

ESPACIO AFÍN

1. Ecuaciones de la recta en el espacio.
2. Ecuaciones del plano.
3. Posiciones relativas de rectas y planos. Incidencia y paralelismo.

1. Ecuaciones de la recta en el espacio.

Determinación de una recta.

Para calcular una recta necesitamos conocer un vector de esa recta que llamamos vector director de la recta y un punto A. Dicho vector no es único pues cualquier múltiplo de él lleva la misma dirección.

- Si me dan dos puntos A y B, estamos dando ya las dos cosas, es decir, la dirección y un punto por el que pasa.

Por lo tanto, una recta queda determinada cuando se conocen:

- Dos puntos A y B por los que pasa la recta.
- Un punto A y un vector $\vec{v}$, llamado vector director, que tiene la misma dirección de la recta.

Considerando el segundo caso, es decir, que conocemos un punto A y un vector director $\vec{v}$, vamos a calcular su ecuación.

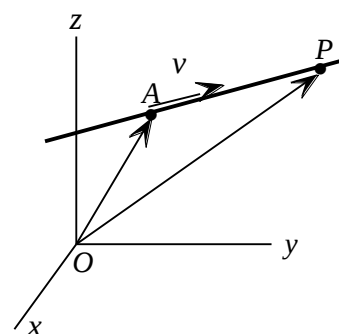
Ecuación vectorial:

Sea r una recta definida por un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y un punto cualquiera de ella $A(x_0, y_0, z_0)$, tal y como vemos en la figura:

Nos preguntamos cuál es su ecuación, es decir, qué debe cumplir un punto $P(x, y, z)$ para estar en esa recta.

Está claro que el vector $\overrightarrow{AP}$ debe ser múltiplo de $\vec{v}$

Esto se traduce en $\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}}$



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}}$$

Obtenemos así la ecuación vectorial de la recta. Se llama vectorial porque la conocemos a través de los vectores de posición de cada uno de sus puntos.

Si tenemos en cuenta que estamos trabajando con el sistema de referencia $S = \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$ y hallamos las coordenadas de los vectores de posición $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OA}$, que son respectivamente:

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) \quad \overrightarrow{OA} = (x_0, y_0, z_0)$$

y sabiendo que $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, la ecuación $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}$ se convierte en:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3)} \rightarrow \text{Ecuación vectorial de la recta}$$

En esta ecuación, para cada valor que le demos a λ , se obtiene un punto de la recta y si le damos todos los valores de los n° reales, se obtienen todos los puntos de la recta.

Ecuaciones paramétricas:

Las ecuaciones paramétricas de la recta son otra forma de expresar las condiciones para que un punto pertenezca a una recta. Dichas ecuaciones se obtienen a partir de la ecuación vectorial, expresando por separado cada variable.

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Ecuación continua:

Se obtiene a partir de las ecuaciones paramétricas eliminando λ en el sistema.

$$\lambda = \frac{x - x_0}{v_1}; \quad \lambda = \frac{y - y_0}{v_2}; \quad \lambda = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Igualando los valores de λ , se obtiene la ecuación continua:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Ecuaciones generales o forma implícita de la ecuación recta:

Igualando en la anterior ecuación dos a dos obtendremos dos ecuaciones:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \qquad \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Esas son las ecuaciones generales de la recta que también llamamos forma implícita:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{Forma implícita de la ecuación de la recta}$$

Ejemplo:

Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1, -2, 3)$ y tiene como vector director a $\vec{v} = (-1, 4, 2)$.

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(-1, 4, 2)$

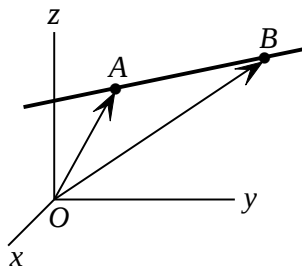
Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ Ecuación continua: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$

Ecuaciones implícitas: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} \quad \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$ que dan lugar a: $\begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ 2y - 4z + 16 = 0 \end{cases}$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Teniendo en cuenta que una recta queda también determinada cuando se conocen dos puntos de la misma, si conocemos los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ podemos obtener un vector director restando las coordenadas de los mismos:

$$\vec{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$



Ahora podemos escribir su ecuación en cualquiera de las formas que ya conocemos, por ejemplo, en forma de ecuación continua, usando el vector obtenido $\vec{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ y el punto $A(x_0, y_0, z_0)$. Nos quedará:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (\text{Ecuación de la recta que pasa por dos puntos})$$

Ejemplos:

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2, 4)$ y $B(2, 3, 5)$

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+2}{3+2} = \frac{z-4}{5-4} \quad \rightarrow \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-4}{1}$$

Halla un punto y un vector director de la recta $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$. Comprueba si $A(1, -3, 2)$ pertenece a dicha recta.

Está claro que un punto de la recta será $P(1, -2, 3)$ y que el vector director es: $\vec{v} = (-1, 4, 2)$.

Para saber si $A(1, -3, 2)$ pertenece a la recta basta ver si cumple su ecuación. Para ello, sustituimos sus coordenadas:

$$\frac{1-1}{-1} = \frac{-3+2}{4} = \frac{2-3}{2} \quad \text{que resulta:} \quad \frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{4} \neq \frac{-1}{2} \quad \text{por lo que A no está en la recta dada.}$$

2. Ecuaciones del plano.**Ecuación vectorial del plano:**

Dados dos vectores linealmente independientes del plano π , $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, y un punto del plano $A(x_0, y_0, z_0)$, entonces si consideramos otro punto cualquiera del plano $P(x, y, z)$, tenemos que:

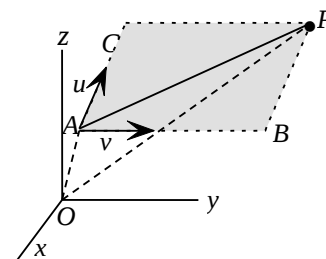
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y forman, también, un sistema generador de ese plano, el vector $\overrightarrow{AP}$ debe ser combinación de ellos, es decir:

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$$

por tanto,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \quad \text{Ecuación vectorial del plano}$$



$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad \rightarrow \text{Ecuación vectorial del plano}$$

Ecuaciones paramétricas del plano:

Las ecuaciones paramétricas se obtienen de la ecuación vectorial en coordenadas.

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y &= y_0 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z &= z_0 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{Ecuaciones paramétricas del plano}$$

Ecuación general o implícita del plano:

La ecuación general del plano se obtiene eliminando λ y μ en las ecuaciones paramétricas. Para ello, podemos considerar el sistema anterior como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas λ y μ . Procediendo a despejar esas incógnitas, el sistema quedará:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y - y_0 &= \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z - z_0 &= \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{aligned} \right\}$$

donde las matrices de coeficiente y ampliada son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

Pero si queremos que el sistema tenga solución, teniendo en cuenta que el rango de la matriz de coeficientes es 2 (ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes), para que este sistema tenga solución, el rango de la matriz ampliada ha de ser también 2 lo que exige que el determinante de dicha matriz sea nulo, es decir,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando ese determinante obtendremos la ecuación implícita del plano, que tendrá la forma:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad \text{Ecuación implícita del plano}$$

Ejemplo:

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y tiene por vectores directores $\vec{u} = (0, 1, -3)$ y $\vec{v} = (1, -1, 2)$

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda \cdot (0, 1, -3) + \mu \cdot (1, -1, 2) \quad \text{Ecuación vectorial del plano}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + \mu \\ y &= 1 + \lambda - \mu \\ z &= 3 - 3\lambda + 2\mu \end{aligned} \right\} \quad \text{Ecuaciones paramétricas del plano}$$

$$\begin{vmatrix} x - 2 & 0 & 1 \\ y - 1 & 1 & -1 \\ z - 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{desarrollando el determinante: } 2(x-2)-3(y-1)-(z-3)-3(x-2)=0 \text{ y queda:}$$

$$-x - 3y - z + 8 = 0 \rightarrow \boxed{x + 3y + z - 8 = 0} \quad \text{Ecuación implícita del plano}$$

Ecuación de un plano dado por tres puntos:

Dados A, B y C, tres puntos no alineados. Para determinar la ecuación del plano, obtenemos dos vectores, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Con los vectores obtenidos y uno de los tres puntos, por ejemplo, el A, podemos formar la ecuación.

Ejemplo:

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2, 1, 3), B(3, 3, 2) y C(3, 2, 5).

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -1); \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 1, 2)$$

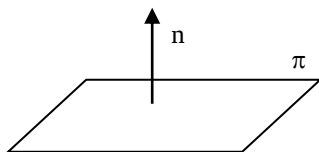
Si elegimos, por ejemplo, el punto A(2, 1, 3), resulta:
$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z-3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{y desarrollando el determinante,}$$

$$4(x-2) - 1(y-1) + 1(z-3) - 2(z-3) + 1(x-2) - 2(y-1) = 0$$

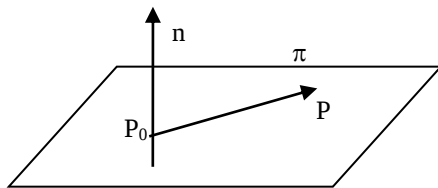
Quitando paréntesis y agrupando términos, obtenemos $5x - 3y - z - 4 = 0$

Ecuación normal del plano:

Definición: Diremos que un vector $\vec{n}$ es un vector normal a un plano π si es perpendicular a él. Es evidente que si un vector es normal a un plano, entonces es perpendicular a cualquier vector que esté en ese plano.



Pues bien, otra forma de determinar un plano será entonces dar un punto y un vector normal a él, pues es sencillo ver que dando una dirección perpendicular queda determinada la dirección de mi plano. Veamos entonces cómo obtener la ecuación implícita de un plano a partir de lo anterior. Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto del plano y $\vec{n} = (A, B, C)$ es un vector normal al plano, consideremos otro punto cualquiera del plano $P(x, y, z)$ como vemos en la figura:



De lo anterior y la definición vista tenemos que: $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$ por lo que su producto escalar será 0:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

Y expresándolo en coordenadas: $(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ Ecuación normal

De donde desarrollando, obtenemos la ecuación implícita:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow Ax + B \cdot y + C \cdot z + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

Llamando $d = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ nos queda $Ax + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ Ecuación general

Ejemplo:

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, -2, 0)$ y tiene por vector normal $\vec{n} = (4, 3, 5)$.

Sustituyendo: $(4, 3, 5) \cdot (x - 1, y + 2, z) = 0$ *Ecuación normal*

que desarrollada nos queda: $4(x-1)+3(y+2)+5z=0$ y simplificando llegamos a la general:

$$\boxed{4x+3y+5z+2=0} \quad \text{Ecuación implícita del plano}$$

Utilidades del vector normal del plano

Haz de planos perpendicular a un vector dado:

Si nos dan un vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$, entonces todos los planos perpendiculares a él tendrán la forma:

$$\boxed{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + k = 0 \quad \text{con } k \in \mathfrak{R}} \quad \text{Haz de planos perpendiculares a } \vec{n} = (a, b, c)$$

Ese conjunto de planos serán todos perpendiculares a $\vec{n}$ (y, por supuesto, todos paralelos entre sí).

Ejemplo:

Dado un vector normal $\vec{n} = (2, -1, 3)$, calcula el haz de planos perpendiculares a él.

El haz de planos será: $2x - y - 3z + k = 0$

Cálculo de un plano dado un vector normal y un punto:

Si nos dan un vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$ y además un punto cualquiera del plano $P_0(x_0, y_0, z_0)$, ya no tendremos un haz de planos sino que tendremos un plano concreto.

Según el apartado anterior, a partir de $\vec{n} = (a, b, c)$ sabemos que el plano que buscamos tendrá la forma $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + k = 0$ con $k \in \mathfrak{R}$, y sustituyendo las coordenadas del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ahí en el haz (que tendrá que cumplirla por ser un punto del plano) calculamos cuanto vale k que será el valor concreto de nuestro plano.

Ejemplo:

Dado un vector normal $\vec{n} = (2, -1, 3)$ y un punto $A(1, -2, 0)$, calcula el plano que determinan.

El haz de planos será: $2x - y - 3z + k = 0$ y ahora, sustituyendo las coordenadas de A:

$$2 \cdot 1 - (-2) - 3 \cdot 0 + k = 0 \quad \text{de donde se deduce que } k = -4$$

Por tanto, nuestro plano será: $2x - y - 3z - 4 = 0$

Plano paralelo a uno dado que pasa por un punto:

Si nos dan un plano $\pi: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$, y nos piden que calculemos el plano paralelo a π que pase por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, por todo lo visto anteriormente sabemos que un plano paralelo a π tendrá el mismo vector normal, por lo que será de la forma:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + k = 0 \quad \text{con } k \in \mathfrak{R}$$

Y sustituyendo el punto calculamos k tal y como haríamos antes.

Ejemplo:

Dado el plano $2x - y - 3z - 4 = 0$, calcula otro plano paralelo a él que pase por el punto $A(3, 5, -2)$, calcula el plano que determinan.

El haz de planos será: $2x - y - 3z + k = 0$ y ahora, sustituyendo las coordenadas de A:

$$2 \cdot 3 - 5 - 3 \cdot (-2) + k = 0 \text{ de donde se deduce que } k = -7$$

Por tanto, nuestro plano será: $2x - y - 3z - 7 = 0$

Cálculo de un vector perpendicular a un plano:

De la misma forma que dado un vector podemos calcular el haz de planos perpendiculares a éste, si tenemos un plano $ax + by + cz + d = 0$, un vector normal a ese plano será $\vec{n} = (a, b, c)$

Ejemplo:

Dado el plano $5x - 3y - z - 4 = 0$ calcula un vector normal a dicho plano.

Un vector normal sería: $\vec{n} = (5, -3, -1)$

(Nota: cualquier otro vector múltiplo de $\vec{n} = (5, -3, -1)$ también sería normal al plano).

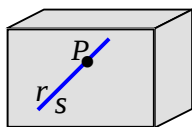
3. Posiciones relativas de rectas y planos. Incidencia y paralelismo.

En este apartado nos vamos a preguntar las posiciones relativas entre los diferentes elementos del espacio, sobre todo, rectas y planos. Así, analizaremos las posiciones relativas entre:

- Dos rectas
- Una recta y un plano
- Dos planos
- Tres planos.

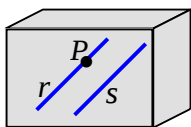
Posición relativa de dos rectas en el espacio

Dos rectas en el espacio pueden tener las siguientes posiciones relativas entre sí:



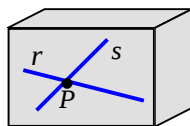
Coinciden

- Misma dirección
- Algún punto en común.



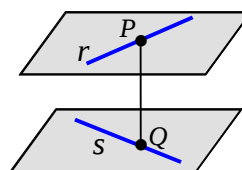
Son paralelas

- Misma dirección
- Ningún punto en común.



Se cortan

- Distinta dirección.
- Un punto en común.



Se cruzan

- Distinta dirección.
- Ningún pto en común

Posición relativa de dos rectas conocidos sus vectores directores y un punto de cada una:

Vamos a considerar las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = x_1 + \mu v_1 \\ y = y_1 + \mu v_2 \\ z = z_1 + \mu v_3 \end{cases}$$

Está claro que de cada una podemos extraer un vector y un punto:

$$r: \begin{cases} P(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} Q(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$$

Primero vemos que la condición para que dos vectores sean paralelos es que sean proporcionales, es decir $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, e igualando coordenada a coordenada y despejando λ cada vez tenemos que:

$$\lambda = \frac{u_1}{u'_1} = \frac{u_2}{u'_2} = \frac{u_3}{u'_3} \quad \text{Condición de paralelismo de vectores}$$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos esas rectas deben ser paralelas o coincidentes (pues tendrían la misma dirección). Para distinguir cada caso basta tomar un punto de una de ellas, por ejemplo, el punto P de r y entonces:

Si $P \in s \Rightarrow$ las rectas son coincidentes.

Si $P \notin s \Rightarrow$ las rectas son paralelas.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos esas rectas deben ser secantes o se cruzan. La diferencia radica entonces en si las dos están en el mismo plano (secantes) o no lo están (se cruzan). Si tomamos entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$, esas rectas estarán o no en el mismo plano dependiendo de si ese vector es o no coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Así:

Si $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son coplanarios $\Rightarrow$ se cortan.

Si $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son coplanarios $\Rightarrow$ se cruzan.

$\Rightarrow$ Si $\det(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ son coplanarios, es decir, están en un mismo plano.

Posición relativa de dos rectas mediante rangos:

Vamos a considerar las rectas anteriores

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = x_1 + \mu v_1 \\ y = y_1 + \mu v_2 \\ z = z_1 + \mu v_3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} Q(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$$

Formamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ y consideramos la matriz M' formada por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{PQ}$ y la submatriz M formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x_1 - x_0 \\ u_2 & v_2 & y_1 - y_0 \\ u_3 & v_3 & z_1 - z_0 \end{pmatrix}}^M$$

M'

Rg (M)	Rg(M')	Posición relativa de r y s
1	1	Coincidentes
	2	Paralelas
2	2	Se cortan
	3	Se cruzan

Ejemplo:

Estudia la posición relativa de las rectas $r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$

Si extraemos un punto y un vector de cada una:

$$r : \begin{cases} P(2, 3, 0) \\ \vec{u} = (-3, 5, 1) \end{cases} \quad y \quad s : \begin{cases} Q(1, 0, 5) \\ \vec{v} = (-1, 2, 0) \end{cases} \quad \text{y formamos además el vector } \overrightarrow{PQ} = (-1, -3, 5)$$

$\underbrace{\quad}_{M'}$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{M'}$

Puede comprobarse que $Rg(M) = 2$ y que $Rg(M') = 2$ ya que:

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -30 + 3 + 2 + 25 = 0. \quad \text{Por tanto, se cortan en un punto}$$

Rg (M)	Rg(M')	Posición relativa de r y s
2	2	Se cortan

Vamos a calcular el punto en el que se cortan:

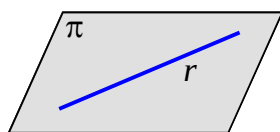
Para ello, igualamos coordenada a coordenada las dos ecuaciones $r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$

y nos quedará: $\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = 2\mu \\ \lambda = 5 \end{cases}$ Resolviendo el sistema se obtiene $\lambda = 5$; $\mu = 14$.

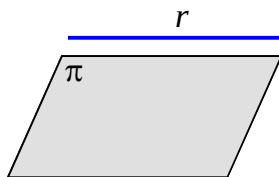
Se cortan en el punto $P(-3, 28, 5)$.

Posición relativa de una recta y un plano

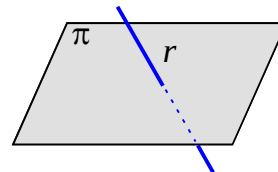
Al estudiar la posición relativa entre una recta y un plano, pueden darse los siguientes casos:



Recta contenida en el plano



Paralelos



Secantes (se cortan en un punto)

Podemos afrontar el estudio desde diversos puntos de vista, pero lo más fácil es considerar la recta en forma paramétrica y el plano en forma general.

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

Si ahora sustituimos cada coordenada de la recta en la ecuación del plano, nos puede quedar uno de los siguientes casos:

- Si al operar y simplificar se llega a $0 = 0$, desapareciendo el valor de λ , es porque todos los puntos de la recta son soluciones válidas, lo que significa que la recta está contenida en el plano.
- Si llegamos al absurdo $0 = k$, siendo $k \neq 0$, es porque no hay solución, luego la recta es paralela al plano.
- Si se llega a una solución $\lambda = k$, es porque la recta corta al plano en un punto. Dicho punto se obtiene sustituyendo el valor de λ en la recta.

Ejemplo:

Estudia la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y el plano $5x - 3y - z - 4 = 0$
--

Si sustituimos las coordenadas de la recta en la ecuación del plano tendremos:

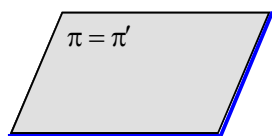
$$5(2 - 3\lambda) - 3(3 - 5\lambda) - \lambda - 4 = 0 \quad \text{o también:} \quad 10 - 15\lambda - 9 + 15\lambda - \lambda - 4 = 0 \quad \text{de donde} \quad \lambda = -3$$

Esto significa que hay un punto en común, es decir, se cortan y el punto de corte será el que resulte de sustituir λ en la ecuación de la recta:

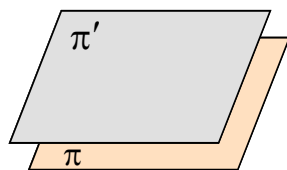
$$\begin{cases} x = 2 - 3(-3) \\ y = 3 - 5(-3) \\ z = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11 \\ y = 18 \\ z = -3 \end{cases}$$

Posición relativa de dos planos

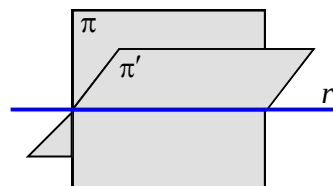
La posición relativa que dos planos pueden ocupar en el espacio es una de las siguientes:



Coincidentes



Paralelos



Secantes (se cortan en una recta)

Vamos a ver como podemos averiguar cuando se da cada caso.

Sean los planos
$$\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Estudiando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, resultan los siguientes casos:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}; \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Rg (M)	Rg(M')	Posición relativa de π y π'
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelos
2	2	Se cortan

Todo esto es fácil de entender ya que:

Si $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 1$, serán proporcionales los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes, es decir, son el mismo plano, luego **planos coincidentes**.

Si $\text{rang}(M) = 1$ y $\text{rang}(M^*) = 2$, serán proporcionales los coeficientes de las incógnitas, pero los términos independientes no siguen la relación de proporcionalidad. Serían casi iguales, es decir, **planos paralelos**.

Si $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$, los coeficientes no son proporcionales, por lo que no habrá ningún tipo de paralelismo. Los planos se cortan en una recta y serán **planos secantes**.

Ejemplo:

Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + y + z + 1 = 0$; $\pi_2 : x + 2z = 0$

Si escribimos la matriz de coeficientes, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, vemos a simple vista, que los coeficientes no son proporcionales, por tanto, $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$ y los planos se cortan en una recta.

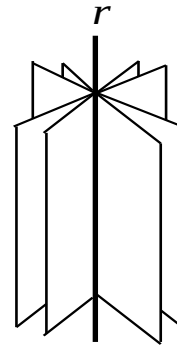
Para hallar la ecuación de la recta, basta resolver como si fuese un sistema de ecuaciones indeterminado, es decir, hacemos $z = \lambda$ y entonces resulta $x = -2\lambda$. Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene $y = -1 + \lambda$

La recta intersección, en paramétricas, es
$$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Haz de planos

Dada una recta $r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ se llama haz de planos secantes de arista r , al conjunto de todos los planos que pasan por r . El haz de planos viene definido por la siguiente ecuación:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$



Ejemplo:

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$

El haz de planos que pasa por r es: $2x - y + 3 + \lambda(3x + y + z - 2) = 0$ o bien,

$$(2 + 3\lambda)x + (-1 + \lambda)y + \lambda z + (3 - 2\lambda) = 0$$

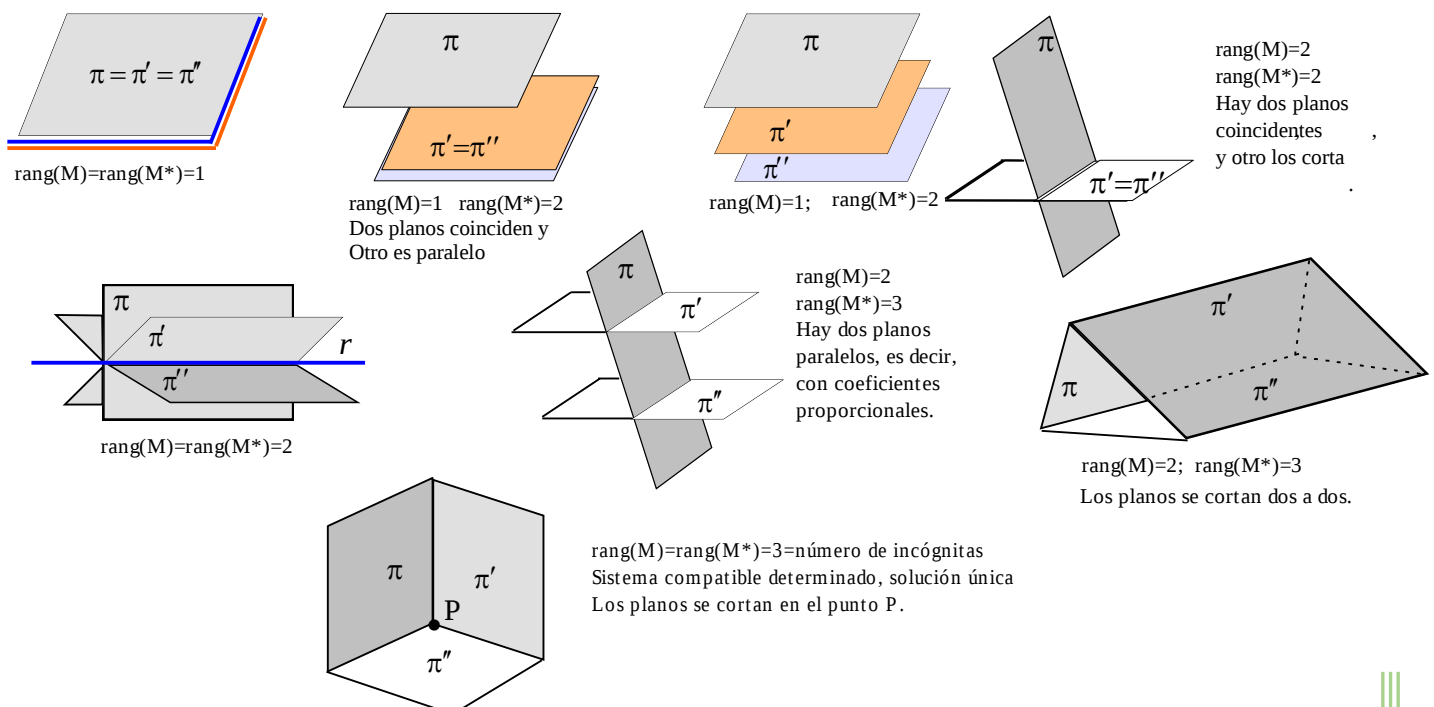
Si es paralelo a s , los vectores $(-1, 2, -1)$ y $(2 + 3\lambda, -1 + \lambda, \lambda)$ deben ser perpendiculares, por tanto, el producto escalar es nulo: $-1(2 + 3\lambda) + 2(-1 + \lambda) - 1(3 - 2\lambda) = 0$

Resolviendo la ecuación obtenemos $\lambda = -2$. y sustituyendo en la ecuación del haz, obtenemos

$$4x + 3y + 2z - 7 = 0$$

Posición relativa de tres planos

Antes de nada debemos preguntarnos la posición que pueden ocupar tres planos en el espacio. Las únicas posibles son las siguientes:



Supongamos que tenemos tres planos en forma general:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$\pi'' \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

Está claro que los tres planos forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que nosotros ya sabemos discutir. Pues de esa discusión que hagamos saldrán las posiciones relativas.

Considerando la matriz de coeficientes y la matriz ampliada y calculando sus rangos podemos obtener uno de los siguientes casos:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}; \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Rg (M)	Rg(M')	Posición relativa
1	1	Coincidentes
	2	Dos coinciden y otro es paralelo
		Los tres son paralelos
2	2	Dos coinciden y otro los corta
		Se cortan los tres en una recta
	3	Dos paralelos y otro los corta
		Se cortan dos a dos
3	3	Se cortan en un punto

Ejemplos:

Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : 2x + y - z + 6 = 0$ $\pi_2 : 3x - y + z + 5 = 0$ $\pi_3 : 4x + 2y - 2z + 1 = 0$

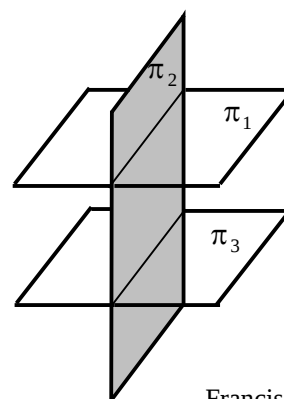
Observando la matriz de coeficientes y la ampliada: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos que la tercera fila de M es el doble de la primera, coeficientes proporcionales, luego los planos π_1 y π_3 son paralelos pero no coincidentes porque no existe esa proporcionalidad entre los términos D y D''.

Por otra parte, el plano π_2 es secante con π_1 y también con π_3 luego la posición es la que aparece en el dibujo.

También puede verse a través del rango.

$Rg(M)=2$ y $Rg(M^*)=3$ y además hay dos planos paralelos.



Halla el valor de k para que los planos $x + y + z = 2$; $2x + 3y + z = 3$ y $kx + 10y + 4z = 11$, se corten en una recta.

Sabemos que para que los tres planos se corten en una recta se ha de verificar que $\text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$.

Así pues, considerando el sistema que determinan los tres planos

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ kx + 10y + 4z = 11 \end{array} \right\} \text{ tenemos que hallar } k \text{ para que dicho sistema cumpla: } \text{rang}(M) = \text{rang}(M^*) = 2$$

Aplicando el método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10-k & 4-k & 11-2k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 14-2k & 21-3k \end{pmatrix}$$

Está claro que para que el $\text{Rg}(M)$ sea 2, la tercera línea debe anularse completamente y esto ocurre para $k = 7$.

