

Unidade 5 – Gráficas de Funcións e Cálculo Integral

1 - Representación gráfica de funcións

1.1.- Dominio de definición:

- A gráfica da nosa función só “existe” para o conxunto de **puntos $\approx$ números** nos que está definida. As funcións que traballamos soen ter un dominio definido polo contexto do problema.
- Traballaremos con funcións definidas a trozos, nas que a expresión analítica cambia dependendo dos valores de x . A forma de traballar con estas funcións é limitar a análise a cada pedazo onde está definida. Podemos usar as propiedades das funcións elementais definidas en $\mathbb{R}$ para graficalas nun intervalo.
- É **raro** atopar funcións **indefinidas** a causa de **cocientes nulos, raíces negativas** ou **logaritmos non positivos**.

1.2.- Puntos de corte e outros puntos notables

- Cando teñamos que representar unha función localizaremos os posibles puntos de corte da función cos eixes, tendo moi en conta as limitacións impostas polo dominio de definición.
- Tamén calcularemos os **puntos relevantes da gráfica**, como os correspondentes aos bordes do dominio, os *puntos de ruptura*, os extremos relativos ou puntos de inflexión.

1.3.- Cotas dunha función

Responderemos á cuestións do tipo

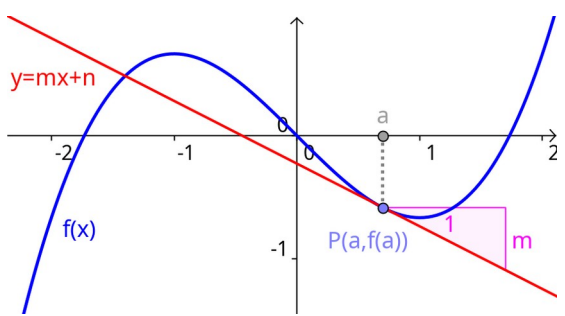
- “Atopar os momentos nos que hai beneficios”, ou sexa, buscar o intervalo de t no que $B(t) > 0$
- “Calcula en que período se superan 700 unidades vendidas”, ou sexa, $N(t) > 700$

Para isto debemos primeiro atopar os valores que fan certa a igualdade $B(t) = 0$ ou $N(t) = 700$ (resolver ecuación) e logo usaremos a monotonía para deducir se ese valor aumenta ou diminúe.

Tamén podemos resolver unha inecuación se é asequible.

1.4.- Recta tanxente á gráfica dunha función

Pode ser necesario utilizar información sobre a relación entre a pendente da recta tanxente (definición de derivada) e a ecuación dunha recta (sabendo a pendente e un punto da recta).

Recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $P=(a, f(a))$	Cálculo da ecuación da recta tanxente
	Temos unha función f e tomamos un punto da gráfica de f. Debemos calcular m e n. 1) As coordenadas dese punto son $P=(a, f(a))$ 2) A recta tanxente ten por pendente $m=f'(a)$ (definición de derivada en a): $y=m \cdot x+n \Rightarrow y=f'(a) \cdot x+n$ 3) A recta tanxente pasa por ese punto P, logo $(a, f(a))$ cumpre a ecuación da recta: $\left. \begin{array}{l} y=f'(a) \cdot x+n \\ x=a; y=f(a) \end{array} \right\} \Rightarrow f(a)=f'(a) \cdot a+n \Rightarrow$ despexamos n.

Exemplo: Obter a ecuación da recta tanxente a $f(x)=2/x$ cando $x=4$

- 1) Como $f(4)=2/4=1/2$, as coordenadas do punto son $P=(4, 1/2)$
- 2) Como $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$ entón $m=f'(4)=-2/16=-1/8$
- 3) Como $P=(4, 1/2)$ está na recta, cumpre $y=-1/8x+n$, logo $\frac{1}{2}=-\frac{1}{8} \cdot 4+n \Rightarrow n=2$
- 4) A ecuación da recta tanxente é $y=-1/8x+2$

2 - Límites e continuidade

2.1.- Método xeral do cálculo de límites

Na maioría dos casos a técnica para calcular un límite do tipo $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ consiste en **substituír x polo valor ao que tende**, obtendo como resultado do límite un valor que pode ser **finito** (un nº real), **infinito** ou **indeterminado**. Neste último caso non podemos obter o valor do límite de forma directa e necesitamos aplicar outras regras de cálculo.

2.2.- Límite dunha función continua

O límite dunha función continua nun punto do seu dominio é o valor da función nese punto:

$$f \text{ é continua en } c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Todas as funcións obtidas operando funcións elementais son continuas NOS PUNTOS DO SEU DOMINIO.

2.3.- Continuidade en funcións definidas a trozos

Estudamos a continuidade da expresión dentro de cada trozo do dominio baseándonos na regra de que as funcións elementais son continuas no seu dominio e logo Estudamos a continuidade no punto de ruptura comparando o valor da función cos límites laterais nese punto.

Exemplo: [AB.2019] $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 7 - x & \text{se } 4 < x \leq 7 \end{cases}$: A expresión $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é continua se $x \in [0, 4]$. A expresión $f(x) = 7 - x$ tamén é continua se $x \in [4, 7]$. Comparamos o valor da función e os límites laterais en $x=4$:

Límite pola esquerda en $x=4$	Valor da función en $x=4$	Límite pola dereita en $x=4$
$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 - 4x + 3 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$	$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3$	$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 7 - x = 7 - 4 = 3$

Como coinciden os límites laterais e o valor da función en $x=4$, a función é continua en $x=4$. Entón a función é continua en todo o seu dominio, é dicir, é continua en $[0, 7]$.

2.4.- Operacións con límites infinitos

Sexa $L \in \mathbb{R}$ un nº real e $+\infty$ e $-\infty$ límites de funcións (respéctanse as regras dos signos salvo INDETERMINACIÓN)

TOP	Polinomios:	Cocientes:	Expoñentes	Logaritmos
	$\infty^2 = \infty$; $\infty^3 = \infty$; ... $(-\infty)^2 = \infty$; $(-\infty)^3 = -\infty$;	$\frac{a \cdot x^3 + \dots}{b \cdot x^2 + \dots} = \pm \infty$; $\frac{a \cdot x^2 + \dots}{b \cdot x^2 + \dots} = \frac{a}{b}$; $\frac{a \cdot x^2 + \dots}{b \cdot x^3 + \dots} = 0$	$A^\infty = \infty$; $A^{-\infty} = 0$	$\log \infty = \infty$; $\log 0 = -\infty$

Sexa $L \in \mathbb{R}$ un nº real e $+\infty$ e $-\infty$ límites de funcións (respéctanse as regras dos signos salvo INDETERMINACIÓN)

Sumas	$\pm \infty \pm L = \pm \infty$; $\infty + \infty = \infty$ e $-\infty - \infty = -\infty$ $\infty - \infty = ? \rightarrow \text{INDETERMINACIÓN}$	Produtos	$\infty \cdot \infty = \infty$; $\infty \cdot L = \infty$, se $L > 0$ $\pm \infty \cdot 0 = ? \rightarrow \text{INDETERMINACIÓN}$
Cocientes	$\frac{L}{\pm \infty} = 0 \quad \forall L \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$ para calquera nº real L $\frac{L}{0} = \frac{\pm \infty}{0} = \pm \infty \quad \forall L \neq 0$ $\leftarrow$ límites laterais poden ser diferentes	Potencias	$\infty^{+\infty} = +\infty$ pero $\infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty^\infty} = 0$ - Se $L > 0$ entón $\infty^L = +\infty$; e $L < 0$ entón $\infty^L = 0$

2.5.- Resolución de indeterminacións

◦ Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: se é un cociente de polinomios e estamos con $x \rightarrow \pm \infty$, **reducimos cada polinomio á potencia principal** e simplificamos; se hai expresións radicais, facemos o mesmo usando expoñentes fraccionarios

2.6.- Asíntotas verticais e horizontais

Son rectas do plano de coordenadas ás que se achega a gráfica da función cando **x** ou **f(x)** tenden a infinito:

Asíntota horizontal en $y=L$	Asíntota vertical en $x=L$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = L$ $f(x)$ tende a L cando x se fai moi grande (longo prazo)	$\lim_{x \rightarrow L} f(x) = \pm \infty$ $f(x)$ tende a infinito cando x se achega a L (descontinua en L)

3 - Cálculo Integral

3.1.- Concepto de primitiva. Integral indefinida.

Chamamos **función primitiva dunha función f(x)** a outra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. O nome de **primitiva** fai referencia a que F é a **antiga** función, antes de ser derivada.

Exemplo: Sexa $f(x) = 3x^2 - x + 3$. Entón $F(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$ é unha primitiva de $f(x)$, xa que $F'(x) = f(x)$.

Polo mesmo motivo, $G(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ tamén é unha primitiva de $f(x)$

Propiedade: Se $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón tamén é unha primitiva $F(x) + C$, sendo $C \in \mathbb{R}$ unha constante.

Definición: chamamos **integral indefinida** dunha función $f(x)$ ao **conxunto de todas as súas primitivas**. Representase por $\int f(x) dx$; léese “**integral indefinida de f(x) diferencial de x**”.

Exemplos: $\int 4x^3 dx = x^4 + C$; $\int 3 dx = 3x + C$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$; $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

3.2.- Integrais inmediatas

Son aquelas que podemos obter con cálculos simples, invertendo a operación de derivar

Función simple	Función composta
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1$	$\int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int f(x)^{-1} \cdot f'(x) dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$

3.3.- Propiedades das integrais

Son propiedades que se obteñen a partir das propiedades das derivadas

- **Integral da suma** é suma de integrais: $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- **Os factores constantes** saen fóra da integral: $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
- O produto e o cociente de funcións **NON teñen integrais obvias ou inmediatas**; nin sequera hai unha fórmula ou algoritmo que permita calcular estas integrais de forma mecánica: $\int (f(x) \cdot g(x)) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$

Exemplos: $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx = x^4 - \frac{1}{x} + C$; $\int \frac{7}{x^2} dx = 7 \cdot \int \frac{1}{x^2} dx = 7 \cdot \frac{-1}{x} + C = \frac{-7}{x} + C$

◦ **Regra da cadeia:** podemos integrar unha función composta $f(g(x))$ se na expresión aparece a derivada de $g(x)$:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)), \text{ con } F(x) \text{ primitiva de } f(x)$$

Exemplos: $\int \frac{2x}{x^2} dx = \int_{f(x)=x^2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln x^2 + C$; $\int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} + C$

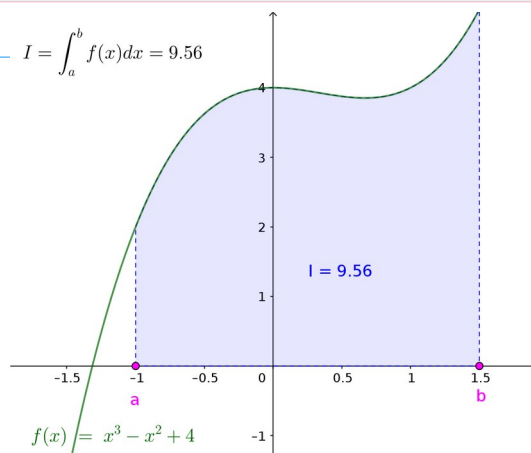
4 - Cálculo de Áreas

4.1.- Integral definida

Definición: Sexa $f(x)$ unha función **continua** nun intervalo $[a, b]$ e **non negativa** nese intervalo: $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Chamamos **integral definida** á área situada entre a **gráfica de $f(x)$** , o **eixe OX** e as rectas verticais **$x=a$** e **$x=b$** .

A integral definida denótase por $\int_a^b f(x) dx$

NOTA: Se $f(x)$ ten valores positivos e negativos, entón $\int_a^b f(x) dx$ non nos dá a área entre OX e a gráfica de f , pois as partes correspondentes á parte negativa da función compútanse como un área de signo negativo que resta á área total:



A **integral definida** é a **diferencia entre áreas sobre OX e baixo OX**.

Propiedade: Sexa $c \in [a, b]$ un punto do intervalo $[a, b]$. Entón podemos partir o intervalo de integración en tantos anacos como sexa necesario: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Gráficamente, dividimos a rexión pola recta $y=c$.

4.2.- Regra de Barrow

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é unha **función continua** en $[a, b]$ e $F(x)$ é unha primitiva calquera de $f(x)$, entón

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Propiedades da regra de Barrow: (1) Se $a=b$, a integral definida vale cero: $\int_a^a f(x) dx = 0$.

(2) Se intercambiamos os límites de integración, o valor da integral definida cambia de signo: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

4.3.- Área entre dúas funcións

Área entre dúas funcións: Se f e g son funcións continuas en $I=[a, b]$ e ademais $f(x) \geq g(x)$ para calquera x do intervalo $[a, b]$, entón a área comprendida entre ambas funcións sobre o intervalo I é $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

Resumindo: se $f(x)$ é continua en $[a, b]$, entón

Primitiva	Integral indefinida	Integral definida	Regra de Barrow
Calquera F tal que $F'=f$	Todas as primitivas de f	Se $f(x) \geq 0$, área sobre $[a, b]$	Nexo entre integral definida e primitiva
$F(x)$ tq $F'(x)=f(x)$	$F(x)+C = \int f(x) dx$	$A = \int_a^b f(x) dx$	$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

NOTAS:

- Se **$f(x)$** ten valores positivos e negativos, a área delimitada pola curva e os eixes obtense dividindo o intervalo **$[a, b]$** en intervalos separados onde f non cambie de signo. Cando **$f < 0$** , a área é o valor oposto da integral.
- Temos que seguir a mesma estratexia cando nun intervalo $[a, b]$ o comportamento das funcións **f** e **g** cambia entre $f(x) < g(x)$ e $f(x) > g(x)$. Atoparemos os puntos onde se produce este cambio resolvendo a ecuación $f(x) = g(x)$, que son os **puntos de corte entre ambas funcións**.