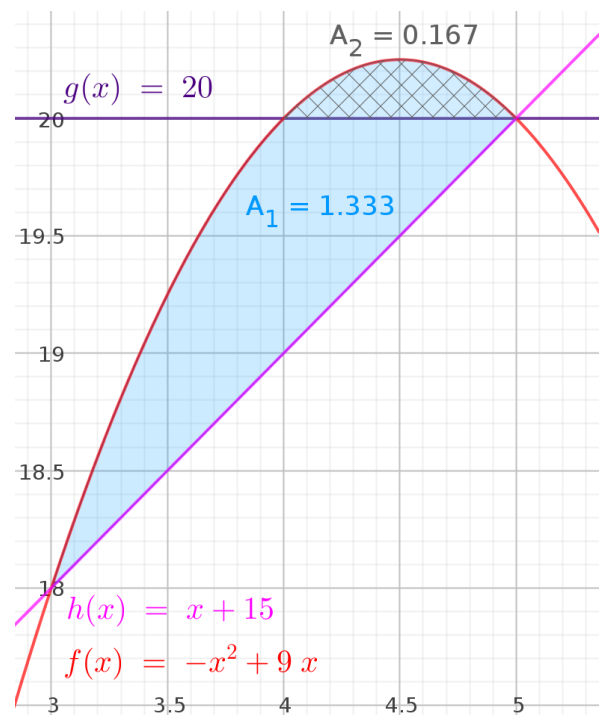
- o *Nomeamos as rectas como funcións:*
 $y=20 \Rightarrow g(x)=20$
 $x-y+15=0 \Rightarrow y=x+15 \Rightarrow h(x)=x+15$
- o *Atopamos os puntos de corte entre f e g :*
 $f(x)=g(x) \Rightarrow -x^2+9x=20 \Rightarrow x=4$ e $x=5$
- o *Atopamos os puntos de corte entre f e h :*
 $f(x)=h(x) \Rightarrow -x^2+9x=x+15 \Rightarrow x=3$ e $x=5$
- o *Podemos obter a área con dúas estratexias diferentes:*

- *dividir a rexión por $y=20$ e facer $A=A_1-A_2$ onde*

$$A_1 = \int_3^5 (f(x)-h(x))dx; A_2 = \int_4^5 (f(x)-g(x))dx$$

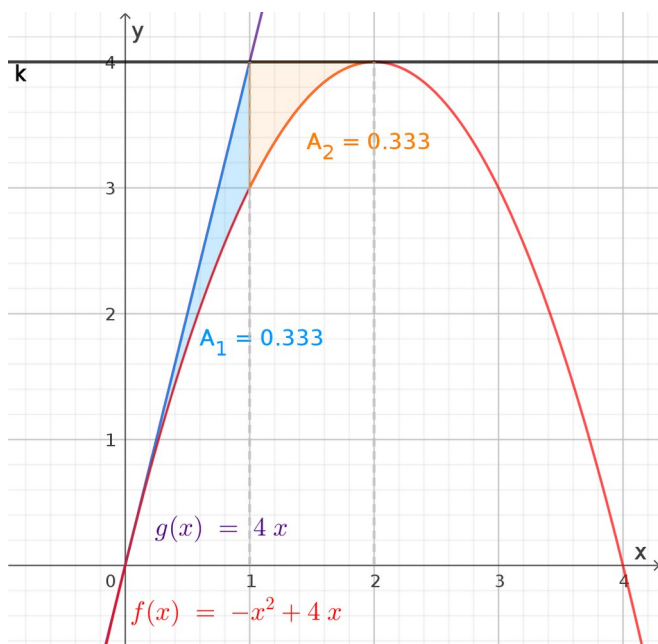
- *dividir a rexión por $x=4$ e facer $A=A_3+A_4$ onde*

$$A_3 = \int_3^4 (f(x)-h(x))dx; A_4 = \int_4^5 (g(x)-h(x))dx$$



Exercicio 44: Debuxa e calcula a área da rexión limitada polas gráficas da parábola $f(x) = 4x - x^2$ e as rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos correspondente a $x=0$ e $x=2$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixes de coordenadas, o seu vértice e concavidade ou convexidade) **[A=2/3]**

- R_1 : recta tanxente no punto de abscisa $x=0$
 $P_1=(0,0) f'(0)=9 \Rightarrow R_1: y=9x$
- R_2 : recta tanxente no punto de abscisa $x=2$
 $P_2=(2,4) f'(2)=9 \Rightarrow R_2: y=9x$



Exercicio 45: Dada a función $f(x) = ax^3 + bx + c$, determina **a**, **b** e **c** sabendo que $y = 2x + 1$ é a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente á abscisa $x=0$ e que $\int_0^1 f(x) dx = 1$ **[A=]**

(1) A partir de que $y = 2x + 1$ é a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ cando $x=0$ obtemos varios datos:

- $f(x)$ e a recta coinciden en $x=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 1$$
- A pendente da recta é 2 $\Rightarrow f'(0) = 2$ e como
 $f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow b = 2$

(2) Do cálculo da integral sacamos o valor de c

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (ax^3 + 2x + 1) dx = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{ax^4}{4} + x^2 + x \right) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} + 1 + 1 = 1 \Rightarrow a = -4$$

Logo $f(x) = -4x^3 + 2x + 1$

