

EJERCICIOS DE GEOMETRÍA

1.- Estudia si los cuatro puntos $A(1, 2, -1)$, $B(1, 3, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(0, 2, 4)$ son coplanarios.

Una forma de hacerlo es hallar la ecuación del plano determinado por los tres primeros puntos:

$$A(1, 2, -1), \quad \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (-1, -2, 2)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - y + z - 1 = 0$$

A continuación sustituimos el punto $D(0, 2, 4)$ en la ecuación del plano. Si se verifica la ecuación, los puntos son coplanarios. En caso contrario, forman un tetraedro:

$4 \cdot 0 - 2 + 4 - 1 \neq 0$, por tanto, los puntos no están en el mismo plano, no son coplanarios.

2.- Demuestra que dados dos puntos $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, las coordenadas del punto medio son:

$$(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2} \right)$$

El punto medio M divide al segmento AB en dos mitades, es decir: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

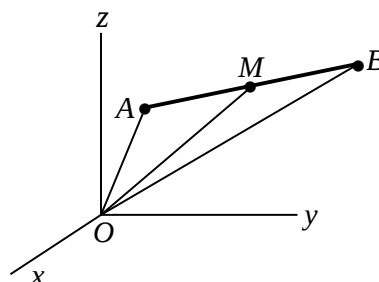
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

A partir de estas dos observaciones podemos escribir:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$



Y si las coordenadas de los puntos son $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ y $M(x_m, y_m, z_m)$ obtenemos:

$$(x_m, y_m, z_m) = \frac{1}{2} ((x_0, y_0, z_0) + (x_1, y_1, z_1)) = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2} \right)$$

3.- Sea el plano $\pi: 3x - 5y + z - 2 = 0$. Halla la ecuación del plano π' , paralelo al anterior, que contiene al punto $A(-3, 2, 4)$

La ecuación del plano π' será de la forma siguiente: $\pi': 3x - 5y + z + D = 0$

Como $A \in \pi'$, podemos sustituir las coordenadas de A en la ecuación del plano π' por tanto, $3(-3) - 5 \cdot 2 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = 15$ y entonces $\pi': 3x - 5y + z + 15 = 0$ es el plano buscado.

4.- Dada la recta r definida por la intersección de dos planos,

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2z - 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

escribe su ecuación en forma paramétrica.

Hacemos $z = \lambda$ se obtiene el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 + 2\lambda \\ x + y = 1 + \lambda \end{cases} \text{ y sumando ambas ecuaciones resulta } x = 1 + \lambda$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación resulta $y = 0$, por tanto,

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

5.- Estudia la posición relativa de la recta $x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 2}{4}$ y el plano de ecuación $2x + 4y - z + 4 = 0$

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 2}{4} = \lambda \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= 2 + 2\lambda \\ z &= 2 + 4\lambda \end{aligned} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano obtenemos:

$$2(1 + \lambda) + 4(2 + 2\lambda) - (2 + 4\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

La recta y el plano se cortan en un punto P de coordenadas $(1 - 2, 2 + 2(-2), 2 + 4(-2))$, es decir $P(-1, -2, -6)$

6.- Calcula k para que se corten las siguientes rectas y averigua en qué punto lo hacen:

$$r: \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - z = -1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y + kz = 5 \end{cases}$$

Primero expresamos r y s en forma paramétrica

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 7\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -3 + k\mu \\ y = 8 - 2k\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Un punto y un vector de la recta r : $P(1, 0, 2)$; $u = (3, 2, -7)$

Un punto y un vector de la recta s : $Q(-3, 8, 0)$; $v = (k, -2k, 1)$

Hallamos el vector que une los dos puntos: $\overrightarrow{PQ} = (-4, 8, -2)$

Finalmente, igualamos a cero el determinante formado por los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} -4 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \\ k & -2k & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Resolviendo la ecuación se obtiene } k = 2.$$

El punto de intersección lo podemos obtener igualando las dos ecuaciones y resolviendo el sistema formado:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 7\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -3 + 2\mu \\ y = 8 - 4\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 3\lambda = -3 + 2\mu \\ 2\lambda = 8 - 4\mu \\ 2 - 7\lambda = \mu \end{cases} \text{ y de aquí,}$$

$$\begin{cases} 3\lambda - 2\mu = -4 \\ 2\lambda + 4\mu = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda - 4\mu = -8 \\ 2\lambda + 4\mu = 8 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0$$

El punto de corte se obtiene llevando el valor de λ obtenido a la ecuación de la recta r : $(1, 0, 2)$

7.- Halla la posición relativa de los tres planos siguientes.

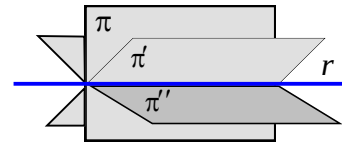
$$\pi_1: 2x - y + 3z = 11$$

$$\pi_2: x + y - z = 6$$

$$\pi_3: x - 5y + 9z = 4$$

Podemos hacerlo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 1 & -5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$$

$$\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$$

Planos secantes. Los tres planos se cortan en una recta.

8.- Dadas las rectas $r: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$ y $s: (x, y, z) = (2, 1, 1) + \lambda(3, -1, 3)$, encuentra el plano que pasa por r y es paralelo a s .

Utilizamos el punto de la recta r y los vectores de cada una de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(y-1) - 3z + 3x - 9(y-1) = 0 \text{ y simplificando obtenemos la ecuación implícita del plano}$$

$$\text{buscado: } x - 6y - 3z + 6 = 0$$

9.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -1, 0)$ y se apoya en las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

$$s: \frac{x}{3} = y + 2 = 1 - z$$

Plano que pasa por A y contiene a la recta r : $x - y + 3z - 4 + \alpha(x - y + z - 2) = 0$ (Haz de planos)

Y como pasa por $A(2, -1, 0)$, $2 + 1 - 4 + \alpha(2 + 1 - 2) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$, por tanto,

$$x - y + 3z - 4 + 1(x - y + z - 2) = 0, \text{ es decir, } x - y + 2z - 3 = 0$$

Plano que pasa por A y contiene a s:

Expresamos primeramente la recta s en forma implícita: $s: \begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ x + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

$$x - 3y - 6 + \alpha(x + 3z - 3) = 0$$

Y como pasa por A(2,-1, 0), $2 + 3 - 6 + \alpha(2 - 3) = 0 \Rightarrow \alpha = -1$, por tanto,

$$x - 3y - 6 - 1(x + 3z - 3) = 0, \text{ es decir, } \Rightarrow y + z + 1 = 0$$

La recta pedida viene dada como intersección de los dos planos obtenidos:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

10.- Consideremos las rectas de ecuaciones

$$r: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ -2x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad s: x + 1 = \frac{y - 3}{n} = \frac{z}{2}$$

a) Halla n para que r y s sean paralelas.

b) Con el valor de n obtenido, determina la ecuación del plano que contiene ambas rectas.

a) Expresaremos la recta r en paramétricas:

$$r: \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ -2x + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y - x + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 + x$$

Si hacemos $x = \lambda$, $y = -2 + \lambda$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $z = 1 + 2\lambda$

La recta r queda de la siguiente forma:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Por otra parte, sabemos que $s: x + 1 = \frac{y - 3}{n} = \frac{z}{2}$

Además, un vector de r es $u = (1, 1, 2)$ y un vector de s es $v = (1, n, 2)$

Para que las rectas sean paralelas sus vectores directores tienen que ser proporcionales, por tanto,

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{n} = \frac{2}{2} \Rightarrow n = 1$$

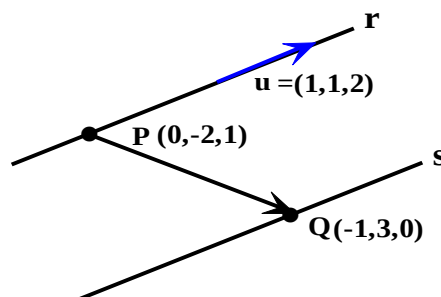
b) El plano que contiene a las dos rectas, queda determinado por el punto P y los vectores u y $\overrightarrow{PQ}$ siendo $\overrightarrow{PQ} = (-1, 5, -1)$

Su ecuación se obtiene a partir de un determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y + 2 & z - 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando, obtenemos la ecuación siguiente:

$$11x + y - 6z + 8 = 0$$



11.- Halla el valor del parámetro a para que los planos siguientes se corten en una recta.

$$\pi_1 : x - y + z = 2$$

$$\pi_2 : 2x - y + z = 3$$

$$\pi_3 : 3x - y + az = 4$$

Determina la ecuación de la recta mencionada en coordenadas paramétricas.

Podemos aplicar el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & a & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & a-3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que se corten en una recta se ha de verificar que $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$ y ello se verifica si $a - 1 = 0$, es decir, cuando $a = 1$.

Cuando $a = 1$, el sistema queda de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{array} \right\} \text{ y si hacemos } z = \lambda, \text{ resulta } \left. \begin{array}{l} x - y = 2 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1$$

La recta intersección de los planos dados es la siguiente:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

12.- Sea la recta de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{2}$ y el plano $4x + my + z - 2 = 0$

Halla el valor de m para que sean paralelos.

La ecuación de la recta podemos ponerla en la forma siguiente:

$$r : \begin{cases} 4x - 4 = 2y + 10 \\ 2y + 10 = 4z - 12 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} 2x - y = 7 \\ y - 2z = -11 \end{cases}$$

Para que la recta y el plano sean paralelos, el sistema formado por las dos ecuaciones de la recta y la ecuación del plano ha de ser incompatible.

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ y - 2z = -11 \\ 4x + my + z = 2 \end{cases}$$

Hacemos que el rango de la matriz de coeficientes sea 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + 8 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ Otra forma:

$$\text{Sea } \pi : Ax + By + Cz + D = 0; \quad r : \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

La condición de paralelismo de recta y plano es: $Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$, por tanto,

$$4 \cdot 2 + m \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

Ejercicios propuestos

1.- Halla el valor de m para que los puntos $A(1,2,0)$, $B(0,3,-1)$, $C(1,0,1)$ y $D(-1,2,m)$ sean coplanarios.

Sol. $m = -1$

2.- Calcula el volumen del tetraedro determinado por los puntos $A(-1,0,1)$, $B(2,-4,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(-3,0,0)$

Sol. $V = \frac{3}{2} u^3$

3.- Estudia la posición relativa de las rectas

$$r: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1}; \quad s: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$$

Sol. Se cortan en el punto $(-3,28,5)$

4.- Halla la ecuación de un plano paralelo al plano de ecuación $x - 2y + z + 5 = 0$ y que pase por el punto $P(1, 0, 8)$

Sol. $x - 2y + z - 9 = 0$

5.- Calcula el área del triángulo cuyos vértices son las intersecciones del plano $x + 2y + 3z = 1$ con los ejes de coordenadas.

Sol. $A = \frac{\sqrt{14}}{12} u^2$

6.- Estudia la posición relativa de la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$ y el plano de ecuación $2x - y + 3z - 8 = 0$

Sol. La recta y el plano son paralelos

7.- Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1: -x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$\pi_2: 2x + 4y - 6z - 1 = 0$$

$$\pi_3: 3x + 2y - 4z + 6 = 0$$

Sol. π_1 y π_2 son paralelos. El tercero es secante a los otros dos.

8.- Escribe la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

9.- Halla m para que las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2}$ y $s: \frac{x}{4} = \frac{y-m}{-1} = \frac{z-1}{2}$ sean secantes.

Sol. $m = 11$

10.- Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(5, 0, 1)$, $B(4, 1, 0)$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$

Sol. $2x + y - z - 9 = 0$

11.- Un plano contiene a las rectas $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ y $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{2}$. Halla su ecuación.

Sol. $2x - y - z + 3 = 0$

12.- Dada una recta r , de ecuación $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$, halla:

a) Las ecuaciones de dos planos que determinan r .

b) En el haz formado por los planos que determinan r , halla el que pasa por el punto $A(0, -3, 2)$

Sol. $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}; \quad 10x + y - 8z + 19 = 0$

13.- Halla la ecuación de la recta t , que pasa por el punto $A(1, 0, -2)$ y corta las rectas siguientes:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}; \quad s: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$$

Sol. $t: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$