

Xuño 2012

Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = 3x - x^2$ y su recta normal en el punto $(3,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y' = 3 - 2x \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \\ y'' = -2 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{máximo: } (3/2, 9/4) = \text{vértice da parábola} \\ \Rightarrow \text{cóncava} \end{array}$$

$$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \text{Puntos de corte da parábola cos eixes: } (0,0), (3,0)$$

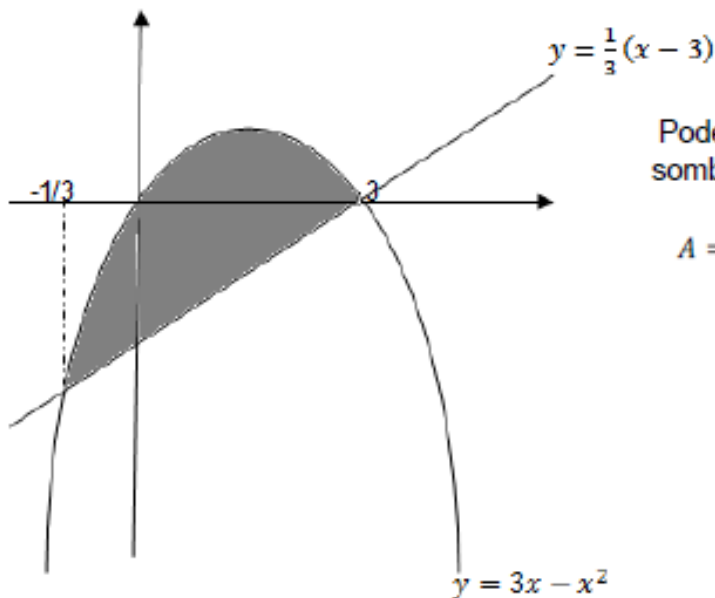
$$y'(3) = -3 \Rightarrow \text{pendente da recta normal á parábola no punto } (3,0): 1/3$$

Ecuación da recta normal á parábola no punto $(3,0)$:

$$y = \frac{1}{3}(x - 3) \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$$

Puntos de corte da recta normal e a parábola:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = \frac{1}{3}(x - 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3}(x - 3) = 3x - x^2 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1/3, -10/9) \\ (3,0) \end{cases}$$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/3}^3 \left[3x - x^2 - \frac{1}{3}(x - 3) \right] dx = \\ &= \int_{-1/3}^3 \left[\frac{8}{3}x - x^2 + 1 \right] dx = \\ &= \left[\frac{4}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1/3}^3 = \\ &= 12 - 9 + 3 - \frac{12}{81} - \frac{1}{81} + \frac{27}{81} = \\ &= \boxed{\frac{500}{81}} \end{aligned}$$

Setembro 2012

Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, la recta tangente en el punto donde la parábola tiene un extremo y la tangente a la parábola en el punto en el que la tangente es paralela a la recta $y = 4x$.

En primeiro lugar calculamos os elementos necesarios para a representación da parábola:

$$\left. \begin{array}{l} y' = -2x + 2 \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ y'' = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ten un máximo, que é o vértice, no punto } (1,4) \text{ e é cóncava}$$

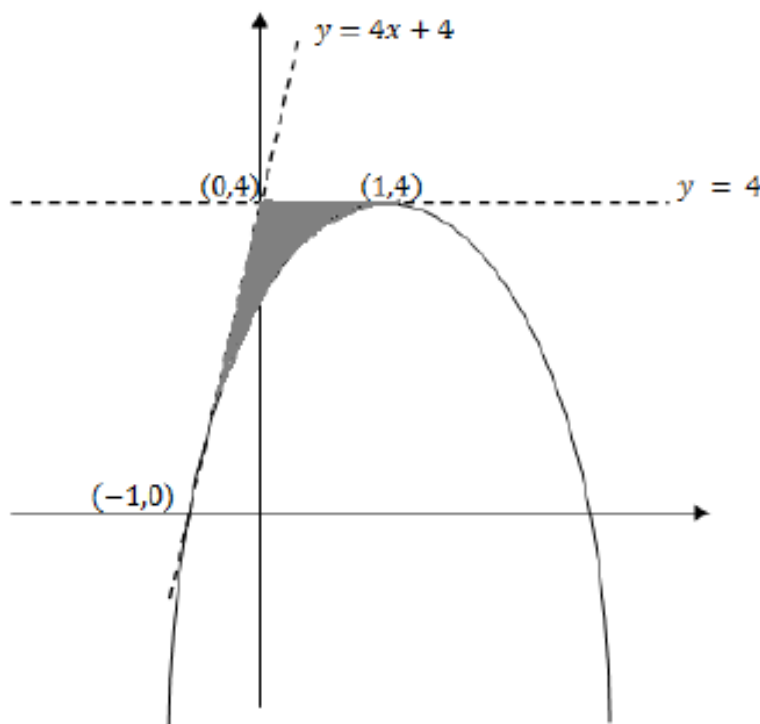
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,3), (-1,0), (3,0)$$

Tanxente no punto $(1,4)$: $y = 4$.

Determinamos o punto no que a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. Como a derivada nun punto coincide coa pendente da recta tanxente nese punto, teremos que determinar o punto no que a derivada vale 4 (dúas rectas son paralelas se teñen a mesma pendente):

$$y' = 4 \Leftrightarrow -2x + 2 = 4 \Rightarrow x = -1$$

Tanxente no punto $(-1,0)$: $y = 4(x + 1)$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [4x + 4 - (-x^2 + 2x + 3)] dx + \int_0^1 [4 - (-x^2 + 2x + 3)] dx = \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = -\left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Xuño 2013

Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y la bisectriz del primer cuadrante.

b) $x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)^2 = 0$.

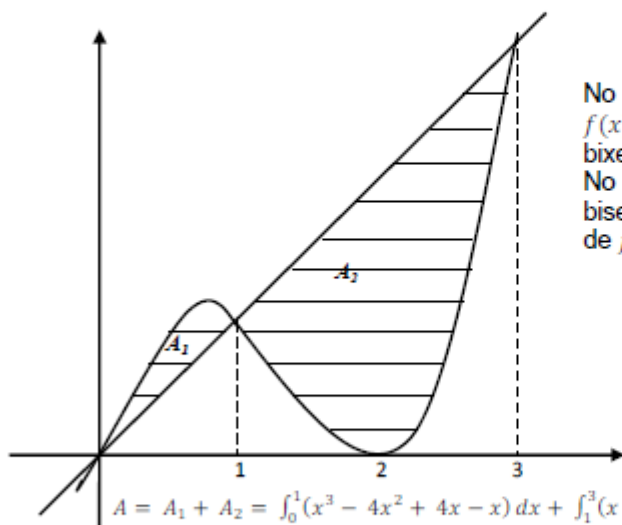
Os puntos de corte de $f(x)$ cos eixes son: $(0,0)$ e $(2,0)$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x = 0; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

Os puntos de corte de $f(x)$ e a bisectriz $y = x$ son: $(0,0)$; $(1,1)$ e $(3,3)$

Con estes puntos de corte e os resultados do apartado a), podemos debuxar a rexión limitada polas gráficas de $f(x)$ e a bisectriz $y = x$



No intervalo $(0,1)$, a gráfica de $f(x)$ está por riba da gráfica de bixectriz
No intervalo $(1,3)$, a gráfica da bixectriz está por riba da gráfica de $f(x)$.

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 4x - x) dx + \int_1^3 (x - x^3 + 4x^2 - 4x) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$A = \frac{37}{12} u^2$$

Setembro 2013

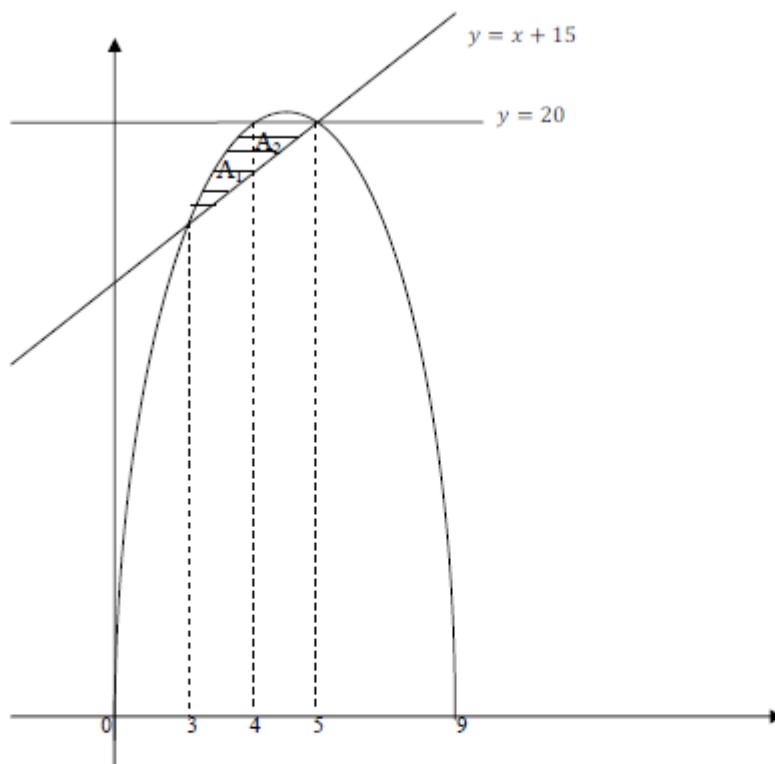
Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2 + 9x$, y las rectas $y = 20$; $x - y + 15 = 0$.

$$\text{Parábola: } y = -x^2 + 9x = x(-x + 9) \Rightarrow \begin{cases} \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,0), (9,0) \\ \text{Vértice: } (9/2, 81/4) \\ \text{Cónca (o coeficiente de } x^2 \text{ é negativo)} \end{cases}$$

Puntos de corte da parábola coas rectas:

$$-x^2 + 9x = 20 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ou} \\ x = 5 \end{cases} \quad \text{Puntos de corte: } (4,20), (5,20)$$

$$-x^2 + 9x = x + 15 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = 5 \end{cases} \quad \text{Puntos de corte: } (3,18), (5,20)$$



$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_3^4 (-x^2 + 9x - x - 15) dx + \int_4^5 (20 - x - 15) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 15x \right]_3^4 + \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_4^5 \\ &= -\frac{64}{3} + 64 - 60 + 9 - 36 - 45 + 25 - \frac{25}{2} - 20 + 8 = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{7}{6} u^2}$$