

U7 - Resolución Numérica de Ecuacións - TEORÍA

O cálculo numérico é a rama das matemáticas que busca atopar solucións aproximadas a problemas complexos empregando as operacións aritméticas máis sinxelas. Ao longo desta unidade, tentaremos obter unha serie de algoritmos que nos permitan aproximar as solucións dunha ecuación. Estes algoritmos adoitan estar xa implementados en programas matemáticos.

1 - ERROS

Os métodos de cálculo numérico buscan unha aproximación da solución. Como case sempre se obterá unha solución aproximada en lugar dunha exacta, cometerase un **erro**, que é a **diferencia entre o valor exacto e o aproximado**.

1.1.- Tipos de erros

Os erros nos cálculos poden clasificarse en dúas categorías:

- **Erro absoluto:** É a diferenza entre o valor exacto e o valor calculado.

Exemplo: supoñamos que calculamos a raíz cadrada de 2. Sabemos que o valor real é aproximadamente $\sqrt{2}=1.414213562\dots$. Se redondeamos este valor a $\sqrt{2}\approx 1.414$, entón $E_A=|1.414213562\dots - 1.414|=0.000213562\dots$

Como o erro absoluto pode ser imposible de calcular, xa que o valor exacto é descoñecido, debemos traballar acoutando o erro. Neste caso debemos aproximar o erro por exceso:

$$E_A=0.000213562\dots < 0.000213563 < 0.00022$$

- **Erro relativo:** É o cociente entre o erro absoluto e o valor real. Dáanos unha idea mellor de canto é de significativo o erro en relación co tamaño dos números implicados. O que facemos con isto é calcular o erro que cometemos por unidade. Usando o mesmo exemplo da raíz cadrada de 2:

$$ER=\frac{0.000213562}{1.414213562}\approx 0.000151, \text{ o que significa que o erro está preto do } 0,0151 \% \text{ do valor real.}$$

O erro relativo é máis relevante. Coñecer o erro absoluto non é moi útil se non se coñece a magnitude da cantidade que se mide. Por exemplo, un erro absoluto de 10 cm ao determinar a altura dunha persoa pode ser relevante, pero isto sería irrelevante en astronomía.

2 - APROXIMACIÓN DE SOLUCIÓNS

Nunha ampla variedade de situacións, xorde de xeito natural o problema de atopar as raíces dunha ecuación. A experiencia amósanos que isto non é, en xeral, unha tarefa sinxela.

Exemplo: Podemos demostrar que ecuacións como $e^{-x} - 2x = 0$ ou $\tan x - x = 0$ teñen raíces reais, pero non existe ningún método para calculalas de forma exacta.

Cando a nosa ecuación ten a forma $f(x)=0$, chamámoslle **raíz** a calquera número a tal que $f(a)=0$.

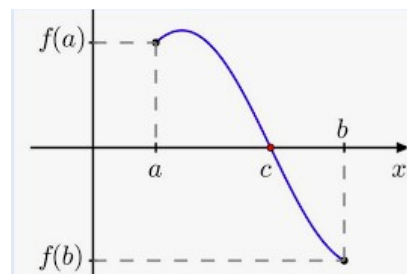
Empregaremos dous tipos de ferramentas para resolver ecuacións:

- a) **Métodos para localizar solucións:** teñen como obxectivo atopar un intervalo no que se aseguremos que hai unha ou máis solucións da ecuación.
- b) **Métodos para calcular solucións aproximadas:** teñen como obxectivo calcular de forma aproximada estas solucións.

3 - TEOREMA DE BOLZANO

O teorema de Bolzano di que (i) se unha función é continua e (ii) que toma valores opostos en dous puntos, entón podemos garantir que polo menos hai unha raíz entre eses dous puntos:

Teorema de Bolzano: Supoñamos que $f(x)$ é unha **función continua** nun intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)$ e $f(b)$ teñen signos opostos. Entón existe un punto ou número $c \in (a,b)$ dentro do intervalo tal que $f(c)=0$.



Exemplo: Proba que a ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$ ten polo menos unha raíz real.

Consideramos a función $f(x) = x^3 - 4x - 2$. A función é continua en todo $\mathbb{R}$ porque é unha función polinómica:

$$f(0) = -2; \quad f(1) = -5; \quad f(2) = -2; \quad f(3) = 13$$

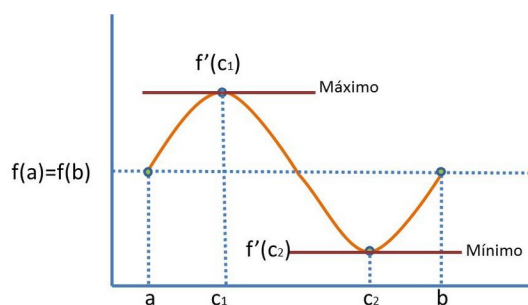
Como $f(x)$ é continua no intervalo $[2,3]$ e os signos de $f(2)$ e $f(3)$ son opostos, polo teorema de Bolzano existe un $c \in (2,3)$ tal que $f(c)=0$. Polo tanto, c será unha solución ou raíz da ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$

4 - TEOREMA DE ROLLE

O Teorema de Rolle é unha ferramenta para comprender o comportamento das funcións e garantir a existencia de puntos críticos. Os puntos críticos son aqueles nos que se anula a derivada e nos que hai un máximo, un mínimo ou un punto de inflexión. Nalgúns casos pode axudar indirectamente a demostrar a existencia de raíces.

Con todo, a existencia dunha raíz demostrase xeralmente empregando o Teorema de Bolzano

Teorema de Rolle: Sexa $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ unha función continua e diferenciable en (a,b) tal que $f(a)=f(b)$. Entón existe un (punto ou número) $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$.



Exemplo: Comprobar que a función $f(x) = x^2 - 4x$ verifica o Teorema de Rolle no intervalo $[0,4]$.

1.- Continuidade: A función $f(x) = x^2 - 4x$ é un polinomio, polo tanto é continua en calquera intervalo, incluído $[0,4]$.

2.- Diferenciabilidade: A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 2x - 4$, que tamén é un polinomio e está definida en calquera punto (ou número), incluído $(0,4)$.

3.- Condición de igualdade nos extremos: $f(0) = 0$ e $f(4) = 0$, logo satisfán a condición $f(a) = f(b)$.

Polo teorema de Rolle, sabemos que existe polo menos un punto c en $(0,4)$ tal que $f'(c) = 0$.

Para atopar ese punto, poñemos a derivada igual a cero: $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

5 - MÉTODO DA BISECCIÓN

Un **algoritmo** é un conxunto de instrucións ou pasos ben definidos que, se os seguimos, obtemos un certo resultado previsto, como resolver un problema ou realizar unha tarefa:

Coñeces moitos algoritmos das matemáticas: para resolver unha ecuación de 2º grao; para factorizar polinomios; para derivar funcións, para calcular límites, etc.

Chamamos **método numérico** a un algoritmo que permite obter as solucións aproximadas dun problema numérico. A **converxencia** dun método numérico indica que, con cada paso que damos, o resultado do cálculo mellora e achégase cada vez máis ao valor exacto (diminúe o erro).

Diremos que un método converxe cando, ao repetilo máis veces, o valor que obtemos achégase cada vez máis á solución exacta.

O método de bisección

É un algoritmo numérico que se utiliza para atopar raíces de ecuacións non lineais. Está baseado no teorema de Bolzano, que afirma que se unha función é continua nun intervalo $[a,b]$ e cambia de signo nos extremos, entón hai polo menos unha raíz nese intervalo.

O método consiste en reducir progresivamente o intervalo no que se atopa a solución, obtendo así unha aproximación da raíz ou un intervalo moi pequeno no que se atopará a solución.

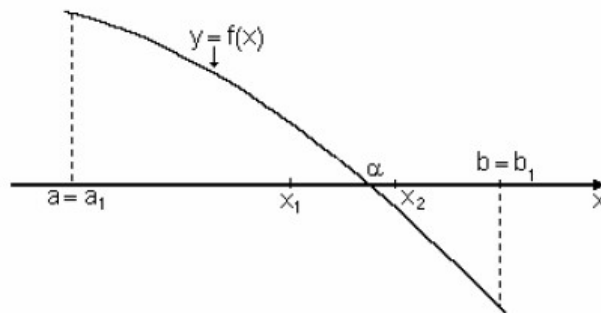
Método da bisección: sexa $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ unha función continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Polo teorema de Bolzano, sabemos que hai polo menos unha solución nese intervalo, polo que aplicamos o seguinte algoritmo:

1.- Calculamos o punto medio do intervalo (dividímolos pola metade): $x_1 = \frac{a+b}{2}$

a) Se $f(x_1) = 0$, entón x_1 é a solución que buscamos.

b) Se $f(x_1) \neq 0$, escollemos o intervalo $[a, x_1]$ ou $[x_1, b]$ seguindo o Teorema de Bolzano, é dicir, escollemos o intervalo cuxos extremos teñan signos opostos.

2.- Repetimos o proceso anterior, obtendo unha serie de puntos que converxen cara á solución exacta.



Exemplo: Atopa a raíz da ecuación $f(x) = x^3 - 6x - 8 = 0$ no intervalo $[2, 4]$ empregando o método de bisección. Realiza 3 iteracións.

◦ *Intervalo inicial: $[2, 4]$. $f(2) = 2^3 - 6(2) - 8 = -12$ $f(4) = 4^3 - 6(4) - 8 = 8$*

1.- Primeira iteración:

Punto medio: $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$. Como $f(3) = 3^3 - 6(3) - 8 = -5$ seleccionamos o intervalo $[3, 4]$

2.- Segunda iteración: Intervalo: $[3, 4]$

Punto medio: $x_2 = \frac{3+4}{2} = 3.5$.

Como $f(3.5) = (3.5)^3 - 6(3.5) - 8 = -0.875$ seleccionamos o intervalo $[3.5, 4]$

3.- Terceira iteración: Intervalo: $[3.5, 4]$

Punto medio: $x_3 = \frac{3.5+4}{2} = 3.75$.

Como $f(3.75) = (3.75)^3 - 6(3.75) - 8 = 1.171875$ seleccionamos o intervalo $[3.5, 3.75]$

Como debemos facer 3 iteracións, paramos aquí e obtemos que unha solución a esta ecuación se atopa no intervalo $[3.5, 3.75]$.

6 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de Newton-Raphson é outro exemplo dun método iterativo que mellora rapidamente a precisión dunha aproximación. Este método é útil para atopar as raíces de ecuacións non lineais.

Xeometricamente consiste en trazar sucesivas rectas tanxentes á función que cortan ao eixe OX moi preto da raíz da función.

Numericamente buscamos un *punto apropiado* x_0 e logo faremos $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, achegándonos de forma moi rápida á solución buscada.

Método de Newton-Raphson: Sexa $f(x)$ unha función continua en $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. Polo teorema de Bolzano, sabemos que hai polo menos unha solución nese intervalo, polo que empregamos o seguinte algoritmo:

1.- Escoller unha estimación inicial $x_0 \in [a, b]$ que estea próxima á raíz que se busca.

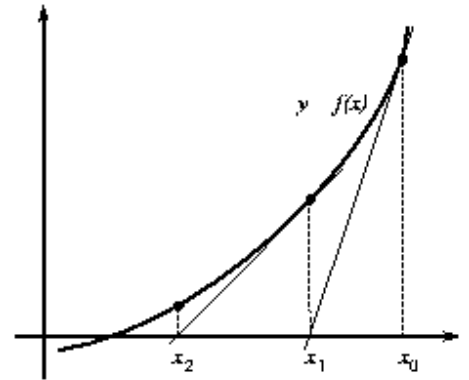
- Se $f(a) \cdot f'(a) < 0$ tomamos $x_0 = a$. En caso contrario:
- Se $f(b) \cdot f'(b) > 0$ tomamos $x_0 = b$. En caso contrario: $x_0 = \frac{a+b}{2}$

2.- Tomamos como aproximación o valor x_0 do paso 1.

- Se $f(x_0) = 0$ entón x_0 é a solución buscada. En caso contrario:
- Calculamos o seguinte iterante $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

3.- Tomamos como aproximación x_1 do paso anterior.

- Se $f(x_1) = 0$, entón x_1 é a solución buscada. En caso contrario:
- Se $f(x_1) \neq 0$ calculamos o seguinte iterante $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

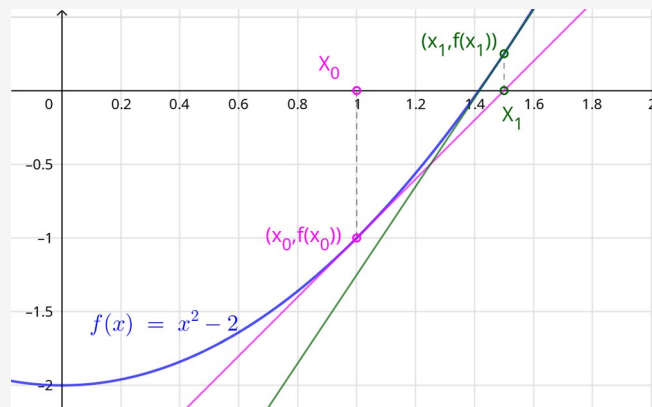


4.- Repetimos o proceso anterior as veces que sexa necesaria ata obter un valor con $f(x_n) \approx 0$, segundo o erro que consideremos aceptable.

Pode ocorrer que o método non converxa a unha solución do problema. O estudo desta situación excede o currículo desta materia.

Exemplo: Empregando o método de Newton-Raphson, calculemos unha aproximación da solución á ecuación $x^2 = 2$ con 4 decimais de precisión, é dicir, $f(x_n) \approx 0,0000$

$$f(x) = x^2 - 2 \quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2$$



1.- Procuramos un intervalo no que se cumpra o Teorema de Bolzano:

$$f(1) = -1 < 0 \text{ e } f(2) = 2 > 0$$

2.- Escollemos x_0

$$f(1) = -1 < 0 \text{ e } f'(1) = 2 > 0 \text{ logo } f(1) \cdot f'(1) < 0$$

Tomamos $x_0 = 1$

3.- Realizamos a primeira iteración:

$$f(x_0) = f(1) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Non temos a solución.}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{2} = 1,5$$

4.- Realizamos a segunda iteración:

$$f(1,5) = 0,25 \neq 0 \Rightarrow \text{Non temos a solución.}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,5 - \frac{0,25}{3} = 1,4167$$

5.- Realizamos a 3ª iteración:

$$f(1,4167) = 0,0070 \neq 0 \Rightarrow \text{Non temos a solución.}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,4167 - \frac{0,0070}{2,8334} = 1,4142$$

6.- Realizamos a 3ª iteración:

$$f(1,4142) = 0,00004 \approx 0 \Rightarrow \text{Tomamos como solución aproximada a } x = 1,4142.$$

7 - VANTAXES E INCONVENIENTES DE CADA MÉTODO

O método da bisección é útil para dar unha idea rápida da localización das solucións, é dicir, para determinar pequenos intervalos que conteñen unha solución; con todo, os cálculos aumentan considerablemente se queremos obter unha boa aproximación, xa que a converxencia é moi lenta.

En contraste, o método de Newton-Raphson converxe moito máis rápido e, ao realizar máis iteracións, a solución achégase máis á raíz verdadeira. A desvantaxe deste método é que necesitamos saber derivar, e se o valor inicial non está preto da solución ou a función ten puntos onde a derivada é cero ou moi pequena, o método pode fallar ou non converxer.