

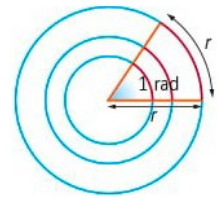
UD5 : TRIGONOMETRÍA

Para medir ángulos utilizamos principalmente dos sistemas de medida:

- El sistema sexagesimal usa como unidad de medida el **grado**.

Un grado es la medida del ángulo central correspondiente al arco de longitud $1/360$ de la circunferencia completa.

- El sistema circular usa como unidad de medida el **radián**. Un radián es el ángulo que abarca un arco igual al radio.



Para pasar de grados a radianes o viceversa utilizamos que 360° son 2π rad, es decir, 180° son π rad.

Ejemplo:

Pasa 150° a radianes: $180^\circ \text{---} \pi \text{ rad}$

$150^\circ \text{---} x$

$$x = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

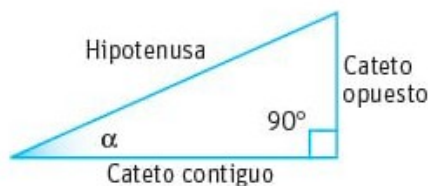
Pasa $3,72$ rad a $^\circ$: $180^\circ \text{---} \pi \text{ rad}$

$x \text{---} 3,72 \text{ rad}$

$$x = \frac{180 \cdot 3,72}{\pi} \simeq 213,14^\circ = 213^\circ 8' 25,08''$$

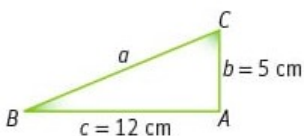
1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Las **razones trigonométricas** de un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo se definen como:



Razones trigonométricas directas	Razones trigonométricas inversas
$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$
$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$
$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$	$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$

Ejemplo: Calcula las razones trigonométricas del ángulo $\hat{B}$:



$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{5}{13}$$

$$\text{cos } \hat{B} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{5}{12}$$

Ejercicio propuesto: Calcular las razones trigonométricas del ángulo de 45° .

Ejercicio propuesto: Calcular las razones trigonométricas del ángulo de 30° y 60° .

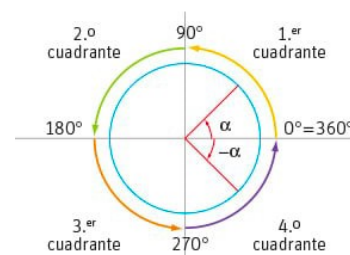
2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo cualquiera

Para representar ángulos entre 0° y 360° e incluso negativos, utilizamos la circunferencia goniométrica.

1º Cuadrante 2º Cuadrante 3º Cuadrante 4º Cuadrante

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ \quad 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

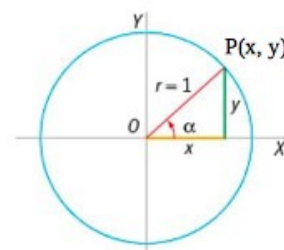
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$



Los ángulos se miden desde el semieje x positivo y en el sentido contrario a la agujas del reloj. Si se miden en el sentido de las agujas del reloj, los ángulos son negativos.

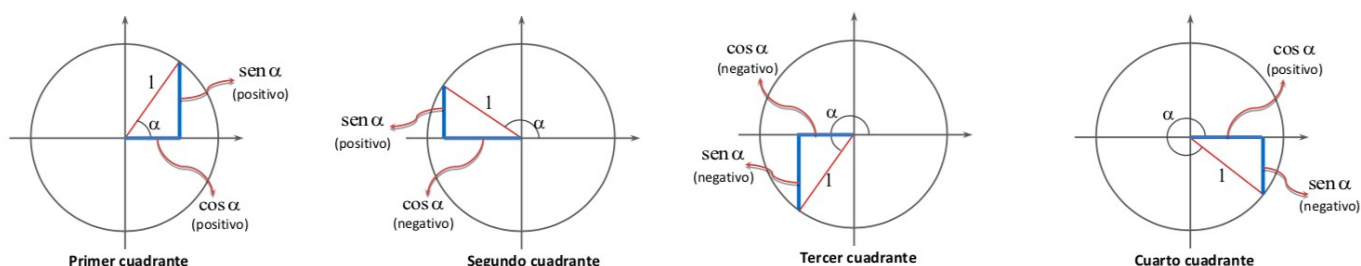
Cada ángulo α determina un punto $P(x,y)$. El radio y las coordenadas del punto forman un triángulo rectángulo:

- El **seno de α** es la distancia del punto P al eje x, es decir,
- la **2ª coordenada del punto**.
- El **coseno de α** es la distancia del punto P al eje y, es decir,
- la **1ª coordenada del punto**.
- La **tangente de α** es el cociente entre el seno y el coseno.



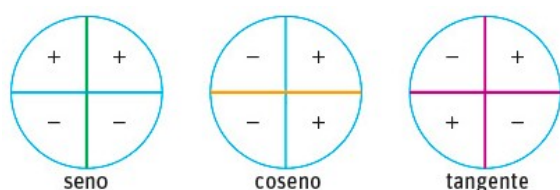
Nota: el seno y el coseno siempre toman valores entre -1 y 1.

Veamos ahora el **signo** de las razones trigonométricas dependiendo el cuadrante en el que se encuentre el ángulo α :



Ejemplo: 130° está situado en el segundo cuadrante, su seno será positivo, el coseno negativo y la tangente negativa también.

Por lo tanto, signo del seno, coseno y tangente en los cuatro cuadrantes es:



Razones trigonométricas de ángulos que aparecen con frecuencia:

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	155°	180°
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Todo ángulo negativo o mayor de 360° se puede asociar con un ángulo positivo entre 0° y 360° llamado **ángulo reducido**.

Ejemplo:

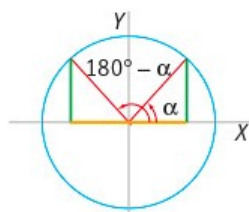
$$\alpha = -60^\circ \rightarrow -60^\circ + 360^\circ = 300^\circ \rightarrow \text{El ángulo reducido de } -60^\circ \text{ es } 300^\circ$$

$$\alpha = 2300^\circ \rightarrow 2300^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 140^\circ \rightarrow \text{El ángulo reducido de } 2300^\circ \text{ es } 140^\circ$$

3. Reducción al primer cuadrante de las razones trigonométricas

- Pasamos un ángulo del 2° cuadrante al 1°.

Ángulos suplementarios:
 α y $180^\circ - \alpha$



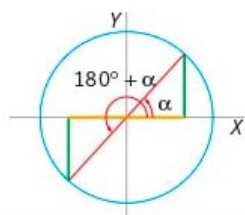
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

- Pasamos un ángulo del 3° cuadrante al 1°.

Ángulos que difieren 180°:
 α y $180^\circ + \alpha$



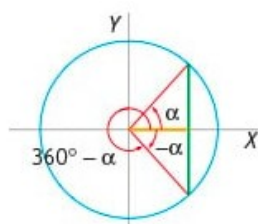
$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

- Pasamos un ángulo del 4º cuadrante al 1º.

Ángulos opuestos:
 α y $360^\circ - \alpha$



$$\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Ejemplo: Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al 1º cuadrante:

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 300^\circ = \operatorname{sen}(360^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. Relaciones entre razones trigonométricas

Relación fundamental de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dividiendo todos los términos de la igualdad por $\operatorname{sen}^2 \alpha$ se deduce la siguiente fórmula $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Ejemplo: Sabiendo que α está en el 1º cuadrante, y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$, calcula las otras razones trigonométricas.

Como α está en el 1º cuadrante todas las razones son positivas.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{4}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Diferencia de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

Ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Ejercicio propuesto: Demuestra que $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$

Ejercicio propuesto: Demuestra que $\sin(3\alpha) = 3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha$

5. Teorema del seno

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se cumple que:

$$\frac{a}{\sen \hat{A}} = \frac{b}{\sen \hat{B}} = \frac{c}{\sen \hat{C}}$$

Ejemplo: De un triángulo sabemos que $a=6\text{ cm}$, $\hat{A}=42^\circ$ y $\hat{B}=68^\circ$. Calcula b, c y $\hat{C}$:
Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sen \hat{A}} = \frac{b}{\sen \hat{B}} \Rightarrow \frac{6}{\sen 42^\circ} = \frac{b}{\sen 68^\circ} \Rightarrow b=8,31\text{ cm}$$

$$\hat{C}=180-42-68=70^\circ$$

$$\frac{a}{\sen \hat{A}} = \frac{c}{\sen \hat{C}} \Rightarrow \frac{6}{\sen 42^\circ} = \frac{c}{\sen 70^\circ} \Rightarrow c=8,43\text{ cm}$$

6. Teorema del coseno

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se cumple que:

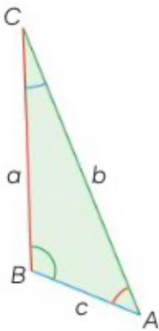
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A} \quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B} \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

Ejemplo: De un triángulo sabemos que $a=5\text{ cm}$, $\hat{B}=40^\circ$ y $c=7\text{ cm}$. Calcula $b, \hat{A}$ y $\hat{C}$:
Aplicamos el teorema del coseno:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B} \Rightarrow b^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cdot\cos 40^\circ \Rightarrow b^2=20,38 \Rightarrow b=4,51\text{ cm}$$

7. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo es determinar el valor de sus elementos desconocidos utilizando los conocidos. Dependiendo de los datos iniciales, hay diferentes procedimientos para resolverlos.

	1. Dos ángulos y un lado.	2. Dos lados y el ángulo comprendido.	3. Dos lados y un ángulo no comprendido.	4. Tres lados
	- Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ - Los otros dos lados con el teorema del seno. - Solución única.	- El tercer lado y un ángulo con el teorema del coseno. - Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ - Solución única.	- Segundo ángulo con el teorema del seno. - Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ - Tercer lado con el teorema del seno - Dos, una o ninguna solución	- Dos ángulos con el teorema del coseno - Tercer ángulo con $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ - Una o ninguna solución.

Razones trigonométricas fundamentales:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Diferencia de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

Ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$