

1. Determina el valor de t para que los vectores de coordenadas (1, 1, t), (0, t, 1-t) y (1, -2, t) sean linealmente dependientes.

Si son linealmente dependientes, uno de ellos, se podrá expresar como combinación lineal de los otros restantes, por tanto,

$$(1, 1, t) = \alpha(0, t, 1-t) + \beta(1, -2, t)$$

$$\text{De aquí se obtiene: } \left. \begin{array}{l} \beta = 1 \\ \alpha t - 2\beta = 1 \\ \alpha(1-t) + \beta t = t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha t = 3 \\ \alpha(1-t) = 0 \end{array} \right\} \text{ Si } \alpha(1-t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ó } 1-t = 0 \Rightarrow t = 1 \quad // \quad \alpha = 3$$

La relación de dependencia es $(1,1,1) = 3 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (1,-2,1) \quad // \quad (1,1,1) - 3 \cdot (0,1,0) - 1 \cdot (1,-2,1) = (0,0,0)$

2. ¿Puede haber dos vectores u y v tales que $u \cdot v = -3$, $\|u\| = 1$ y $\|v\| = 2$?

Si α es el ángulo que forman, de la definición de producto escalar, se obtiene:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha \rightarrow -3 = 1 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -1,5 \quad (\text{imposible porque } -1 \leq \cos \alpha \leq 1)$$

3. Halla el valor de a para que los vectores $u = (-2,1,5)$ y $v = (a,2,6)$, sean perpendiculares.

Para que dos vectores sean perpendiculares, el producto escalar ha de ser nulo, por tanto,

$$(-2,1,5) \cdot (a,2,6) = 0 \Rightarrow -2a + 2 + 30 = 0 \rightarrow a = 16$$

4. Halla un vector w cuyo módulo sea 4 y además perpendicular a $u = (2,0,1)$ y $v = (3,-1,2)$

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a cada uno de ellos,

$$\text{Por tanto, } u \times v = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, -2)$$

Lo dividimos por su módulo para obtener un vector de módulo unidad:

$u \times v = (1, -1, -2)$ es perpendicular a u y a v .

$$\|u \times v\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}; \quad \frac{u \times v}{\|u \times v\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

El vector unitario obtenido lo multiplicamos por 4 y obtenemos el vector buscado:

$$w = 4 \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{4\sqrt{6}}{3} \right)$$

5. Comprueba si los vectores (1,2,3), (4,5,6) y (7,8,9) de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes.

Una forma de verlo es formar una matriz y aplicar la reducción de Gauss. Si se llega a una matriz escalonada, es decir, que tenga por debajo de la diagonal principal todos ceros pero que ninguna fila de la matriz sea nula, entonces los vectores dados son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ninguna fila es nula y por debajo de la diagonal principal todo son ceros. Los vectores dados son linealmente independientes.

Podemos también hallar el determinante de la matriz y si es distinto de cero, los vectores son linealmente independientes.

6. Consideremos el conjunto de los polinomios de grado dos con una indeterminada. Dichos polinomios pueden ser considerados como vectores. Estudia si los polinomios $A(x) = 1 - x + 4x^2$; $B(x) = 3 + 6x + 2x^2$ y $C(x) = 2 + 10x - 4x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

Los polinomios dados podemos expresarlos en la forma siguiente:

$$A = (1, -1, 4), B = (3, 6, 2) \text{ y } C = (2, 10, -4)$$

Si aplicamos el método de Gauss, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 10 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 9 & -10 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 36 & -40 \\ 0 & 36 & -36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 0 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a tres filas, ninguna de ellas nulas, y todos ceros por debajo de la diagonal principal.

Los polinomios dados son linealmente independientes.

7. El vector $v = (1,3,-2)$ está dado en la base canónica. Halla sus componentes respecto de la base $B = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,2,3)\}$

$$(1,3,-2) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \lambda(0,2,3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\lambda = 3 \\ \alpha + \beta + 3\lambda = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\beta + 2\lambda = 2 \\ 3\lambda = -3 \end{array} \Rightarrow \lambda = -1 \text{ y entonces } \beta = -4 // \alpha - 4 = 1 \Rightarrow \alpha = 5$$

$$\rightarrow (1,3,-2) = 5(1,1,1) - 4(1,0,1) - 1(0,2,3)$$

8. Estudia si los vectores $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(2, 1, -1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$

⇒ Tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

En nuestro caso si los vectores dados son linealmente independientes formarán una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (Aplicamos Gauss)}$$

Los vectores dados son linealmente dependientes y, por tanto, **no** forman una base de $\mathbb{R}^3$

9. Sean los vectores $a = (1, 0, -1)$, $b = (0, 2, -1)$ y $c = (2, 0, 0)$. Halla:

a) Valor absoluto del producto mixto de a , b y c y da su significado geométrico.

b) Ángulo que forman b y c .

c) Razona si $\{a, b, c\}$ forman una base y, en caso afirmativo, halla las coordenadas del vector $u = (1, -2, 0)$ en dicha base.

$$a) [a, b, c] = a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(0 - (-2)) = 4 \quad \rightarrow |4| = 4$$

→ El valor absoluto del producto mixto es el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores.

b) Para calcular el ángulo que forman b y c aplicamos la definición de producto escalar:

$$b \cdot c = \|b\| \cdot \|c\| \cdot \cos \alpha \text{ y de aquí}$$

$$\cos \alpha = \frac{b \cdot c}{\|b\| \cdot \|c\|} = \frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{0}{\sqrt{5} \cdot 2} = 0$$

Si $\cos \alpha = 0$, entonces $\alpha = 90^\circ$

c) Podemos hacerlo por el método de Gauss o bien por determinantes. Si el determinante es distinto de cero, los vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(0 - (-2)) = 4 \neq 0$$

→ Como estamos en $\mathbb{R}^3$ los vectores forman una base.

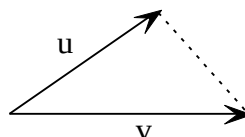
Esto significa que cualquier otro vector se puede expresar como combinación lineal de ellos. Si queremos hallar las coordenadas de $u = (1, -2, 0)$ respecto de la base, escribimos:

$$(1, -2, 0) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 2, -1) + \lambda(2, 0, 0) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha + 2\lambda = 1 \\ 2\beta = -2 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = -1; \alpha = 1; \lambda = 0.$$

10. Dados los vectores $u = (3, 2, 5)$ y $v = (4, 1, 6)$ halla el área del triángulo que determinan.

El área del triángulo determinado por dos vectores viene dada por la fórmula siguiente:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$



$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 7i + 2j - 5k = (7, 2, -5) \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78}$$

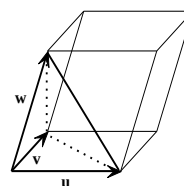
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{\sqrt{78}}{2}$$

11. Dados los vectores $u = (3, -2, 5)$, $v = (-4, 1, 6)$ y $w = (2, 0, -1)$, halla el volumen del tetraedro que determinan.

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del producto mixto tomado en valor absoluto.

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 24 - 10 + 8 = -29$$

$$\text{Volumen}_{(\text{tetraedro})} = \frac{1}{6} |-29| = \frac{29}{6}$$



12. Halla un vector unitario que tenga la misma dirección que $u = (1, 1, -2)$

Dado un vector u , entonces el vector $\frac{u}{\|u\|}$ es unitario.

$$\text{Módulo de } u: \quad \|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

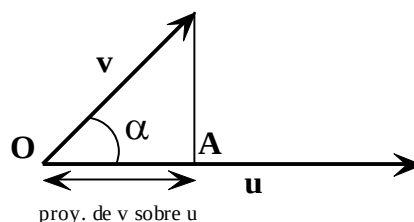
Por tanto, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ será unitario (modulo 1) y de la misma dirección que u .

13. Prueba que el producto escalar de dos vectores u y v , es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$

$$OA = \|v\| \cdot \cos \alpha = \text{proy. de } v \text{ sobre } u$$

$$\text{luego } u \cdot v = \|u\| \cdot OA$$

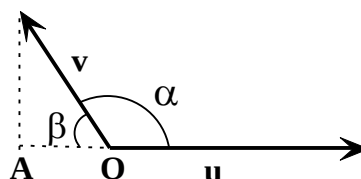


En el caso de que el ángulo sea obtuso se obtiene:

Los ángulos α y β son suplementarios

por tanto, $\cos \alpha = -\cos \beta$

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$



$$\|v\| \cdot \cos \alpha = -\|v\| \cos \beta = -OA$$

donde OA es la proyección de v sobre u

es decir, $u \cdot v = -\|u\| \cdot OA$

⇒ Cuando el producto escalar es positivo, el ángulo es agudo.

⇒ Cuando el producto es negativo, el ángulo es obtuso.

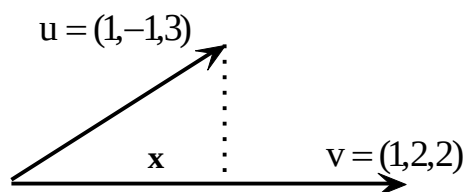
14. Halla la proyección ortogonal del vector $u = (1, -1, 3)$ sobre $v = (1, 2, 2)$

$$u \cdot v = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 5$$

El ángulo que forman los vectores es agudo

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$u \cdot v = \|v\| \cdot x \Rightarrow 5 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (que es la medida del segmento } x \text{)}$$



Dividimos el vector v por su módulo a fin de obtener un vector de la misma dirección y sentido pero de módulo unidad:

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3; \quad \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Finalmente, el vector unitario obtenido lo multiplicamos por $\frac{5}{3}$:

$$\text{proy. de } u \text{ sobre } v = \vec{x} = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

Ejercicios propuestos

1. Determinar los valores del parámetro a , para los cuales forman base de $\mathbb{R}^3$ los vectores $(a, 1, -2)$, $(1, a, 2)$ y $(2a, 1, 0)$.

[Sol. Para todo valor de a distinto de $\frac{1}{2}$ y de -1]

2. En el conjunto $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores siguientes:

$$u = (1, 2, -1), v = (3, -2, 0) \text{ y } w = (-7, 10, -2)$$

Prueba que son linealmente dependientes y encuentra la relación de dependencia.

[Sol. Basta comprobar que el determinante es nulo $2(1, 2, -1) - 3(3, -2, 0) - (-7, 10, -2) = (0, 0, 0)$]

3. Sean los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$ y $w = (2, 5a, -3a)$

Determina el valor numérico del parámetro a para que sean linealmente dependientes y encuentra una relación de dependencia.

[Sol. $a = 2$ $4(1, 2, -1) - 2(1, -1, 1) - 2(2, 10, -6) = (0, 0, 0)$]

4. Dados los vectores $A = (a, 8, 4)$, $B = (-1, 2, 0)$ y $C = (0, 1, 2)$. Halla los valores de a para que A se pueda expresar como combinación lineal de B y de C [Sol. $a = -3$]

5. Dados los vectores $u = (1, 2, 3)$ y $v = (1, -1, 1)$, se pide:

- ¿Son linealmente independientes?**
- Escribe un vector w tal que u, v y w sean linealmente independientes.**
- Encuentra un vector t , tal que u, v y t sean linealmente dependientes.**

[Sol.

- Son linealmente independientes porque sus coordenadas no son proporcionales.*
- Puede ser, por ejemplo, $w = (0, 0, 1)$. Aplíquese primero el método de Gauss*
- Basta tomar una combinación lineal de los vectores dados.]*

6. Prueba que los vectores $a = (1, 1, -1)$, $b = (1, -1, 1)$ y $c = (1, 1, 1)$ son una base de $\mathbb{R}^3$

Halla las componentes del vector $x = (-7, 9, 15)$ en esta base.

[Sol. Como son tres vectores, basta probar que son l.i. (determinante $\neq 0$) // $x = -11a - 8b + 12c$]

7. Determina la expresión general de los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1)$ y $((4, 1, 1))$

[Sol. $(\alpha + 4\beta, 2\alpha + \beta, -\alpha + \beta)$]

8. Los vectores $a = -i + 2k$, $b = 2i + j - k$ y $c = i + 2j + 2k$ están expresados en una base ortonormal.

Calcula: $a \times b$; $a \times (c \times a)$ y $a \cdot (a \times b)$

[Sol. $a \times b = -2i + 5j - k$; $a \times (c \times a) = 8i + 10j + 4k$; $a \cdot (a \times b) = 0$]

9. Sean u y v tales que $\|u\| = 2$, $\|v\| = 1$ y que forman un ángulo de 45° . Calcula λ de modo que $u + \lambda v$ sea perpendicular a u .

[Sol. $\lambda = -2\sqrt{2}$]

10. Dados los vectores $v = (2, 5, -1)$ y $u = (1, 0, 3)$, halla la proyección ortogonal de v sobre u .

[Sol. $x = \left(\frac{-1}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right)$]

11.- Dados los vectores $a = (1, 2, 1)$, $b = (3, 1, -2)$ y $c = (4, -1, 0)$, determina:

a) Su producto mixto [Sol. $[a, b, c] = -25$]

b) Volumen del paralelepípedo determinado por ellos. [Sol. $V = 25 u^3$]