

UNIDAD 5: PROGRAMACIÓN LINEAL

1. PROGRAMACIÓN LINEAL. DEFINICIÓN

Se llama **programación lineal**, o también programa lineal, a la formulación algebraica que pretende **optimizar** (maximizar o minimizar) **una función lineal** de varias variables (en nuestro caso solo 2), sujeta a una serie de **restricciones**, también lineales (en nuestro caso las restricciones serán inecuaciones lineales de 2 incógnitas).

La función lineal a optimizar se denomina **función objetivo**, y las restricciones se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales que debemos resolver.

La expresión general de un problema de programación lineal en dos dimensiones es, por tanto:

Función objetivo: $f(x, y) = a \cdot x + b \cdot y \rightarrow$ Máximo o mínimo (Buscamos su máximo o su mínimo)

Restricciones: $a_1x + b_1y \leq c_1$

$a_2x + b_2y \leq c_2$

$a_3x + b_3y \leq c_3$

.....

Típicamente una de las restricciones es que los valores sean positivos, es decir: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

La solución factible que hace óptima (máxima o mínima, según se desee) la función objetivo, se llama **solución óptima**, y siempre se encuentra en la frontera de la región factible.

1.1. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

En un programa lineal con dos variables, **si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice)** de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.

De este teorema obtenemos dos consecuencias:

- Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan.
- En el caso de que la región factible no sea acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los **vértices** de la región.

EJEMPLO:

Una empresa aeronáutica construye dos tipos de aviones A y B. Para ello dispone de 1 800 millones de euros, siendo el coste de cada avión 30 y 20 millones de euros, respectivamente. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de aviones producidos no sea mayor de 80.

Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de un avión del tipo A es de 4 millones de euros y en el tipo B, 3 millones de euros. ¿Cuántos aviones debe construir de cada clase para que el beneficio sea máximo?

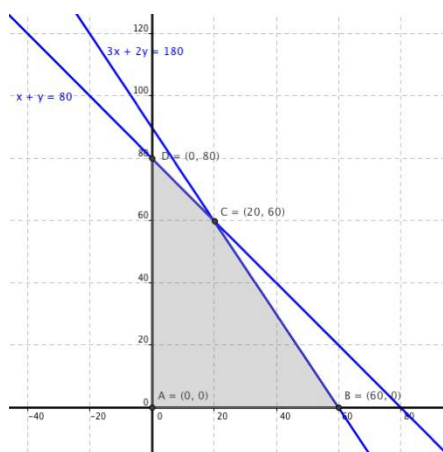
Sean $\begin{cases} x = \text{número de aviones de tipo A} \\ y = \text{número de aviones de tipo B} \end{cases}$

	Nº aviones	Coste	Beneficio
Tipo A	x	30	4
Tipo B	y	20	3
Restricciones	No sea mayor de 80 $x + y \leq 80$	Dispone de 1800 € $30x + 20y \leq 1800$	Función Objetivo $z = 4x + 3y$

Función objetivo: $f(x, y) = 4x + 3y \rightarrow$ Máximo (en millones de euros)

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} r_1 : x + y \leq 80 \\ r_2 : 30x + 20y \leq 1800 \\ r_3 : x \geq 0 \\ r_4 : y \geq 0 \end{cases}$$

Con esas restricciones debemos construir la región factible:



Debemos encontrar las coordenadas de los vértices de la región factible pues, según el teorema fundamental de la programación lineal, uno de ellos es el que maximiza/minimiza nuestra función objetivo. Para ello debemos resolver varios sistemas de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ 30x + 20y = 1800 \end{cases} \rightarrow (20, 60)$$

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 80)$$

$$\begin{cases} 30x + 20y = 1800 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (60, 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 0)$$

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (80, 0)$$

$$\begin{cases} 30x + 20y = 1800 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 90)$$

De esos 6 puntos, solamente 4 forman la región factible. En este caso son los puntos A, B, C y D. Ahora debemos **evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices** (o sea, sustituir las coordenadas de los vértices de la región factible en la función objetivo) y comprobar cuál (o cuáles) de ellos proporciona el máximo o mínimo de la función objetivo.

En el ejemplo: $f(x, y) = 4x + 3y$. Sustituimos los valores de los cuatro vértices:

Punto	Función objetivo
$A: (20, 60)$	$f(20, 60) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 60 = 260$
$B: (0, 80)$	$f(0, 80) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 80 = 240$
$C: (60, 0)$	$f(60, 0) = 4 \cdot 60 + 3 \cdot 0 = 240$
$D: (0, 0)$	$f(0, 0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

La solución óptima corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice $A: (20, 60)$:

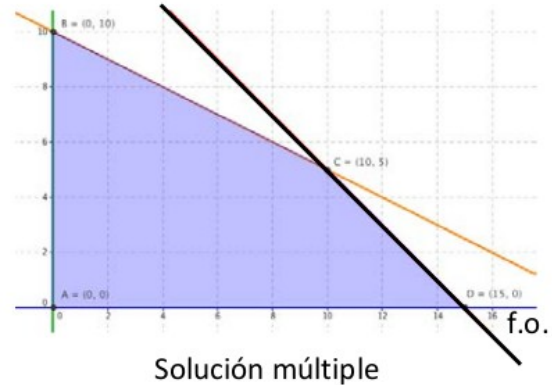
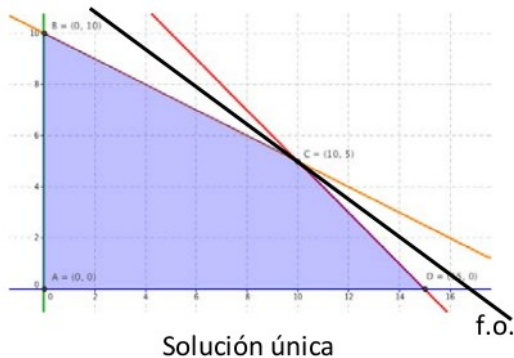
Solución: Hay que construir 20 aviones del tipo A, 60 del tipo B y el beneficio es de 260 millones de euros.

1.2. TIPOS DE SOLUCIONES EN PROGRAMACIÓN LINEAL

Vamos a considerar las distintas situaciones que se suelen presentar en los programas lineales para dos variables. Los programas lineales para dos variables pueden clasificarse, atendiendo al tipo de solución que presentan, en los casos siguientes:

- **Factibles con solución única**, cuando presentan un único óptimo.

- **Factibles con solución múltiple**, si presentan más de una solución óptima. En estos casos, las soluciones suelen ser todos los puntos de un segmento, es decir, los puntos comprendidos entre dos vértices de la región factible.



- **Factible no acotada**, cuando no existe límite para la función objetivo, es decir, la función objetivo puede hacerse tan grande como se desee en la región factible.

- **No factible**, si no existe el conjunto de soluciones. En estas situaciones, las desigualdades que describen las restricciones son inconsistentes.

