

1. Vectores y operaciones

Un **vector fijo** en el plano queda determinado por un par de puntos del plano, dados en cierto orden. El primer punto A, se denomina origen del vector, y el segundo B, extremo del vector. Se representa geoméricamente mediante una flecha que va de A a B y se designa por $\vec{AB}$.

El **módulo** de un vector es la distancia entre A y B, y se representa por $|\vec{AB}|$ y es siempre un número positivo.

La **dirección** de un vector es la dirección de la recta que pasa por su origen y por su extremo y la de todas sus paralelas.

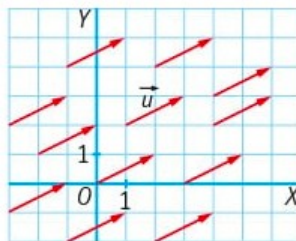
El **sentido** de un vector es el que queda determinado la ir desde el origen al extremo.

Ejercicio propuesto: Representa dos vectores que tengan la misma dirección pero distinto sentido.

Un **vector nulo** es un vector fijo cuyo origen y extremo coinciden, su módulo es 0 y no tienen dirección.

Dos vectores son **equipotentes** (iguales) cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Dado un vector fijo en el plano, al conjunto de todos los vectores equipotentes a él se le denomina **vector libre**. Se representan con letras minúsculas $\vec{u}$. Cada uno de los vectores fijos que conforman un vector libre se denomina **representante del vector libre**.

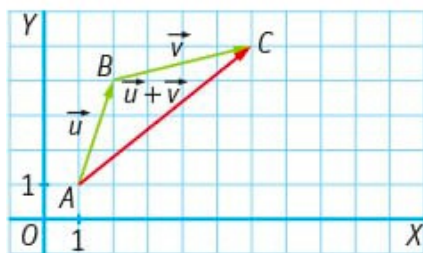


• Suma y resta de vectores

Para sumar gráficamente dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se pueden utilizar dos procedimientos:

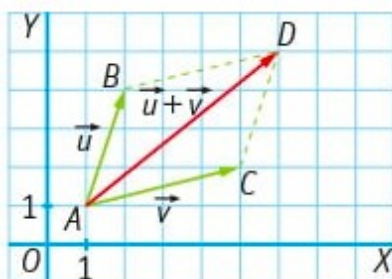
1) **Método del triángulo**: Tomamos un representante $\vec{AB}$ del vector libre $\vec{u}$ y un representante $\vec{BC}$ del vector libre $\vec{v}$ de tal forma que el extremo de uno coincida con el origen del otro.

La suma de vectores $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector libre que tiene como uno de sus representantes el vector de origen A y extremo C.

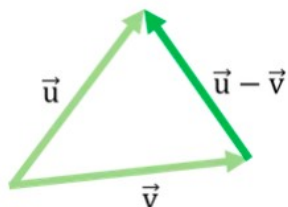


Para la resta debemos tener en cuenta que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

2) **Regla de paralelogramo:** Tomamos un representante $\vec{AB}$ del vector libre $\vec{u}$ y un representante $\vec{AC}$ del vector libre $\vec{v}$, ambos con el mismo origen. Construimos el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$. El cuarto vértice es el punto D. La suma de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ coincide con la diagonal del paralelogramo ABCD y es el vector libre que tiene como origen A y extremo D.



La resta de los vectores $\vec{u} - \vec{v}$ coincide con la diagonal del paralelogramo ABCD y es el vector libre que tiene como origen C y extremo B.



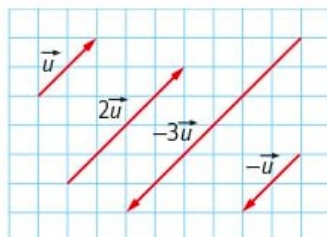
• Producto de un número real por un vector libre

Gráficamente, el producto de un número real $k \neq 0$ por un vector libre $\vec{u}$, no nulo, es otro vector $k\vec{u}$ para el que se verifica:

El módulo es el producto del valor absoluto de k por el módulo de $\vec{u}$: $|k\vec{u}| = |k||\vec{u}|$.

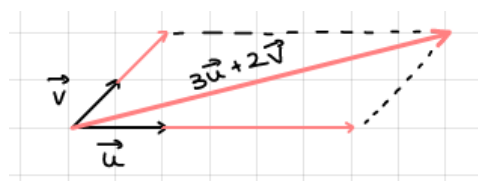
La dirección de $k\vec{u}$ es la misma que la de $\vec{u}$.

El sentido coincide con el sentido de $\vec{u}$ si $k > 0$ y es contrario si $k < 0$.



2. Bases y coordenadas

Una combinación lineal de dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es cualquier expresión algebraica de la forma $a\vec{u}+b\vec{v}$ con $a,b\in\mathbb{R}$.



Dos o más vectores son **linealmente dependientes** si alguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros.

Cuando en un conjunto de vectores no hay relación de dependencia lineal, se dice que son **linealmente independientes**.

Si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, cualquier otro vector $\vec{w}$ se puede escribir como combinación lineal de ellos $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

En este caso se dice que $B(\vec{u},\vec{v})$ es una **base** del conjunto de vectores y que (a,b) son las coordenadas de $\vec{w}$ respecto a la base.

Al conjunto de todos los vectores en el plano se le denomina plano vectorial y se denota por V^2

- Si los dos vectores de la base son perpendiculares se dice que forman una **base ortogonal**.
- Si además tienen módulo 1 se dice que forman una **base ortonormal**.

Los vectores $\vec{u}=(1,0)$ y $\vec{v}=(0,1)$ forman una base ortonormal y podemos escribir cualquier vector como combinación lineal de ellos. Son linealmente independientes, son perpendiculares y tienen módulo 1.

Ejemplo: Comprueba que $\vec{u}=(3,-1)$ y $\vec{v}=(-1,2)$ forman una base de V^2 y comprueba que el vector $\vec{w}=(2,6)$ está en esa base.

Para que formen una base $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen que ser linealmente independientes y para ello debe cumplirse que $\vec{u}\neq k\cdot\vec{v}$ y $\vec{v}\neq k\cdot\vec{u}$.

Como no son proporcionales son linealmente independientes ya que $\frac{3}{-1}\neq\frac{-1}{2}$.

Para ver que $\vec{w}$ está en la base tenemos que buscar una combinación lineal con $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$(2,6)=a(3,-1)+b(-1,2)\Rightarrow\begin{cases} 3a-b=2 \\ -a+2b=6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} \text{ como hemos encontrado una combinación lineal}$$

está en la base.

Ejercicio propuesto: ¿Los vectores $\vec{u}=(6,-2)$ y $\vec{v}=(-3,1)$ pueden formar una base?

Operaciones con coordenadas

Las **coordenadas** del vector de origen el punto $A(a_1, a_2)$ y de extremo el punto $B(b_1, b_2)$ son las de extremo menos las de origen: $\vec{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

El **módulo** del vector $\vec{u} = (a, b)$ se calcula: $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

El **argumento** de un vector es el ángulo que forma dicho vector con la parte positiva del eje x y se representa por α o $\arg(\vec{u})$. El módulo del vector $\vec{u} = (a, b)$ se calcula de la siguiente forma: $\arg(\vec{u}) = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$.

Un vector es **unitario** si tiene módulo 1. Para todo vector $\vec{u}$ existe un vector unitario con la misma dirección y sentido. $\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

Ejemplo: Calcula el módulo, argumento y vector unitario del vector $\vec{u} = (3, 4)$.

- $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- $\arg(\vec{u}) = \arctg\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13^\circ$
- $\vec{v}_{\vec{u}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Para **sumar o restar** dos vectores dadas sus coordenadas basta sumar sus respectivas componentes: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$.

Ejemplo: Calcula la suma del vector $\vec{u} = (3, 2)$ y el vector $\vec{v} = (-2, 4)$.
 $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (-2, 4) = (1, 6)$

Para **multiplicar** usando coordenadas un número por un vector, basta con multiplicar el número por sus coordenadas: $k\vec{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$.

Ejemplo: Calcula el producto de $k=3$ por el vector $\vec{v} = (-1, 5)$: $k \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-1, 5) = (-3, 15)$.

3. Sistema de referencia euclideo

El sistema de referencia del plano euclideo $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ está formado por el punto $O(0, 0)$ que es el origen de coordenadas y los vectores que forman una base ortonormal $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$. $B(\vec{i}, \vec{j})$ se llama base canónica.

4. Producto escalar de vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ llamamos producto escalar a: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ siendo α el ángulo que forman los vectores, el resultado es un número no un vector. Esta operación también se puede hacer con las coordenadas: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$.

Propiedades

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.
- $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

Ejemplo: Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (3, 4)$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{12 + 12}{\sqrt{16 + 9} \cdot \sqrt{9 + 16}} = \frac{24}{25}$$

$$\alpha = \arccos \frac{24}{25} = \arccos 0,96 = 16^\circ 16'$$

Ejercicio propuesto: Halla el valor de k para que los siguientes vectores $\vec{u} = (k, -4)$ y $\vec{v} = (2, 3)$ sean perpendiculares.

5. Aplicaciones de los vectores

Cálculo del punto medio de un segmento

Si tenemos un segmento de extremos A(x₁, y₁) y B(x₂, y₂), el punto medio del segmento M, tendrá

como coordenadas: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Ejemplo: Calcula el punto medio del segmento de extremos A(-1, 2) y B(3, -4):

$$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+(-4)}{2}\right) = M(1, -1)$$

Cálculo del simétrico

Cuando nos den las coordenadas de un extremo A y del punto medio M y nos pidan las coordenadas del otro extremo B. Para calcularlas utilizaremos la fórmula del punto medio.

Ejemplo: Calcula el punto simétrico de A(2, 2) respecto de M(1, -1) :

$$1 = \frac{2 + x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 0$$

Por lo tanto el punto simétrico será B(0, -4)

$$-1 = \frac{2 + y_2}{2} \Rightarrow y_2 = -4$$

Condición para que tres puntos estén alineados

Tres puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ están alineados si los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ tienen la misma dirección, y esto se cumple siempre que sus coordenadas sean proporcionales.

Ejemplo: Calcula el valor de a para que los siguientes puntos estén alineados: $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(6, a)$.

$$\vec{AB} = B - A = (4 - 2, 2 - 1) = (2, 1)$$

$$\vec{BC} = C - B = (6 - 4, a - 2) = (2, a - 2)$$

$$\frac{2}{2} = \frac{1}{a-2} \Rightarrow (a-2) \cdot 2 = 2 \cdot 1 \Rightarrow a-2 = 1 \Rightarrow a = 3$$