

Producto escalar

Definición

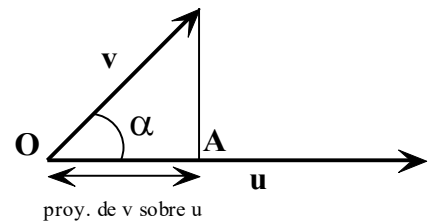
Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, llamamos producto escalar de esos dos vectores a:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Interpretación geométrica

El valor absoluto del producto escalar de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ como los de la figura, la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, que denotamos $\text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$, es la proyección de $\vec{v}$ sobre una recta en la dirección de $\vec{u}$, tal y como vemos en dicha figura:



A partir del dibujo tenemos que $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v})}{|\vec{v}|}$, y por tanto:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) \quad \text{por lo que} \quad \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

Producto vectorial

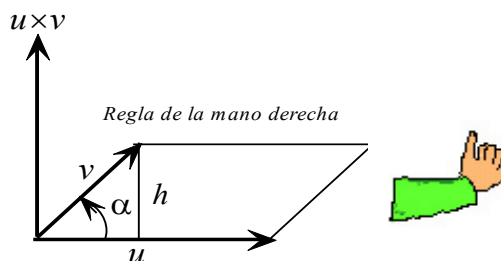
Definición

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, llamamos producto vectorial de esos dos vectores, y lo denotaremos $\vec{u} \times \vec{v}$ a otro vector que cumpla lo siguiente:

Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$

Dirección: Perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Sentido: El del avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ por el camino más corto. (Regla de la mano derecha)



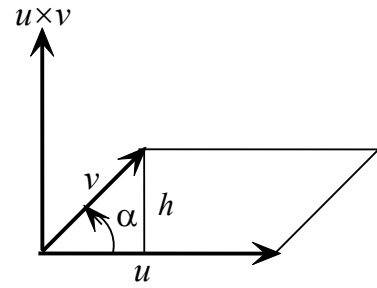
Interpretación geométrica del producto vectorial

“El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo que ambos vectores forman”.

Basta darse cuenta que el área del paralelogramo es:

$$\text{Área paralelogramo} = \text{Base} \times \text{altura}$$

La base es $\|\vec{u}\|$ y la altura $h = \|\vec{v}\| \sin \alpha$, tenemos que:



$$\text{Área paralelogramo} = \text{Base} \times \text{altura} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

Producto mixto

Definición

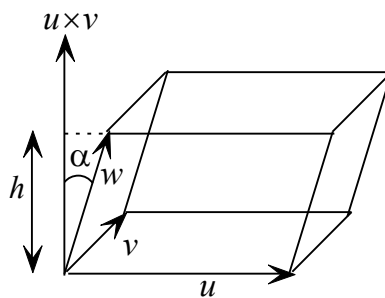
Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, llamamos producto mixto de esos tres vectores, y lo denotaremos $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, al número que se obtiene al realizar el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Interpretación geométrica del producto mixto:

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo formado por esos tres vectores.

Para ello, consideremos tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, no coplanarios como los de la figura adjunta. Estos tres vectores definen un paralelepípedo como puede observarse:



$$V_{\text{paralelepípedo}} = \text{Área Base} \cdot \text{altura}$$

$$[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \cos \alpha = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$$

Pero como: $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ es el área de la base de paralelepípedo y $\|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha = h = \text{altura}$, entonces, ambas expresiones son idénticas, por lo que:

$$[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = \text{Volumen del paralelepípedo.}$$