

LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. Integral indefinida. Definiciones.
2. Propiedades de la integral indefinida.
3. Integrales inmediatas.
4. Métodos de integración.

1. Integral indefinida. Definiciones

Definición: Dada una función $f(x)$, diremos que la función $F(x)$ es una **función primitiva** de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, cuando se verifica que:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Proposición: Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C es una constante, entonces $F(x) + C$ también es una primitiva de $f(x)$.

$$\text{Si } F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) + C \text{ es también primitiva de } f(x).$$

Proposición: Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos funciones primitivas de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces su diferencia es una constante, es decir $\exists C \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = C$, siendo C una constante, para todos los puntos de dicho intervalo.

Por hipótesis $F(x)$ y $G(x)$ son funciones primitivas, entonces por definición de primitiva se verifica que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = f(x)$, y en tal caso tenemos que:

$$F'(x) = G'(x) \Rightarrow (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

si una función tiene derivada 0 en todos los puntos de un intervalo entonces dicha función es constante en dicho intervalo, luego existe C constante tal que:

$$F(x) - G(x) = C \quad \forall x \in [a, b]$$

Definición: Llamaremos **integral indefinida** de una función $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas de la función, es decir, dada una función primitiva $F(x)$ de $f(x)$ entonces llamaremos integral indefinida de $f(x)$ al conjunto $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$

A dicho conjunto lo representaremos como $\int f(x) dx = F(x) + C$.

2. Propiedades de la integral indefinida

- a) $\int f'(x) dx = f(x) + C$
- b) $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- c) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

3. Integrales inmediatas.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

TIPOS	EJEMPLOS
Tipo potencial $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5}$ $\int (x^3 - 2)^4 \cdot 3x^2 dx = \frac{(x^3 - 2)^5}{5}$
Tipo logarítmico $\int \frac{1}{x} dx = L x + C$ $\int \frac{f'}{f} dx = L f + C$	$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = L(1+e^x)$
Tipo exponencial $\int f' \cdot e^f dx = e^f + C$ $\int f' \cdot a^f dx = \frac{a^f}{La} + C$	$\int e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} \int (-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ $\int 5^x \cdot 9^x dx = \int 45^x dx = \frac{45^x}{L45}$
Tipo coseno $\int \sen x dx = -\cos x + C$ $\int f' \cdot \sen f dx = -\cos f + C$	$\int \sen \frac{x}{3} dx = 3 \int \frac{1}{3} \cdot \sen \frac{x}{3} dx = -3 \cos \frac{x}{3}$
Tipo seno $\int \cos x = \sen x + C$ $\int f' \cdot \cos f dx = \sen f + C$	$\int \cos(2x+5) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \cos(2x+5) dx = \sen(2x+5)$

Tipo tangente $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ $\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \operatorname{tg} f + C$	$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x$ $\int \frac{x}{\cos^2(5x^2 - 3)} = \frac{1}{10} \int \frac{10x}{\cos^2(5x^2 - 3)} = \frac{1}{10} \operatorname{tg}(5x^2 - 3)$
Tipo cotangente $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\cot gx + C$ $\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} dx = -\cot gf + C$	$\int \cot g^2 x dx = \int (1 + \cot g^2 x - 1) dx = -\cot gx - x$ $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 3x^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{\operatorname{sen}^2 3x^2} dx = -\frac{1}{6} \cot g 3x^2$
Tipo arcoseno $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C$ $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} f + C$	$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x^2$ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} dx = \operatorname{arcsen} e^x$
Tipo arcotangente $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$ $\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f + C$	$\int \frac{1}{3+3x^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x$ $\int \frac{1}{1+9x^2} dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{1+(3x)^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(3x)$

4. Métodos de integración.

En este apartado vamos a ver los siguientes métodos:

- Integrales que se simplifican previamente o que se descomponen.
- Integrales que se transforman en inmediatas.
- Integración por sustitución o cambio de variable
- Integración por partes
- Integración de funciones racionales

4.1. Integrales que se simplifican previamente o se descomponen

Algunas veces, antes de realizar la integral correspondiente, se procede a simplificar la expresión por si de esa forma se puede integrar mejor. Posteriormente, haciendo uso de las propiedades de las integrales, se descomponen en otras más sencillas, transformándose en una simple suma de integrales más elementales. Veamos algunos ejemplos:

$$\rightarrow \int (x^2 - 1)^2 dx$$

Desarrollando por la fórmula del cuadrado de un binomio: $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

$$\int (x^2 - 1)^2 dx = \int x^4 - 2x^2 + 1 dx = \int x^4 dx - 2 \int x^2 dx + \int dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C$$

$$\rightarrow \int \frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2} dx =$$

Descomponiendo la fracción en suma de fracciones:

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2} = \frac{2x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 2x - 7 - 4x^{-2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x^2} dx &= \int 2x - 7 - 4x^{-2} dx = 2 \int x dx - \int 7 dx - 4 \int x^{-2} dx = \\ &= 2 \frac{x^2}{2} - 7x - 4 \frac{x^{-1}}{-1} + C = x^2 - 7x + \frac{4}{x} + C \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int \frac{2\sqrt{x^3} - 7\sqrt[3]{x^5} - 4x}{3\sqrt[5]{x^2}} dx =$$

Transformando las raíces en potencia, descomponiendo en suma de fracciones y simplificando, tenemos:

$$\frac{2\sqrt{x^3} - 7\sqrt[3]{x^5} - 4x}{3\sqrt[5]{x^2}} = \frac{2x^{3/2} - 7x^{5/3} - 4x}{3x^{2/5}} = \frac{2x^{3/2}}{3x^{2/5}} - \frac{7x^{5/3}}{3x^{2/5}} - \frac{4x}{3x^{2/5}} = \frac{2x^{11/10}}{3} - \frac{7x^{19/15}}{3} - \frac{4x^{3/5}}{3}$$

Por lo que la integral nos queda:

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sqrt{x^3} - 7\sqrt[3]{x^5} - 4x}{3\sqrt[5]{x^2}} dx &= \int \frac{2x^{11/10}}{3} - \frac{7x^{19/15}}{3} - \frac{4x^{3/5}}{3} dx = \int \frac{2x^{11/10}}{3} dx - \int \frac{7x^{19/15}}{3} dx - \int \frac{4x^{3/5}}{3} dx = \\ &= \frac{2}{3} \frac{x^{21/10}}{21/10} - \frac{7}{3} \frac{x^{34/15}}{34/15} - \frac{4}{3} \frac{x^{8/5}}{8/5} + C = \frac{20}{63} x^{21/10} - \frac{105}{102} x^{34/15} - \frac{5}{6} x^{8/5} + C \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int \frac{4 \operatorname{ctgx} \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \sec x} dx =$$

Si expresamos las razones trigonométricas en razones simples, nos quedará:

$$\int \frac{4 \operatorname{ctgx} \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \sec x} dx = \int \frac{4 \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}} dx = \int 4 \cos x \cdot \operatorname{sen} x dx =$$

$$\int 4 \cos x \cdot \operatorname{sen} x dx = \int 2 \cdot 2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x dx = \int 2 \operatorname{sen}(2x) dx \quad (\text{porque } \operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x)$$

$$\int \frac{4 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \sec x} dx = \int 4 \cos x \cdot \operatorname{sen} x dx = \int 2 \operatorname{sen}(2x) dx = -\cos(2x) + C$$

4.2. Integrales que se transforman en inmediatas

Aunque parezca que son difíciles de realizar y que requieren un método laborioso, hay integrales que se pueden resolver mediante el uso de la tabla de integrales inmediatas sin más que introducir algunos cambios o modificaciones. Veamos algunos ejemplos:

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = -\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = -L|\operatorname{sen} x + \cos x| + C$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = L|f|$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{\operatorname{arcsen} x} dx = e^{\operatorname{arcsen} x} + C$$

$$\int f' \cdot e^f \cdot dx = e^f$$

$$\Rightarrow \int \sec^2(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cdot \sec^2(2x+1) dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x+1) + C$$

$$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \operatorname{tg} f$$

$$\Rightarrow \int \sec^2 \frac{x}{3} dx = 3 \int \frac{1}{3} \cdot \sec^2 \frac{x}{3} dx = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + C$$

$$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \operatorname{tg} f$$

$$\Rightarrow \int \frac{2^x}{1+4^x} dx = \frac{1}{L2} \int \frac{2^x \cdot L2}{1+(2^x)^2} dx = \frac{1}{L2} \operatorname{arctg} 2^x + C$$

$$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = L|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = L|f|$$

$$\Rightarrow \int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} L(x^2+1) + C$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = L|f|$$

$$\Rightarrow \int \frac{x dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{artg} x^2 + C$$

$$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f$$

4.3. Integración por sustitución o cambio de variable

El método de integración por sustitución o cambio de variable consiste en transformar la integral dada, mediante un cambio de variable en otra inmediata o más sencilla de integrar.

Dada la integral $\int f(x) dx$, si hacemos el cambio de variable $x = g(t)$, entonces tenemos que:

$$x = g(t) \text{ y } dx = g'(t)dt \text{ (derivando)}$$

por lo que la integral inicial queda transformada en

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

$$\text{a) } \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$$

Hacemos el cambio $x^2 + x + 1 = t \Rightarrow (2x + 1)dx = dt$

Sustituyendo en la integral resulta:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

$$\text{b) } \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx$$

Hacemos el cambio $1+x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2 dx = 2t dt$

Despejamos en forma adecuada: $x^2 dx = \frac{2t dt}{3}$ y ahora sustituimos:

$$\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \int \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx = \int \sqrt{t^2} \cdot \frac{2t dt}{3} = \frac{2}{3} \int t^2 dt = \frac{2}{3} \frac{t^3}{3} = \frac{2\sqrt{(1+x^3)^3}}{9}$$

(ya que del cambio $1+x^3 = t^2$ se deduce que $\sqrt{1+x^3} = t$)

$$\text{c) } \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$$

Hacemos el cambio $\sqrt{x-1} = t$ o también, elevando al cuadrado, $x-1 = t^2$

Diferenciando la igualdad anterior, $dx = 2t \cdot dt$

Por otra parte, de $x-1 = t^2$ resulta $x = 1+t^2$

Sustituyendo resulta:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1}{(1+t^2)t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan t = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C$$

$$\text{d) } \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

El cambio que podemos realizar es el siguiente: $\sin x = t$ (Por ser impar en $\cos x$) De dicho cambio resulta: $\cos x dx = dt$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int t^2 (1-t^2) dt = \\ &= \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

$$\text{e) } \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = t &\Rightarrow x = t^2 \\ dx &= 2t dt \end{aligned} \quad \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} 2t dt = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \arcsin t = 2 \arcsin \sqrt{x}$$

4.4. Método de integración por partes.

El método de integración por partes consiste en transformar la integral dada, mediante una transformación básica en la diferencial del producto, en otra integral inmediata o más sencilla que la de partida.

La integración por partes se basa en la conocida fórmula:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du, \text{ donde } u(x) \text{ y } v(x) \text{ son dos funciones diferenciables.}$$

Demostración: Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones diferenciables cualesquiera, entonces:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv \quad \text{Despejando: } u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Integrando a ambos lados y teniendo en cuenta que la integral de la derivada de una función es la misma función tenemos que:

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du = u \cdot v - \int v \cdot du \text{ es decir, } \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\text{a) } \int x \cdot e^x dx$$

Para realizar la integral pedida, a una expresión debemos llamarle u y a otra debemos llamarle dv y a partir de ellas debemos recuperar du y también v .

Llamamos		Obtenemos
$u = x$	derivando	$du = dx$
$dv = e^x \cdot dx$	integrando	$v = \int e^x dx = e^x$

Con estos datos podemos empezar a aplicar la fórmula de integración por partes

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x \cdot e^x dx = x e^x - \int e^x dx \quad \text{y simplificando, llegamos a la}$$

conclusión: $\int x \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C$

$$\text{b) } \int \arctg x dx$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \arctg x \\ dv = dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ v = x \end{array}$$

Donde u lo hemos derivado para obtener du y dv lo hemos integrado para hallar v .

Aplicando la fórmula que hemos indicado anteriormente, $I = x \cdot \arctg x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$

La integral resultante es de tipo logarítmico: $I = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + C$

$$\text{c) } \int x^2 \operatorname{sen} x dx$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \operatorname{sen} x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \end{array}$$

$$I = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx. \quad (*)$$

A veces hay que repetir la integración por partes como en este caso:

$$\left. \begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \cos x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2 dx \\ v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$\int 2x \cos x dx = 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x dx = 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$$

Y volviendo a la expresión (*) obtenemos el resultado final: $I = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$

4.5 Método de integración de funciones racionales.

El método de integración de funciones racionales está basado en la descomposición de la fracción en suma de fracciones más sencillas. Además, vamos a suponer que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, pues en caso contrario, se hace la división y después se integra el cociente más el resto partido por el divisor, es decir, si $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ donde el grado de $p(x)$ es igual o mayor que el de $q(x)$, entonces, dividiremos $p(x)$ entre $q(x)$, obteniendo un cociente $c(x)$ y un resto $r(x)$

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x) \text{ de donde } \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)c(x) + r(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} dx = \int c(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx \quad \text{donde } c(x) \text{ es un polinomio, y por tanto se}$$

integra fácilmente, y $r(x)$ ya tiene grado menor que $q(x)$, que es el verdadero problema.

Por tanto, vamos a integrar $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ pero suponiendo que el grado del numerador es menor que

el grado del denominador y además, nos limitaremos a las funciones racionales cuyo denominador tiene raíces reales, es decir que se puede descomponer en factores de grado 1. (no veremos el caso en el que el denominador tenga raíces imaginarias)

Para ello vamos a distinguir los siguientes casos:

4.5.1. Integración de funciones racionales sólo con raíces simples en el denominador:

4.5.2. Integración de funciones racionales con raíces múltiples en el denominador:

4.5.3. Integración de funciones racionales con raíces simples y múltiples en el denominador:

4.5.1. Integración de funciones racionales sólo con raíces simples en el denominador

Vamos a suponer que al hacer la descomposición de $Q(x)$ en factores primos (Ruffini), obtenemos lo siguiente:

$$Q(x) = k \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$$

El número k que aparece al principio será igual al coeficiente del término de mayor grado, que vamos a suponer que es 1 para simplificar (en caso contrario sólo hay que sacar dicho número fuera de la integral).

Una vez factorizado el denominador, el método consiste en descomponer la función racional en otras funciones racionales más simples que podremos integrar fácilmente. El proceso es el siguiente (para simplificar vamos a hacerlo suponiendo que el denominador tiene grado 3, aunque se haría igual sea el grado que sea):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3)} = \frac{A}{(x - a_1)} + \frac{B}{(x - a_2)} + \frac{C}{(x - a_3)}$$

Ahora debemos hallar los valores de A , B y C , para lo que sumaremos las tres fracciones e igualaremos coeficiente a coeficiente el numerador de esa suma con $P(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) + B \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_3) + C \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2)}{(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3)}$$

$$\rightarrow \int \frac{4x^2 + 8x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx$$

En primer lugar, vamos a descomponer el denominador por Ruffini:

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0
-1		-1	-2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Así pues, $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2)$. Siguiendo entonces lo visto anteriormente, tenemos que:

$$\frac{4x^2 + 8x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A \cdot (x+1) \cdot (x+2) + B(x-1) \cdot (x+2) + C \cdot (x-1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, entonces los numeradores también deben serlo:

$$4x^2 + 8x + 6 = A \cdot (x+1) \cdot (x+2) + B(x-1) \cdot (x+2) + C \cdot (x-1) \cdot (x+1)$$

Y dando valores a x (preferentemente, las raíces del denominador), hallamos los valores A, B y C

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow 18 = A \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \underline{A = 3}$$

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow 2 = B \cdot (-2) \cdot 1 \Rightarrow \underline{B = -1}$$

$$\text{Si } x = -2 \Rightarrow 6 = C \cdot (-3) \cdot (-1) \Rightarrow \underline{C = 2}$$

$$\text{Es decir, hemos conseguido expresar } \frac{4x^2 + 8x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{3}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

Para terminar, basta integrar cada uno de esos sumandos:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 + 8x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx &= \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = 3 \cdot \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 \cdot \ln|x+2| + C \\ &= \ln \left| \frac{(x-1)^3 \cdot (x+2)}{(x+1)} \right| + C \end{aligned}$$

4.5.2. Integración de funciones racionales con raíces múltiples en el denominador

En las mismas condiciones del apartado anterior, vamos a suponer ahora que el denominador descompone de la siguiente forma:

$$Q(x) = (x - a)^n$$

Para simplificar la explicación del método vamos a suponer también que $n = 3$, de donde habrá que generalizarlo a cualquier potencia. En ese caso la descomposición en este caso será la siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^3} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3}$$

A partir de aquí el método es exactamente igual que es anterior.

$$\rightarrow \int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} dx$$

Siguiendo lo anterior vamos a descomponer en fracciones más simples, teniendo en cuenta que al descomponer el denominador obtenemos que:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$

$$\frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{2x-1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A \cdot (x-1)^2 + B \cdot (x-1) + C}{(x-1)^3}$$

De ahí, igualando los numeradores, tenemos que:

$$2x-1 = A \cdot (x-1)^2 + B \cdot (x-1) + C = A \cdot x^2 + (-2 \cdot A + B) \cdot x + (A - B + C)$$

$$\text{Igualando coeficiente a coeficiente tenemos que: } \left. \begin{array}{l} A = 0 \\ -2 \cdot A + B = 2 \\ A - B + C = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 2 \\ C = 1 \end{array} \right\}$$

Esta forma empleada para calcular los coeficientes difiere de la empleada anteriormente, aunque podemos calcularlos también de aquella forma sustituyendo tres valores cualquiera arriba (recomendable siempre sustituir el valor de la raíz que nos da el valor de C directamente).

Una vez hecha la descomposición, rematamos:

$$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} dx = \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = -2 \cdot (x-1)^{-1} + \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$$

4.5.3.- Integración de funciones racionales con raíces simples y múltiples en el denominador

Por último, vamos a suponer que el denominador tiene tanto raíces simples como múltiples. Por ejemplo un denominador del tipo:

$$Q(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3)^3$$

Combinando los dos métodos anteriores, la descomposición se haría de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3)^3} = \frac{A}{(x - a_1)} + \frac{B}{(x - a_2)} + \frac{C}{(x - a_3)} + \frac{D}{(x - a_3)^2} + \frac{E}{(x - a_3)^3}$$

A partir de ahí procederíamos de la misma forma que antes.

$$\rightarrow \int \frac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx$$

Siguiendo igual que antes, vamos a descomponer en fracciones más simples, teniendo en cuenta que al descomponer el denominador obtenemos que:

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 2)(x + 1)^2$$

$$\frac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{3x^2 + 6x + 2}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x + 1)^2} = \frac{A \cdot (x + 1)^2 + B \cdot (x + 2)(x + 1) + C(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)^2}$$

De ahí, igualando los numeradores, tenemos que:

$$3x^2 + 6x + 2 = A \cdot (x + 1)^2 + B \cdot (x + 2)(x + 1) + C(x + 2)$$

Y dando tres valores a x (preferentemente, las raíces del denominador), hallamos A, B y C

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow -1 = C \Rightarrow C = -1$$

$$\text{Si } x = -2 \Rightarrow 2 = A \Rightarrow A = 2$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow 2 = A + 2B + 2C \Rightarrow B = 1$$

Es decir, hemos conseguido expresar
$$\frac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{2}{x + 2} + \frac{1}{(x + 1)} + \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 6x + 2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx &= \int \frac{2}{x + 2} dx + \int \frac{1}{(x + 1)} dx - \int \frac{1}{(x + 1)^2} dx = \\ &= 2 \cdot \ln|x + 2| + \ln|x + 1| - \frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + C = 2 \cdot \ln|x + 2| + \ln|x + 1| + \frac{1}{(x + 1)} + C \end{aligned}$$