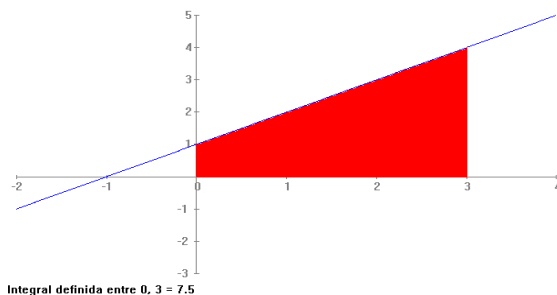


LA INTEGRAL DEFINIDA

1. Introducción
2. Integral definida. Definiciones y propiedades.
3. Teorema del valor medio del cálculo integral.
4. Teorema fundamental del cálculo integral.
5. Regla de Barrow.
6. Aplicaciones de la integral definida. Cálculo de áreas planas.

1. Introducción.

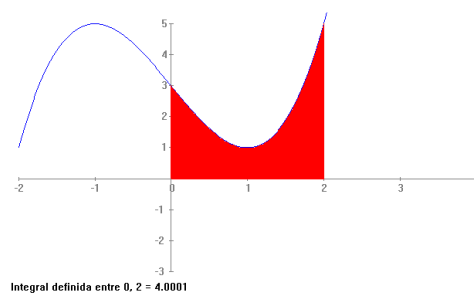
Hay casos en los que el cálculo del área es fácil como por ejemplo el caso de la función $f(x) = x + 1$ entre los valores $x=0$ y $x=3$



Bastaría descomponer la región en un rectángulo y un triángulo y sumar sus áreas correspondientes para obtener el resultado final:

$$\text{Área encerrada} = 7,5 \text{ u}^2$$

Sin embargo, en otros casos no es posible realizar el cálculo de una forma tan simple puesto que la función que delimita la región correspondiente es curva. Observemos si no el caso de la función $f(x) = x^3 - 3x + 3$ en el intervalo $x=0$ y $x=2$.



Tendremos que introducir entonces nuevos conceptos para solucionar dicho problema:

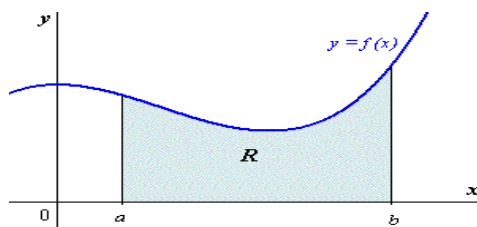
“Integral definida”

El concepto de integral definida surge como respuesta al problema del cálculo del área de una determinada región del plano.

2. Integral definida. Definiciones y propiedades.

Definición:

Dada una función no negativa $f(x)$, y un intervalo $[a, b]$ en el cual la función esté definida, llamaremos **integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$** al área encerrada por la curva f entre a y b , y el eje OX .



Lo denotaremos $\int_a^b f(x)dx$,

$$R = \text{Área de } f(x) = \int_a^b f(x)dx = \text{Integral definida de } f(x) \text{ en } [a, b]$$

Propiedades de la integral definida.

Dada una función integrable f en $[a, b]$, entonces:

- Si $f \geq 0$ en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. (es decir, si la función es positiva, el valor de la integral también lo será. Por tanto, cuando la función sea negativa, la integral será también negativa)
- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Si $a < c < b$, entonces: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$
- $k \int_a^b f(x)dx = \int_a^b k \cdot f(x)dx$

3. Teorema del valor medio del cálculo integral

Teorema del valor medio del cálculo integral:

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que: $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$

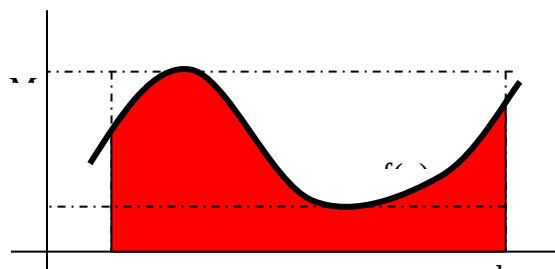
Demostración:

Si $f(x)$ es continua entonces alcanza un valor máximo M y uno mínimo m en $[a, b]$ luego el área de la función estará comprendida entre la del rectángulo pequeño, de altura m y área $m \cdot (b - a)$, y el área del rectángulo grande, de altura M y área $M(b - a)$, es decir:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

que dividiendo entre $(b-a)$ nos queda:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$



Como la función $f(x)$ es continua, toma todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo, ya que se debe cumplir el teorema de Darboux es decir, $\forall k \in [m, M]$, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$

Concretamente si $k = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ (que es un valor comprendido entre m y M) entonces,

$$\exists c \in [a, b] \text{ tal que } f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \text{ o equivalentemente, } \exists c \in [a, b] \text{ tal que } \int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

que

Definición: Dada la función f , definida en $[a, b]$, llamamos **función área asociada a $f(x)$** a la función $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, $\forall x \in [a, b]$. Dicha función determina el área encerrada por la función $f(x)$ entre a y x .

4. Teorema fundamental del cálculo integral.

Teorema fundamental del cálculo integral.

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces su función asociada $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, con $x \in [a, b]$, es derivable y se verifica que $F'(x) = f(x)$.

Demostración:

Por definición, tenemos que:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Además, por las propiedades 4 y 3 de las integrales definidas:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

Y por el teorema del valor medio del cálculo integral, $\exists c \in [x, x+h]$ tal que:

$$\int_x^{x+h} f(x)dx = f(c) \cdot (x+h-x) = f(c) \cdot h$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

5. Regla de Barrow.

Regla de Barrow: Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva suya,

entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

6. Aplicaciones de la integral definida. Cálculo de áreas planas.

La integral definida, y más concretamente la regla de Barrow, se convierte en una herramienta fundamental para el cálculo de áreas. Para ello solo hace falta saber calcular una primitiva y hacer una pequeña sustitución.

Así pues, en este apartado de aplicación de la integral definida al cálculo de áreas, nos vamos a plantear los siguientes casos:

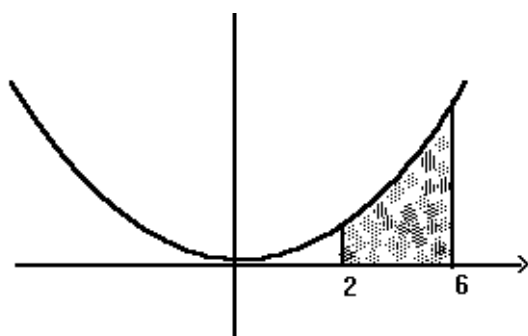
- Que el área a calcular sea positivo (por encima del eje X)
- Que el área a calcular sea negativo (por debajo del eje X)
- Que haya una parte positiva y otra negativa
- Área encerrada entre dos curvas.

Cálculo de un área plana positiva.

En este caso, **el área coincide con la integral definida**, $\text{Área encerrada} = \int_a^b f(x)dx$

Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=6$.

Solución: Si representamos la función y los límites de integración correspondientes, tendremos:



Por tanto, el área del recinto correspondiente viene dado por:

$$\text{Área} = \int_2^6 x^2 dx$$

Para hallar dicha integral definida, aplicamos la Regla de Barrow.

1º. Calculamos primero $F(x)$, una primitiva de $f(x)=x^2$ de donde

$$\text{obtenemos } G(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

2º. Hallamos $G(6)$ y $G(2)$

$$G(6) = \frac{6^3}{3} = \frac{216}{3} = 72$$

$$G(2) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

3º. Restamos $G(6)$ y $G(2)$

$$G(6) - G(2) = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = 72 - \frac{8}{3} = \frac{208}{3} \quad \text{Por tanto, } \text{Área} = \int_2^6 x^2 dx = \frac{208}{3}$$

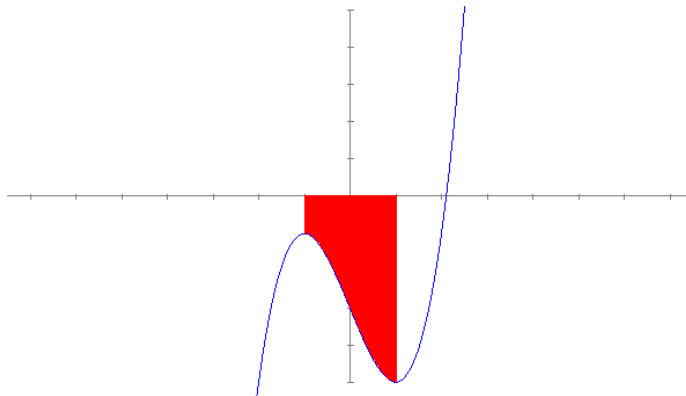
Al aplicar la Regla de Barrow se expresa de la siguiente forma $I = \int_2^6 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3}$

Cálculo de un área plana negativa.

En este caso, **el área coincide con el valor absoluto la integral definida**, es decir,

$$\text{Área encerrada} = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=x^3-3x-3$ y las rectas $y=0$, $x=-1$, $x=1$.



Integral definida entre -1, 1 = -6

En este caso, como podemos observar después de realizar la gráfica, el área está en la parte negativa, con lo que la integral será también negativa. Por eso, para calcular el verdadero valor del área haremos:

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^1 x^3 - 3x - 3 dx \right|$$

Primero hallaremos la integral y después consideraremos el valor absoluto.

$$I = \int_{-1}^1 x^3 - 3x - 3 dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 3x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} - 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{3(-1)^2}{2} - 3(-1) \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 3 \right) = -6 \quad \text{Por tanto} \quad \text{Área} = \left| \int_{-1}^1 x^3 - 3x - 3 dx \right| = |-6| = 6$$

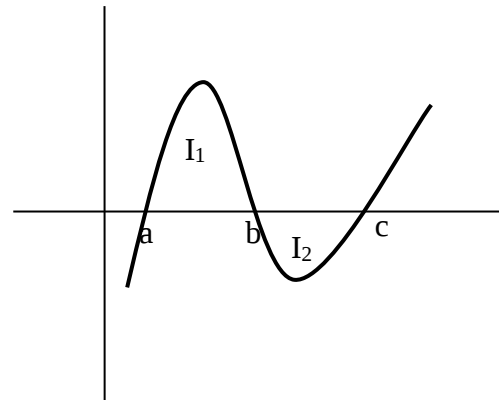
Cálculo del área con parte positiva y negativa

En caso de que la curva tenga parte positiva y parte negativa, **debemos descomponer la región en cada una de ellas**, considerando, en el caso de la parte negativa, su valor absoluto.

Si I_1 es la parte positiva e I_2 la negativa, entonces:

Área total = $I_1 + |I_2|$ o también:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx + \left| \int_b^c f(x) dx \right|$$



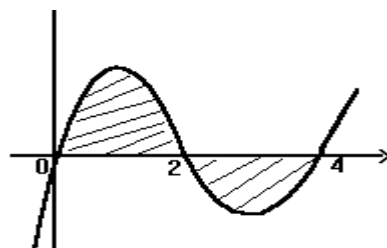
Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x

Primero calculamos los puntos de corte de la curva con el eje X :

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$(x^2 - 6x + 8)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte obtenidos son **0, 2 y 4**, por tanto el área pedida se halla resolviendo las integrales:



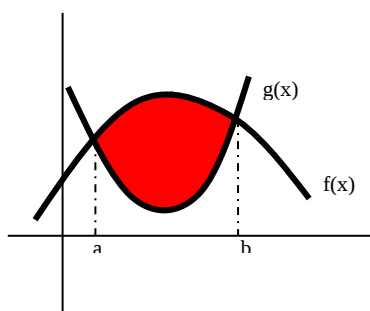
$$I_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = 4$$

$$I_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 = -4$$

$$\text{Área total} = I_1 + |I_2| = 4 + |-4| = 8 \text{ u}^2$$

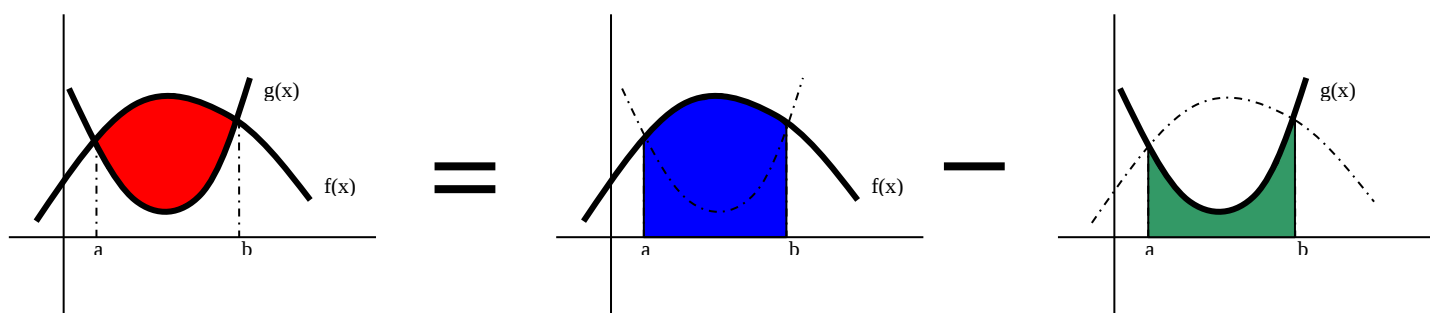
Cálculo del área encerrada entre dos curvas

Supongamos que nos dan dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que encierran una determinada área, donde $f(x)$ limita por arriba y $g(x)$ lo hace por abajo, y sean a y b los puntos donde se cortan ambas funciones. Tendremos entonces una gráfica parecida a la siguiente:



Nos preguntamos ¿cómo podemos calcular el área encerrada por ambas?

Para contestar esta pregunta basta echar un vistazo a las gráficas siguientes y encontraremos la explicación.



Observemos que el área encerrada entre ambas (**rojo**) resulta de restar al área encerrada por $f(x)$ (**azul**) el área encerrada por $g(x)$ (**verde**). Luego podemos concluir que, dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, donde $f(x)$ limita por arriba y $g(x)$ lo hace por abajo:

$$\text{Área encerrada entre } f(x) \text{ y } g(x) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

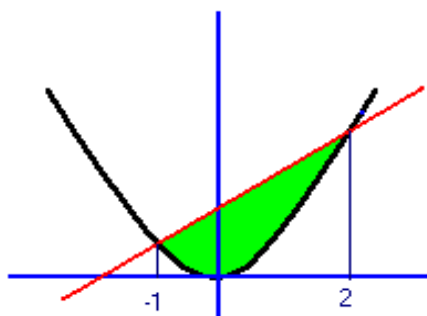
$$\text{Área encerrada entre } f(x) \text{ y } g(x) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Por tanto, los pasos a seguir para resolver este caso son:

- Representar las gráficas y determinar la función que limita por arriba y la que limita por abajo.
- Hallar los puntos de corte de ambas, que serán los límites de integración, a y b.
- Hallar $f(x)-g(x)$
- Calcular la integral $I = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

Halla el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2$, la recta de ecuación $y=x+2$ y el eje OX.

Solución: Primero representamos las funciones y vemos que la recta $y=x+2$ está por encima de la parábola $y=x^2$



Después se calculan los límites de integración. Éstos son los puntos de corte de la parábola y la recta. Para ello, igualemos ambas y resolvamos:

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Por otra parte, la función a integrar será $f(x)-g(x)$, siendo $f(x)$ la recta (limita superiormente) y $g(x)$ la parábola (limita inferiormente). Por tanto, tendremos:

$$f(x)-g(x)=x+2-x^2 \quad (\text{Diferencia de las dos funciones})$$

Por último, solo nos queda calcular la integral siguiente:

$$I = \int_{-1}^2 (x+2-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

$$\text{Área encerrada entre las funciones} = \frac{9}{2} u^2$$