

## VECTORES EN EL ESPACIO. PRODUCTO ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO

1. Sistemas de referencia afines.
2. Operaciones con vectores expresados en coordenadas.
3. Producto escalar: definición, propiedades y aplicaciones.
4. Producto vectorial: definición, propiedades y aplicaciones.
5. Producto mixto: definición, propiedades y aplicaciones.

### 1. Sistemas de referencia afines.

Llamamos sistema de referencia afín al conjunto formado por:

- I. Un punto fijo  $O$  del espacio, llamado origen.
- II. Una base cualquiera de dicho espacio.

Para facilitar nuestras operaciones, tomamos tradicionalmente el punto  $O(0,0,0)$  y como base, la base canónica  $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , por eso, un sistema de referencia en el espacio, queda expresado en la forma siguiente:

$$S = \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$$

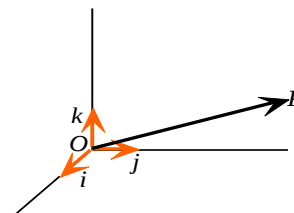
Elegido un sistema de referencia, a cada punto  $P(x,y,z)$  del espacio se le asocia el vector  $\overrightarrow{OP}$  que recibe el nombre de vector de posición.

Expresando el vector  $\overrightarrow{OP}$  como combinación lineal de los vectores que forman la base, existen tres números reales  $x, y, z$  tales que

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Los números  $x, y, z$  reciben el nombre de coordenadas del vector  $\overrightarrow{OP}$  y dicho vector se puede expresar simplemente así:

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$



### 2. Operaciones con vectores expresados en coordenadas.

#### Suma analítica de vectores

Para sumar dos vectores analíticamente, sumamos coordenada a coordenada de ambos vectores.

■ Si  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k} = (2, 3, -5)$  y  $\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k} = (-1, 4, -6)$ , entonces

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{i} + 7\vec{j} - 11\vec{k} = (1, 7, -11)$$

#### Producto analítico de un vector por un número real

Para multiplicar un vector por un número real, se multiplica cada una de las coordenadas del vector por ese número.

■ Siendo  $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (-3, 2, -1) \rightarrow 3\vec{u} = 3 \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = -9\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (-9, 6, -3)$

### 3. Producto escalar: definición, propiedades y aplicaciones.

Dados dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , llamamos producto escalar de esos dos vectores a:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$$

**Propiedades del producto escalar**

1.- Conmutativa:  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

2.- Asociativa respecto a los escalares:  $(k \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v})$

3.-  $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$  (ya que  $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0 \geq 0$ )

4.- Si  $\vec{u} = 0$  ó  $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ .

5.- Si  $\vec{u} \neq 0$  y  $\vec{v} \neq 0$  entonces  $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ ,

**“El producto escalar de dos vectores ( $\neq 0$ ) es 0 sí y sólo sí esos dos vectores son perpendiculares”.**

6.- Distributiva respecto a la suma de vectores:  $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

**Expresión en coordenadas del producto escalar:**

Si  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  son dos vectores cuyas coordenadas están expresadas respecto a una base ortonormal (por ejemplo, la base canónica), entonces:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

■ Si  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k} = (2, 3, -5)$  y  $\vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k} = (-1, 4, -6)$ , entonces

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + (-5) \cdot (-6) = 40$$

**Aplicaciones del producto escalar:****1.- Para comprobar si una base es ortogonal u ortonormal.**

Si  $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  es una base ortogonal de vectores entonces debe cumplir que:

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0 \quad \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0 \quad \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0$$

Si  $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  es una base ortonormal de vectores entonces, además, debe cumplir que:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = 1 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = 1 & \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = 1 \\ \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0 \end{array}$$

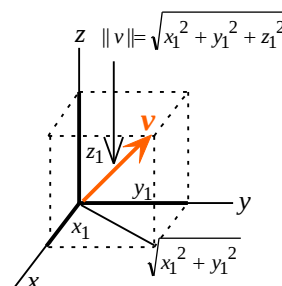
**2.- Para hallar el módulo de un vector en coordenadas:**

Sabemos que  $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$ , así si  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ , teniendo en cuenta la expresión del producto escalar:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot y_1 + z_1 \cdot z_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

■ Calcula el módulo del vector  $\vec{u} = (3, 2, 6)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$



3.- Para calcular el ángulo que forman dos vectores:

A partir de la definición de producto escalar podemos despejar el coseno:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

De ahí tenemos que:

$$\text{Ángulo que forman } \vec{u} \text{ y } \vec{v} = (\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

■ Halla el ángulo que forman los vectores  $\vec{u} = (3, 2, 6)$  y  $\vec{v} = (-4, 5, 1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -12 + 10 + 6 = 4$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7; \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{16 + 25 + 1} = \sqrt{42}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{4}{7\sqrt{42}} \rightarrow \alpha = 84,94^\circ$$

4.- Para calcular un vector perpendicular u ortogonal a uno dado:

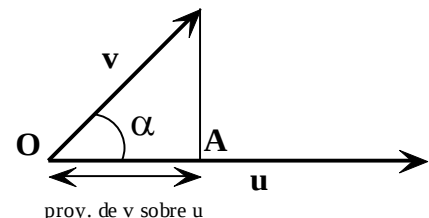
Dado un vector  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ , un vector perpendicular u ortogonal a él será un vector  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  tal que  $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$

■ Halla el vector perpendicular a  $\vec{u} = (3, 2, 6)$

Basta considerar el vector  $\vec{v} = (-4, 0, 2)$ , ya que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12 + 0 + 12 = 0$

5.- Para calcular la proyección de un vector sobre otro:

Dados dos vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{u}$  como los de la figura, la proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$ , que denotamos  $\text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$ , es la proyección de  $\vec{v}$  sobre una recta en la dirección de  $\vec{u}$ , tal y como vemos en dicha figura:



A partir del dibujo tenemos que  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v})}{|\vec{v}|}$ , y por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) \text{ por lo que } \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

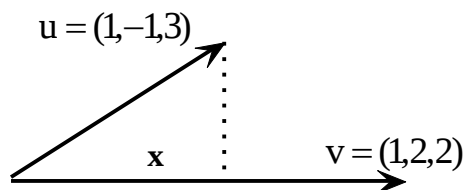
■ Halla la proyección ortogonal del vector  $u = (1, -1, 3)$  sobre  $v = (1, 2, 2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 5$$

El ángulo que forman los vectores es agudo (ya que el producto escalar es positivo)

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot x \Rightarrow 5 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (que es la medida del segmento x)}$$



Dividimos el vector  $v$  por su módulo a fin de obtener un vector de la misma dirección y sentido pero de módulo 1.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3; \quad \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Finalmente, el vector unitario obtenido lo multiplicamos por  $\frac{5}{3}$ :

$$\text{proy. de } u \text{ sobre } v = \vec{x} = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

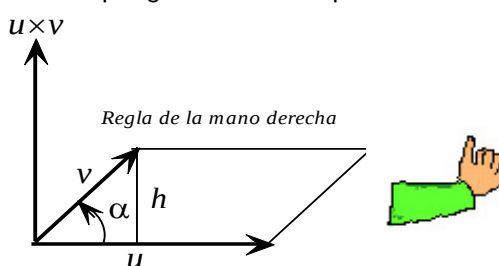
#### 4. Producto vectorial. Propiedades y aplicaciones.

Dados dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , llamamos producto vectorial de esos dos vectores, y lo denotaremos  $\vec{u} \times \vec{v}$  a otro vector que cumpla lo siguiente:

Módulo:  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\vec{u}, \vec{v})$

Dirección: Perpendicular al plano determinado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Sentido: El del avance de un sacacorchos que gira de  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  por el camino más corto. (Regla de la mano derecha)



→ El producto vectorial es un vector y el producto escalar es un número.

##### Propiedades del producto vectorial:

- 1.- Si  $\vec{u} = 0$  o  $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$
- 2.- Si  $\vec{u} \neq 0$  y  $\vec{v} \neq 0$ , entonces  $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$  y  $\vec{v}$  son proporcionales, es decir si son paralelos. ( $\vec{u} = t \cdot \vec{v}$ , con  $t \in \mathbb{R}$ ).
- 3.- El producto vectorial es anticonmutativo, es decir,  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- 4.- Distributiva respecto a la suma de vectores:  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- 5.- Asociativa respecto al producto por escalares (números):  $(t \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (t \cdot \vec{v}) = t \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
- 6.- El producto vectorial, en general, no es asociativo, es decir:  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

##### Expresión analítica del producto vectorial:

Dados dos vectores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , el producto vectorial de esos vectores, en coordenadas, viene dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Para ello, previamente vamos a ver cuáles son los productos vectoriales de los vectores de la base canónica  $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array}$$

Por tanto, dados dos vectores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , éstas son sus coordenadas respecto a la base canónica, es decir:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k},$$

que equivale a decir,

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2), \text{ o mejor, } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

■ Calcula el producto vectorial de los vectores  $\vec{u} = (1, 7, -3)$  y  $\vec{v} = (-5, 0, 4)$

$$\vec{u} = (1, 7, -3)$$

$$\vec{v} = (-5, 0, 4)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = (28, 11, 35)$$

### Interpretación geométrica del producto vectorial:

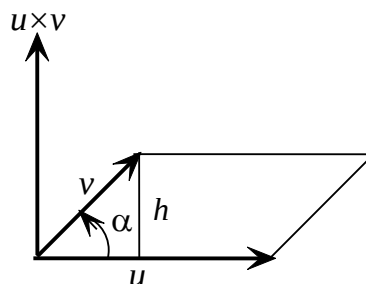
*“El módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo que ambos vectores forman”.*

Basta darse cuenta que el área del paralelogramo es:

$$\text{Área paralelogramo} = \text{Base} \times \text{altura}$$

Pero como la base es  $\|\vec{u}\|$  y la altura  $h = \|\vec{v}\| \sin \alpha$ , tenemos que:

$$\text{Área paralelogramo} = \text{Base} \times \text{altura} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \alpha = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$



### Aplicaciones del producto vectorial

#### 1.- Para calcular el área de un paralelogramo

Basta recordar lo anteriormente dicho, es decir, que el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo que ambos vectores forman.

■ Dados los vectores  $\vec{u} = (3, 2, 5)$  y  $\vec{v} = (4, 1, 6)$ , halla el área del paralelogramo que determinan.

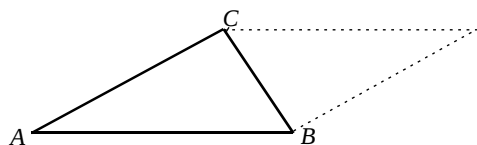
Teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que determinan es el módulo del producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (7, 2, -5)$$

$$\text{Área} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78} \text{ por lo que } \text{Área} = \sqrt{78} \text{ u}^2$$

**2.- Para calcular el área de un triángulo:**

Dado el triángulo de vértices A, B y C, los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  determinan un paralelogramo cuya área es el módulo del producto vectorial.



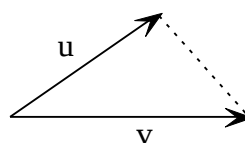
Como el triángulo es la mitad del paralelogramo, su área será:  $\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}$

■ Dados los puntos A(1,1,1), B(4,3,6) y C(5,2,7), halla el área del triángulo que determinan.

El área del triángulo determinado por los tres puntos viene dada por la fórmula siguiente:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}$$

Por lo tanto, hallemos  $\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad y \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}}$



Dichos vectores serán:  $\vec{u} = (3,2,5)$  y  $\vec{v} = (4,1,6)$  y su producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (7, 2, -5)$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{7^2 - 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78} \text{ y por tanto } \text{Área} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{\sqrt{78}}{2} u^2$$

**3.- Para calcular un vector perpendicular a otros dos dados:**

Por definición el producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ellos dos y por tanto siempre que tengamos que calcularlo utilizaremos su producto vectorial. Como consecuencia, si dos vectores no son proporcionales, estos más su producto vectorial siempre serán una base.

■ Dados los vectores  $\vec{u} = (3,2,5)$  y  $\vec{v} = (4,1,6)$ , halla un vector perpendicular a ambos

Un vector perpendicular a ambos es el producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (7, 2, -5) \text{ o también:}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 20\vec{j} + 3\vec{k} - 8\vec{k} - 5\vec{i} - 18\vec{j} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} = (7, 2, -5)$$

**5. Producto mixto: definición, propiedades y aplicaciones.**

Dados tres vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , llamamos producto mixto de esos tres vectores, y lo denotaremos  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , al número que se obtiene al realizar el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos:

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}$$

**Expresión analítica del producto mixto:**

Dada una base ortonormal  $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , y tres vectores  $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$  y  $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)$ :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j} + x_3 \cdot \vec{k}) \cdot \left( \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) =$$

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Por tanto,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ .

■ Dados los vectores  $\vec{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, -1)$  y  $\vec{c} = (2, 0, 0)$ , halla el producto mixto  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

**Propiedades del producto mixto:**

(Nota: todas las propiedades siguientes son consecuencia directa de las propiedades vistas para los determinantes.)

1.- El producto mixto cambia de signo si intercambiamos dos de los vectores entre sí, es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$$

2.- Como consecuencia de lo anterior, teniendo en cuenta que intercambiamos dos veces tenemos que:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

3.- Distributiva respecto de la suma de vectores:  $[\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$

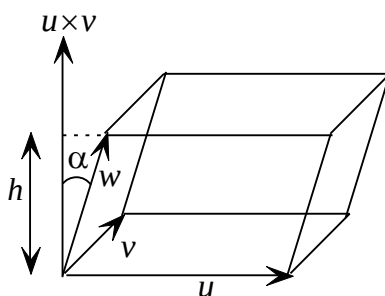
4.- Si  $t$  es un número real, entonces:  $[t\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, t\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\vec{w}] = t[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

5.- Tres vectores son linealmente dependientes (o son coplanarios)  $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

**Interpretación geométrica del producto mixto:**

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo formado por esos tres vectores.

Para ello, consideremos tres vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , no coplanarios como los de la figura adjunta. Estos tres vectores definen un paralelepípedo como puede observarse:



Por una parte:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = \text{Área Base} \cdot \text{altura}$$

Por otra parte:

$$[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = \|\vec{w}\| \cdot \|(\vec{u} \times \vec{v})\| \cdot \cos \alpha = \|(\vec{u} \times \vec{v})\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha$$

Pero como:  $\|(\vec{u} \times \vec{v})\|$  es el área de la base de paralelepípedo y  $\|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha = h = \text{altura}$ , entonces, ambas expresiones son idénticas, por lo que:

$$[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = \text{Volumen del paralelepípedo.}$$

### Aplicaciones del producto mixto.

#### Para calcular el volumen de un paralelepípedo

Basta aplicar lo anterior, es decir, que el valor absoluto del producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo formado por esos tres vectores.

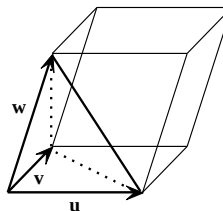
■ Dados los vectores  $\vec{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, -1)$  y  $\vec{c} = (2, 0, 0)$ , halla el volumen del paralelepípedo que determinan.

$$\text{Volumen} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

#### Para calcular el volumen de un tetraedro

El volumen del tetraedro es

$$\text{Volumen}_{(\text{tetraedro})} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$



■ Dados los vectores  $\vec{u} = (3, -2, 5)$ ,  $\vec{v} = (-4, 1, 6)$  y  $\vec{w} = (2, 0, -1)$ , halla el volumen del tetraedro que determinan.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 24 - 10 + 8 = -29 \quad \text{Volumen}_{(\text{tetraedro})} = \frac{1}{6} |-29| = \frac{29}{6} u^2$$