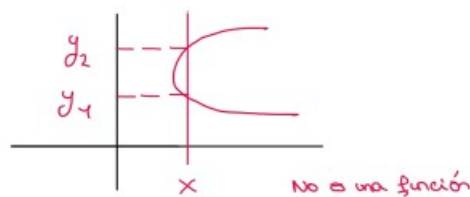
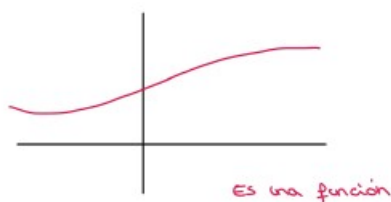
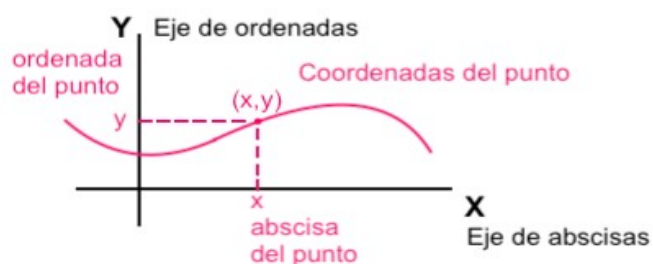


UNIDAD 5: ESTUDIO DE FUNCIONES

1. FUNCIÓN

Una **función** real de variable real es una relación o una correspondencia entre dos conjuntos, de manera que a cada número real del conjunto inicial x le hace corresponder un único número real del conjunto final y .

- **Variable independiente:** x , la forman los valores del conjunto inicial que se fijan previamente.
- **Variable dependiente:** $y=f(x)$, la forman los valores del conjunto final que se obtienen al aplicar la función a la variable independiente.

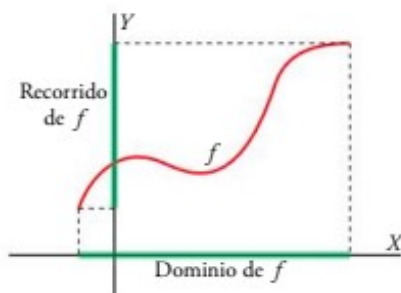


Una función se puede definir mediante un **enunciado**, una **tabla de valores**, una **gráfica** o una **fórmula** (ecuación).

2. DOMINIO Y RECORRIDO

El **dominio** de una función $f(x)$ es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente x , es decir, los valores de x para los que existe función. Se representa por $D(f)$ o $\text{Dom}(f)$.

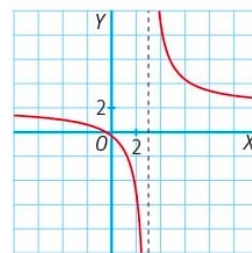
El **recorrido o imagen** de una función $f(x)$ es el conjunto de los valores que puede tomar la variable dependiente y se representa por $\text{Im}(f)$



Ejemplo: Calcula el dominio y recorrido de la siguiente función:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - 3 = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} - 2 = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$



3. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES. SIGNO DE LA FUNCIÓN

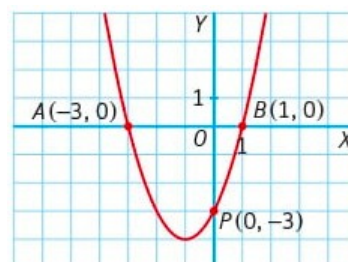
Los **puntos de corte** de una función con los ejes van a ser los puntos de intersección de la gráfica con el eje Y y el eje X:

- Los puntos de corte con el eje Y son de la forma $(x = 0, y = f(0))$.
- Los puntos de corte con el eje X son de la forma $(x, y=0)$

Ejemplo: Indica los puntos de corte de la siguiente función:

PC eje x: A(-3, 0) y B(1, 0)

PC eje y: C(0, -3)



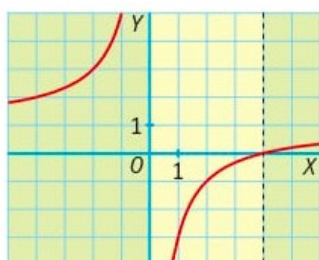
Signo de la función:

La gráfica de una función positiva está por encima del eje X, y por debajo, si la función es negativa. En los puntos de corte con el eje X la función puede pasar de ser positiva a negativa o viceversa.

Una función f es **positiva** en un intervalo (a, b) si $f(x) > 0$ para todos los valores de $x \in (a, b)$

Una función f es **negativa** en un intervalo (a, b) si $f(x) < 0$ para todos los valores de $x \in (a, b)$

Ejemplo: Estudia el signo de la siguiente función a partir de su gráfica:



f positiva : $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

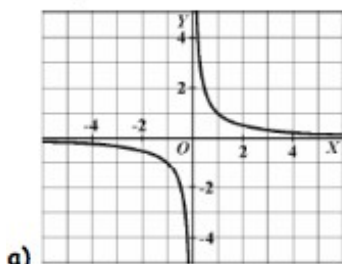
f : negativa: $(0, 4)$

4. CONTINUIDAD

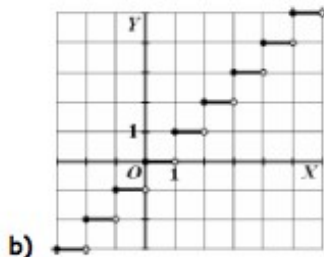
Una función es **continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo.

Una función es **discontinua** si al dibujar su gráfica existe algún punto en el que se interrumpe (levantamos el lápiz del papel). Los puntos donde la gráfica se interrumpe se llaman puntos de discontinuidad.

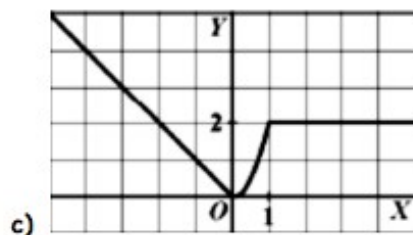
Ejemplo: Estudia si las siguientes funciones son continuas, indicando los puntos de discontinuidad si existen.



a) Discontinua. Punto de discontinuidad $x=0$.



b) Discontinua. Puntos de discontinuidad todos los números enteros.



c) Continua

5. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una función es **creciente** cuando a medida que aumenta el valor de x , también aumenta el valor de $f(x)$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Una función es **decreciente** cuando a medida que aumenta el valor de x , disminuye el valor de $f(x)$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Una función es **constante** cuando a medida que aumenta el valor de x , el valor de $f(x)$ no varía. $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

• **Para calcular analíticamente** si la función crece o decrece en un intervalo concreto, utilizamos la tasa de variación media.

Se llama **tasa de variación media de f** definida en el intervalo $[a, b]$ al cociente:

$$TVM f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Una función f es **creciente** en un intervalo de su dominio, si para cualquier par de valores a y b , con $a < b$, la $TVM f[a, b] > 0$

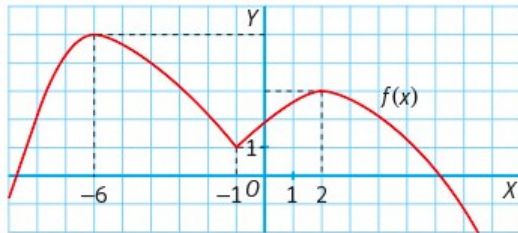
Una función f es **decreciente** en un intervalo de su dominio, si para cualquier par de valores a y b , con $a < b$, la $TVM f[a, b] < 0$

• **Extremos:**

Una función tiene un **mínimo relativo** en un punto $A(x, y)$ si en dicho punto la función es continua y pasa de decreciente a creciente. Si y es el menor valor que toma la función en todo su dominio, el punto $A(x, y)$ es un **mínimo absoluto**.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto $A(x, y)$ si en dicho punto la función es continua y pasa de creciente a decreciente. Si y es el mayor valor que toma la función en todo su dominio, el punto $A(x, y)$ es un **máximo absoluto**.

Ejemplo: Indica los intervalos de crecimiento, los intervalos de decrecimiento y los extremos de la siguiente función. Calcula la TVM en $[-8, -7]$ y $[-4, -2]$.



f creciente en $(-\infty, -6) \cup (-1, 2)$

f decreciente en $(-6, -1) \cup (2, +\infty)$

$$TVM f[-8, -7] = \frac{f(-7) - f(-8)}{-7 + 8} = \frac{4 - 2}{1} = 2 > 0$$

$$TVM f[-3, -2] = \frac{f(-3) - f(-4)}{-3 + 4} = \frac{2 - 3}{1} = -1 < 0$$

f tiene un máximo absoluto $A(-6, 5)$ y un máximo relativo en $B(2, 3)$

f tiene un mínimo relativo en $C(-1, 1)$.