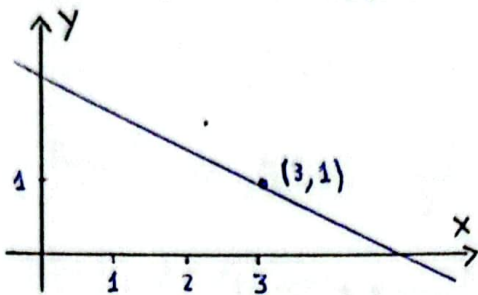


EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN

1. Setiembre 2002

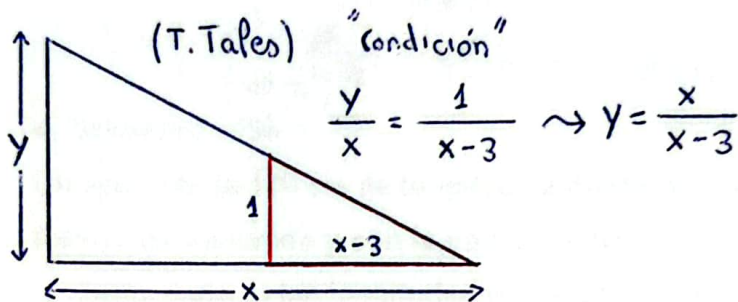
Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,1) y tal que el área del triángulo formado por esta recta y los semiejes positivos coordenados sea mínima.



Función $\Rightarrow A(x,y) = \frac{x \cdot y}{2} = \text{mínima}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x-3} \quad // \quad A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

$$A'(x) = 0 \leadsto x=6 \text{ e } y=2$$

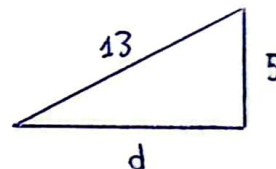
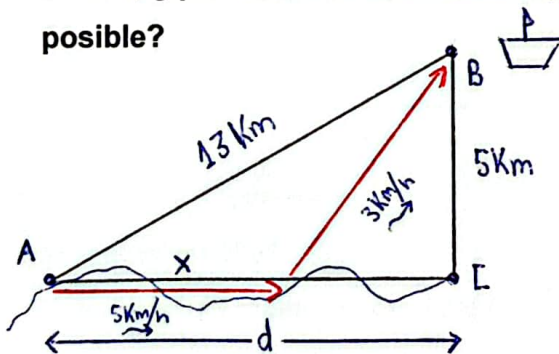


Ec. recta $y = mx + n$
 Para por (3,1) y (0,2)

$$y = -\frac{1}{3}x + 2$$

2. Xuño 2004

Un barco B y dos ciudades A y C de la costa, forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 Km y 5 Km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 Km/h y caminar a 5 Km/h, ¿qué distancia de A debe dejar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible?



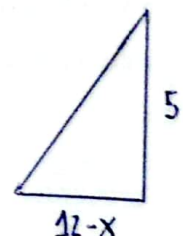
$$5^2 + d^2 = 13^2$$

$$d = 12 \text{ km}$$

Función $t(x) = t_1 + t_2 = \text{mínimo}$

$$\left. \begin{matrix} 5 \text{ Km/h} \\ x \end{matrix} \right\} t_1 = \frac{x}{5}$$

$$\left. \begin{matrix} 3 \text{ Km/h} \\ \sqrt{5^2 + (12-x)^2} \end{matrix} \right\} t_2 = \frac{\sqrt{25 + (12-x)^2}}{3}$$



$$t(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{25 + (12-x)^2}}{3} \quad // \quad t'(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-2(12-x)}{2\sqrt{25 + (12-x)^2}}$$

$$t'(x) = 0 \quad // \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{(12-x)^2}{25 + (12-x)^2} \Rightarrow \frac{225}{16} = (12-x)^2 \quad x = 8.25 \text{ km}$$

Distancia de A 8.25 km

EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN

3. Xuño 2006

De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa 10 cm, calcula las longitudes de los catetos que corresponden al de área máxima.

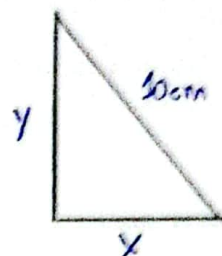
$$\text{Condición} \Rightarrow x^2 + y^2 = 10^2 \quad y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\text{Función} \Rightarrow A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow \frac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2} = A(x)$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} \right] \quad A'(x) = 0 \quad 100 - x^2 = x^2 \quad x^2 = 50 \quad x = \sqrt{50} \text{ cm}$$

$$A''(x) = \frac{1}{2} \frac{2x^3 - 300x}{(100 - x^2)^{3/2}} \quad A''(\sqrt{50}) < 0 \quad \text{máximo}$$

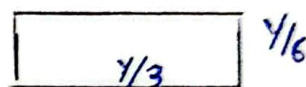
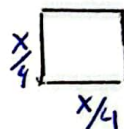
Las longitudes de los catetos son $\sqrt{50}$ cm cada uno //



4. Setembro 2006

Un alambre de 170 cm de longitud se divide en dos partes. Con una de las partes se quiere formar un cuadrado y con la otra un rectángulo de tal forma que la base mida el doble que la altura. Calcula las longitudes de las partes en las que se tiene que dividir el alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y rectángulo sea máxima.

$$\text{Condición} \Rightarrow x + y = 170$$



$$\text{Función} \Rightarrow A(x, y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{y}{3} \cdot \frac{y}{6} \quad \rightarrow \quad A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(170 - x)^2}{18}$$

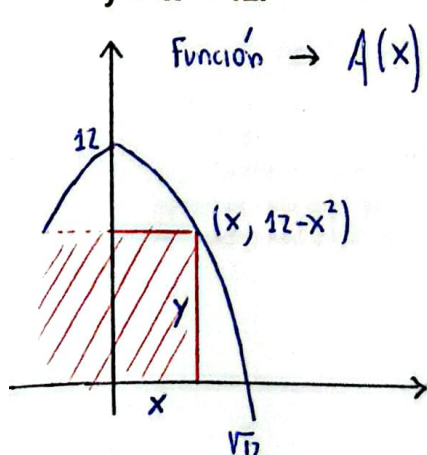
$$A'(x) = \frac{2x}{16} + \frac{2(170 - x) \cdot (-1)}{18} = \frac{17x - 1360}{72} \quad A'(x) = 0 \quad x = 80 \text{ cm}$$

$$A''(x) < 0 \quad \text{máximo}$$

Las longitudes son $x = 80$ cm e $y = 90$ cm

5. Setembro 2007

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima que se puede construir de modo que su base esté sobre el eje OX y los vértices del lado opuesto estén sobre la parábola $y = -x^2 + 12$.



$$\text{Función} \rightarrow A(x) = 2x \cdot (12 - x^2) = 24x - 2x^3 \quad A'(x) = 24 - 6x^2$$

$$A'(x) = 0 \quad // \quad x^2 = 4 \quad x = 2$$

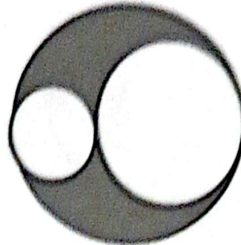
Los vértices son $(-2, 0)$, $(-2, 8)$, $(2, 8)$ y $(2, 0)$ //

$$A''(x) = -12x \quad A''(2) < 0 \quad \text{máximo}$$

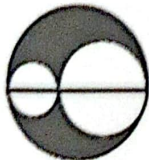
$$A = 32 \text{ u}^2$$

6. Xuño 2011

En una circunferencia de radio 10 cm, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias (área sombreada)?



Se llamamos x e y aos radios das dúas circunferencias tanxentes interiores á dada, entón verificarase que



$$2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$$

Polo tanto, a función a maximizar está dada por

$$A(x) = \pi \cdot 10^2 - [\pi x^2 + \pi(10 - x)^2]$$

$$A'(x) = -2\pi x + 2\pi(10 - x)$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ (punto crítico)}$$

$$A''(x) = -4\pi < 0 \Rightarrow A''(5) < 0 \text{ (máximo)}$$

Polo tanto, a área da rexión sombreada resulta máxima cando se divide o diámetro da circunferencia de partida en dúas partes iguais, é dicir que as circunferencias tanxentes interiores teñen 10cm. de diámetro

7. Setembro 2011

Descompón el número 40 en dos sumandos tales que el producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo, ¿Cuánto vale ese producto?

Sumandos: x ; $40 - x$. Hai que maximizar a función

$$P(x) = x^3(40 - x)^2$$

Calculamos os puntos críticos

$$P'(x) = 3x^2(40 - x)^2 - 2x^3(40 - x) = x^2(40 - x)(120 - 5x)$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ que evidentemente non maximiza a } P(x) \\ x = 40, \text{ que evidentemente non maximiza a } P(x) \\ x = 24 \end{cases}$$

Posto que

$$x \in (0, 24) \Rightarrow P'(x) > 0$$

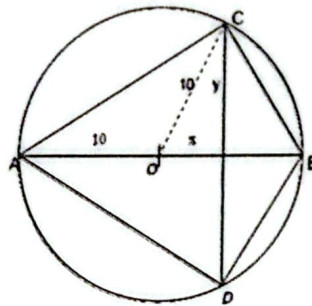
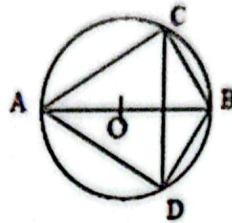
$$x \in (24, 40) \Rightarrow P'(x) < 0$$

podemos afirmar que $P(x)$ ten un máximo relativo en $x = 24$. Polo tanto, os sumandos son 24 e 16 e o produto será

$$P(24) = 24^3 \cdot 16^2 = \boxed{3.538.944}$$

8. Xuño 2013

En una circunferencia de centro O y radio 10 cm se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD , para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?



$$\left. \begin{array}{l} \text{Triángulo ADC:} \\ \text{Base: } 2y \\ \text{Altura: } 10 + x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área} = y(10 + x) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Triángulo BCD:} \\ \text{Base: } 2y \\ \text{Altura: } 10 - x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Área} = y(10 - x) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Diferencia de áreas:} \\ A_1 - A_2 = y(10 + x) - y(10 - x) = 2xy \end{array} \right\}$$

O teorema de Pitágoras proporcionanos unha relación entre x e y :

$$y = \sqrt{10^2 - x^2}$$

Polo tanto, a función a maximizar que nos proporciona a diferencia de áreas é:

$$f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$$

Calculamos os valores que anulan a primeira derivada

$$f'(x) = 2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(100 - x^2) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$$

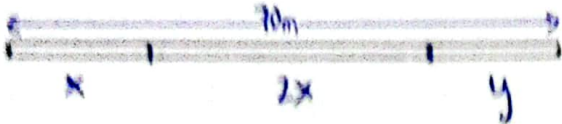
Comprobamos que $x = 5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo:

$$f''(x) = -\frac{2x}{\sqrt{100 - x^2}} - \frac{4x\sqrt{100 - x^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2}; f''(5\sqrt{2}) = -\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} - \frac{200 + 100}{50} = -8 < 0$$

Solución: $5\sqrt{2}$ cm.

9. Setiembre 2014

Queremos dividir un hilo metálico de 70 m de longitud en tres partes de manera que una de ellas tenga doble longitud que otra y además que al construir con cada parte un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Calcula la longitud de cada parte.



Condición $\rightarrow x + 2x + y = 70 \quad 3x + y = 70$

Función $\Rightarrow f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{70-3x}{4}\right)^2$ $y = 70 - 3x$

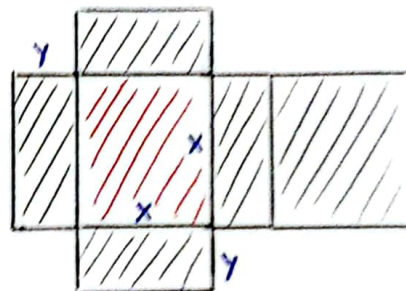
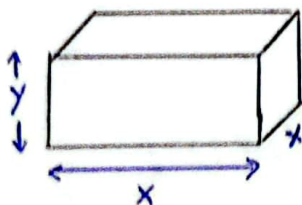
$f(x) = \frac{1}{16} [x^2 + 4x^2 + (70-3x)^2] = \frac{1}{16} (14x^2 - 420x + 4900)$

$f'(x) = \frac{1}{16} (28x - 420) \quad // \quad f'(x) = 0 \quad x = 15$

$f''(x) = \frac{28}{16} > 0$ mínimo Las longitudes son 15m, 30m y 25m

10. Xuño 2017

Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con una capacidad de 80 dm³. Para la tapa y la superficie lateral, se quiere utilizar material que cuesta 2€/dm² y para la base otro que cuesta 3€/dm². Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.



Condición $\Rightarrow V(x, y) = x^2 \cdot y$

$x^2 \cdot y = 80 \rightarrow y = \frac{80}{x^2}$

Función: $C(x, y) = 3 \cdot x^2 + 2(4xy + x^2)$

De aquí, $C(x) = 5x^2 + 8x \cdot \frac{80}{x^2} \quad // \quad C(x) = 5x^2 + \frac{640}{x}$

$C'(x) = 10x - \frac{640}{x^2} \quad // \quad x^2 = 64 \Leftrightarrow x = 4$

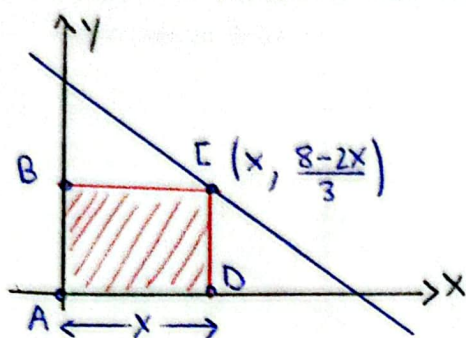
Las dimensiones

son $x = 4$ dm $y = 5$ dm

$C''(x) = 10 + \frac{1280}{x^3} \quad C''(4) > 0$ mínimo

11. Xuño 2018

Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir, si uno de los vértices es (0,0), otro está sobre el eje X, otro sobre el eje Y y otro sobre la recta $2x + 3y = 8$.



Condición $\Rightarrow 2x + 3y = 8$

x	y
4	0
0	8/3

$$y = \frac{8-2x}{3}$$

Función $\Rightarrow A(x) = x \cdot \frac{8-2x}{3} = \frac{8x-2x^2}{3}$

$$A'(x) = \frac{1}{3}(8-4x)$$

$$A'(x) = 0 \quad // \quad x = 2$$

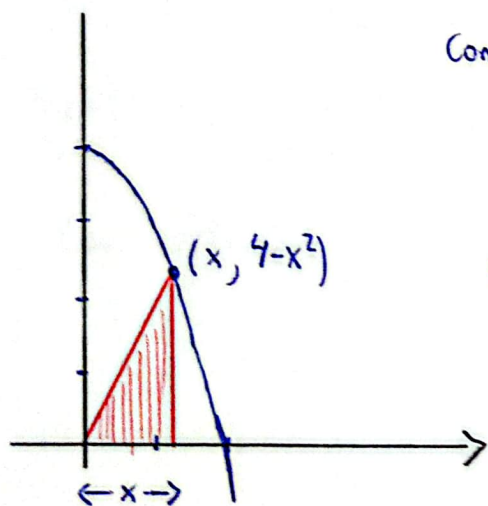
$$A''(x) = -\frac{4}{3} < 0 \quad \text{máximo}$$

Los vértices son

$A(0,0), B(0, \frac{8}{3}), C(2, \frac{4}{3})$ y $D(2,0)$

12. Xullo 2019

De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y. Obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.



Condición $\leadsto y = 4 - x^2$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vértice } (0,4) \\ \text{Pto de corte eje OX } (2,0) \end{array} \right.$

Función $\Rightarrow A(x) = \frac{x(4-x^2)}{2}$

$$A'(x) = \frac{1}{2}(4-3x^2)$$

$$A''(x) = -3x$$

$$A'(x) = 0 \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Catetos $\rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} u$ y $4 - x^2 = \frac{8}{3} u$

siendo $A''(\frac{2}{\sqrt{3}}) < 0$

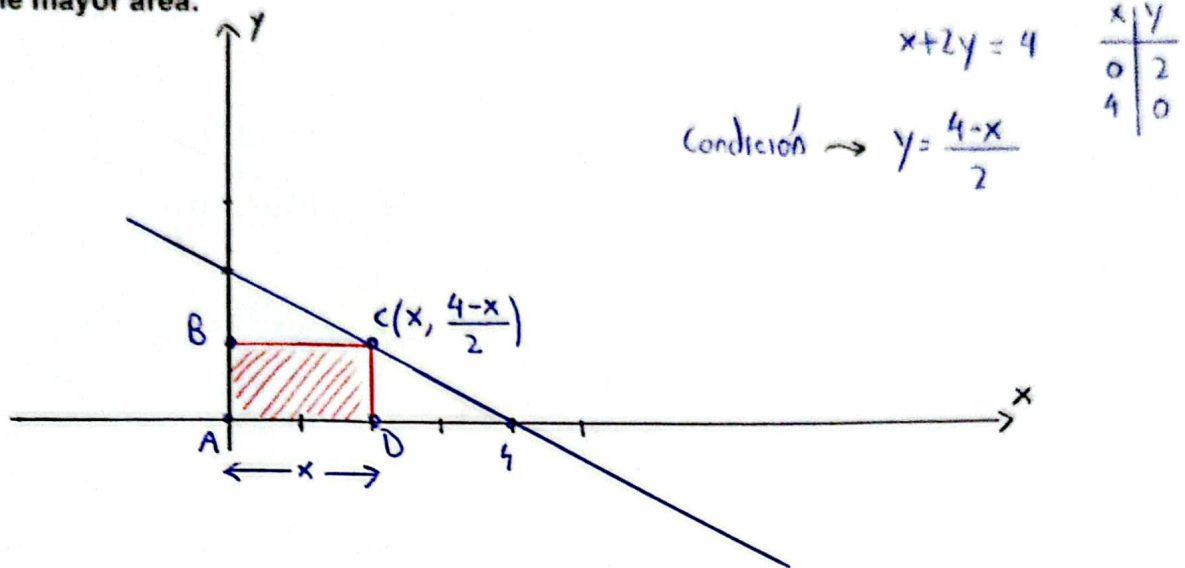
máximo

Hipotenusa $\rightarrow \sqrt{x^2 + ((4-x^2))^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{78}}{3} u$

Francisco Bonanad

13. Xuño 2021

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.



Función $\rightarrow A(x) = x \cdot \frac{4-x}{2} = \frac{1}{2} (4x - x^2)$

$A'(x) = \frac{1}{2} (4 - 2x)$ $A'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2x = 0 \quad x = 2$

$A''(x) = -1 < 0$ $\text{c/\'aximo}$

Los vértices son $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(2,1)$ y $D(2,0)$ //