

1 - Definicións

1.1.- A pendente m

Mide a inclinación dun segmento, dunha recta ou dun ángulo respecto da horizontal.

- **Incremento** ou **diferencia** dunha variable V é

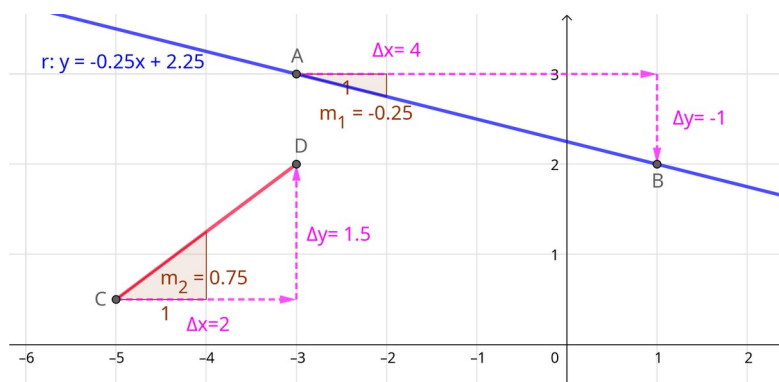
$\Delta V = V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}$. Taxa de variación dunha

variable V é $\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V_f - V_i}{x_f - x_i}$, onde f e i

representan o estado final e inicial.

- **Pendente dunha recta** entre dous puntos A e B é o cociente entre o incremento en altura

respecto de x : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}$.



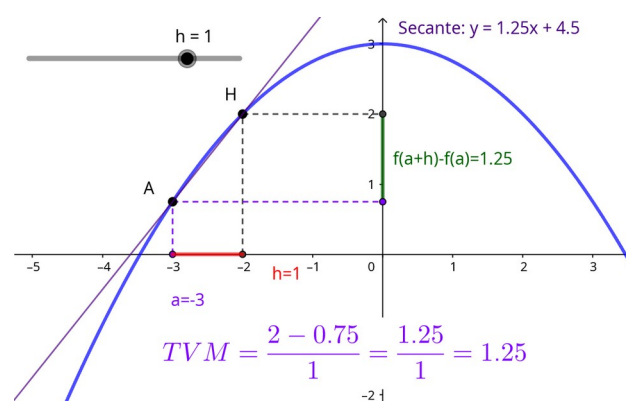
A pendente dunha recta de ecuación explícita $r: y = mx + b$ é o coeficiente m

- TVM (Taxa de Variación Media): indica como **cambia unha función nun intervalo**.

- A TVM é un **número real**. O seu signo determina o **crecemento** ou **decrecemento** medio da función nun intervalo.
- Xeometricamente, a TVM é a **pendente dunha recta secante** que une os puntos da gráfica da función en a e b .

$P_a = (a, f(a))$; $P_b = (b, f(b))$ entón

$$TVM_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\text{variación de } f(x)}{\text{variación de } x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



1.2.- Derivada nun punto

É o **límite da TVM** en un punto a cando a lonxitude do intervalo tende a cero. Isto pode definirse de 2 formas diferentes:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}, \text{ que se lee } \mathbf{f \text{ prima de } a} \text{ ou } \mathbf{derivada de } f \text{ en } a.$$

- A derivada é un número real. O signo determina o crecemento/decrecemento instantáneo da función nun só punto.
- O límite debe existir para que exista a derivada. Existe para a maioría das funcións elementais e as súas combinacións.
- O límite existe se existen ambos límites laterais, polo que se $a \in \text{Dom } f$ está no **borde ou fronteira** do dominio de f , entón a función non ten derivada en a , pois non podemos achegarnos ao punto a polos dous lados.

Unha función f só ten derivada en intervalos abertos.
A función derivada só esta definida en intervalos ou semirrectas abertas

- Unha función definida a anacos derivase en cada anaco. O dominio de definición da función derivada só pode estar formado por intervalos ou semirrectas abertas

1.3.- Interpretación xeométrica da derivada

- A derivada é a **pendente** da recta tanxente á gráfica de f no punto a . A recta tanxente toca á gráfica de f nun só punto.

◦ A recta tanxente queda determinada polo punto

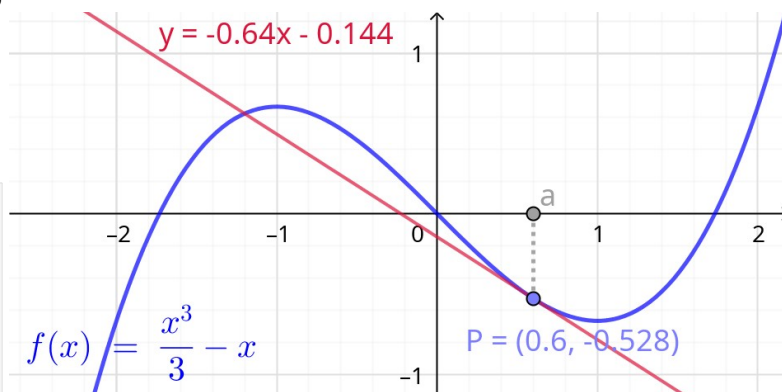
$P=(a, f(a))$ e a pendente da recta, $m=f'(a)$:

$$\frac{y-f(b)}{x-a}=f'(a) \Rightarrow y=f'(a) \cdot (x-a)+f(b)$$

Exercicio: Obter a ecuación da recta tanxente

a $f(x)=\frac{x^3}{3}-x$ en $a=0.6$ sabendo que

$m=f'(0.6)=-0.64$ e que P cumpre a ecuación da recta $y=mx+b$



1.4.- A función derivada $f'=\frac{df}{dx}$

Dada unha función f , a cada punto x do seu dominio facémolles corresponder a súa derivada $f'(x)$. Desta forma definimos a **función derivada** en cada punto onde a función *primitiva* f é derivable: $f': x \in \text{Dom}(f) \rightarrow f'(x)$

A derivada pode denotarse de diferentes formas: $y=f(x) \Rightarrow y'=f'(x)=\frac{df}{dx}=D(f)$

2 - Cálculo de derivadas

2.1.- Derivadas elementais

Nesta táboa **f é a función**, **x é a variable** respecto da que se deriva, e **$k, m, n \dots$ son constantes** ou **parámetros**. As funcións trigonométricas tamén son funcións elementais pero non traballaremos habitualmente con elas:

	Función constante	Función lineal	Función potencia	Función irracional	Funcións exponenciais		Funcións logarítmicas	
Función	$f(x)=k$	$f(x)=mx$	$f(x)=x^n$	$f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$	$f(x)=e^x$	$f(x)=a^x$	$f(x)=\ln x$	$f(x)=\log_a x$
Función derivada	$\frac{d}{dx} k=0$	$\frac{d}{dx} mx=m$	$\frac{d}{dx} x^n=n \cdot x^{n-1}$	$\frac{d}{dx} x^{1/n}=\frac{1}{n} \cdot x^{1/n-1}$	$\frac{d}{dx} e^x=e^x$	$\frac{d}{dx} a^x=\ln a \cdot a^x$	$\frac{d}{dx} \ln x=\frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx} \log_a x=\frac{1}{x \cdot \ln a}$
Exemplo	$\frac{d}{dx} 8=0$	$\frac{d}{dx} 8x=m$	$\frac{d}{dx} x^4=4x^3$	$\frac{d}{dx} x^{1/2}=\frac{1}{2x^{1/2}}$		$\frac{d}{dx} 2^x \approx 0,69 \cdot 2^x$		$\frac{d}{dx} \log_{10} x=\frac{1}{2,30 \cdot x}$

2.2.- Regras de derivación

Combinadas coas anteriores, podemos derivar polinomios, funcións racionais e combinacións delas.

Nesta táboa **f e g son funcións**, **x é a variable** respecto da que se deriva, e **k é unha constante**. Representamos a operación de derivar con **$D[\text{función}]$** .

	Producto de número e función	Suma de funcións	Producto de funcións	Cociente de funcións
Función	$k \cdot f$	$f+g$	$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$
Función derivada	$D(k \cdot f)=k \cdot f'$	$D(f+g)=f'+g'$	$D(f \cdot g)=f' \cdot g+f \cdot g'$	$D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f' \cdot g-f \cdot g'}{g^2}$
Exemplo	$D(8 \cdot x^3)=8 \cdot D(x^3)=$	$D(8x^3+3^x)=$ $D(8x^3)+D(3^x)=$	$D(x^3 \cdot \sqrt{x})=$ $D(x^3) \cdot \sqrt{x}+x^3 \cdot D(\sqrt{x})=$	$D\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)=$

1 Algunhas derivadas preguntadas en problemas de selectividade. Obter a derivada da función e os seus puntos críticos. Están as solucións no PDF do exame correspondente:

<https://centros.edu.xunta.gal/iesmendino/aulavirtual/mod/folder/view.php?id=64702>

a) Ordinaria 2025 P3.1 $B(t) = (4-t)(t-1)^2$ $0 \leq t \leq 4$	b) Ordinaria 2025 P3.2 $f(x) = ax^2 + bx - 3$	c) Extraordinaria 2025 P3.1 $P(t) = \begin{cases} 9-t^2+8t & , 0 \leq t < 7 \\ (t-10)^2+7 & , 7 \leq t \leq 12 \end{cases}$
d) Extraordinaria 2025 P3.2 $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$	e) Ordinaria 2024 P3 $N(t) = \begin{cases} 28-(t-4)^2 & , 0 \leq t < 6 \\ (t-10)^2+8 & , 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$	f) Ordinaria 2024 P4 $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$
g) Extraordinaria 2024 P3 $f(x) = ax^2 + bx + c$	h) Extraordinaria 2024 P4 $P(x) = \frac{-x^2}{20} + x + 55$, $0 \leq x \leq 30$	i) Ordinaria 2023 P3 $V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$ $0 \leq t \leq 11$
j) Ordinaria 2023 P4 $B(t) = t(t-a)^2$ $0 \leq t \leq 12$ Calcular B' e B''. PC a=9	k) Extraordinaria 2023 P4 $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $x \neq 0, a \neq 0$ Calcular f' e f''. PC a=3	l) Xuño 2022 $C(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & , 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - 250/t & , t > 10 \end{cases}$
m) Xullo 2022 $C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12$, $1 \leq t \leq 6$	n) Xullo 2022 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & , \text{se } x \leq 1 \\ 2x - a & , \text{se } x > 1 \end{cases}$	o) Xuño 2021 $C(t) = \begin{cases} 5 - t/3 & , 0 \leq t < 6 \\ 1/4 t^2 - 4t + 18 & , 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$
p) Xullo 2021 $r(t) = \frac{kt}{t^2 + 4}$, $t > 0$	q) Xuño 2020 $P(t) = \frac{180t}{t^2 + 9}$, $t \geq 0$	r) Xullo 2020 $G(t) = \begin{cases} 4 - (t/3) & , 0 \leq t \leq 3 \\ (5t-3)/(t+1) & , t > 3 \end{cases}$
s) Xullo 2019 $P(t) = \frac{24}{t^2 - 4t + 16} + 2$	t) Setembro 2018 $N(t) = 5 + 20t/(1+t^2)$, $t \geq 0$	u) Setembro 2018 $G(t) = \begin{cases} 10(5t-t^2) & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ 80 - 10t & \text{si } 4 < t \leq 10 \end{cases}$
v) Xuño 2016 $P(t) = 8 + \frac{12t}{t^2 + 9}$, $t \geq 0$	w) Xuño 2018 $S(t) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 25 + 10t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ -0,5t^2 + 4t + 39 & \text{si } 2 \leq t \leq 5 \end{cases}$	x) Setembro 2016 $G(t) = \begin{cases} -1/(9t) + 7/2 & \text{se } 0 \leq t \leq 18 \\ 6 - 144/(t+14) & \text{se } t > 18 \end{cases}$
y) Xuño 2014 $N(t) = 200 \left(5 - \frac{10}{2+t} \right)$, $t \geq 0$	z) Xuño 2015 $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + bx$, $x \neq 0$	aa) Setembro 2006 $C(t) = \frac{210000}{(2t-k)^2 + 6}$, $0 \leq t \leq 12$

2.3.- Composición de funcións. A regra da cadea

A composición de funcións: cando compoñemos funcións elementais entre si podemos lograr novas funcións que non encaixan en ningún dos tipos anteriores. A composición de dúas funcións f e g denótase por $(g \circ f)(x)$ consiste en aplicar a segunda función ao resultado da primeira, é dicir, $(g \circ f)(x) = (g(f(x)))$. En xeral a composición de funcións non é conmutativa. Recoñeceremos a composición de funcións porque vemos unha función *dentro* de outra. Por exemplo:

A regra da cadea permite derivar a función dunha función a partir das derivadas das funcións de partida:

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ ou de xeito abreviado } [g \circ f]' = [g(f)]' = g'(f) \cdot f'$$

Debemos aplicar a regra da cadea cando a función elemental non teña á x como variable, senón a unha expresión con x:

Función elemental	Derivada da función elemental	Función composta	Derivada da función composta
$g(x)=\sqrt{x}$	$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$g(f(x))=\sqrt{x^2+5}$	$D[g(f(x))]=\frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot D[x^2+5]=$
$g(x)=x^5$	$g'(x)=5x^4$	$g(f(x))=(3x^2-1)^5$	$D[g(f(x))]=5(3x^2-1)^4 \cdot D[3x^2-1]=$
$g(x)=e^x$	$g'(x)=e^x$	$g(f(x))=e^{x^2-1}$	$D[g(f(x))]=e^{x^2-1} \cdot D[x^2-1]=$

2 Calcula a función derivada de cada unha destas funcións:

a) $f(x)=\sqrt{3x^2-2x+5}$ $f'(x)=\frac{3x-1}{2\sqrt{3x^2-2x+5}}$

b) $f(t)=(3t^2-1)^{13}$ $f'(t)=78t(3t^2-1)^{12}$

c) $\frac{1}{(x-2)^5}$ $\Rightarrow y'=\frac{-5}{(x-2)^6}$

d) $P(t)=e^{t^2}$ $\Rightarrow P'(t)=2t \cdot e^{t^2}$

e) $f(x)=\frac{1+\ln x^2}{x^3}$ $\Rightarrow f'(x)'=\frac{-3 \cdot \ln x^2 - 1}{x^4}$

f) $f(x)=\frac{x^5}{(x-1)^5}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{-5x^4}{(x-1)^6}$

g) $f(x)=\ln(2+2\sqrt{x})$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(2+2\sqrt{x})}$

h) $\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ $\Rightarrow y'=\frac{-3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

i) $f(x)=\frac{e^x-x^2}{2}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x-2x}{2}$

j) $f(x)=(1+5\sqrt{x})^3$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{15(1+5\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$

k) $f(x)=\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{-4}{(2-x) \cdot (2+x)}$

l) $I(t)=\frac{3t^2-3}{t^2-1}$ $\Rightarrow I'(t)=0$

m) $(3+2x) \cdot e^{-3x} \Rightarrow f'(x)=(-7-6x) \cdot e^{-3x}$

n) $f(x)=\frac{x^2+1}{\ln x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x^2 \cdot \ln(x) - x^2 - 1}{x \cdot \ln^2(x)}$

3 - Aplicacións das derivadas.

Habitualmente as funcións que son composicións de funcións elementais son derivables en todo o seu dominio.

Son excepcións a esta xeneralización as funcións definidas a anacos (non estudamos a derivabilidade no punto de ruptura) e as funcións definidas nun intervalo pechado (non son derivables nos bordes do intervalo).

3.1.- Análise análise da monotonía e os extremos relativos dunha función derivable.

Se unha función f é derivable en a , entón:

$$\begin{cases} f'(a) < 0 \Rightarrow f \text{ é decrecente en } a \\ f'(a) > 0 \Rightarrow f \text{ é crecente en } a \\ f'(a) = 0 \Rightarrow a \text{ é un punto crítico de } f \Rightarrow \text{máximo, mínimo ou punto de inflexión} \end{cases}$$

Se a é un punto crítico, entón en a hai un máximo, un mínimo ou un punto de inflexión.

Se f NON é derivable en $a \Rightarrow f$ pode ser crecente ou decrecente, pode ter máximos ou mínimos, pero NON podemos usar a derivada para facer a análise.

Para determinar os intervalos de crecemento e decrecemento (monotonía) así como os máximos e mínimos relativos actuamos así:

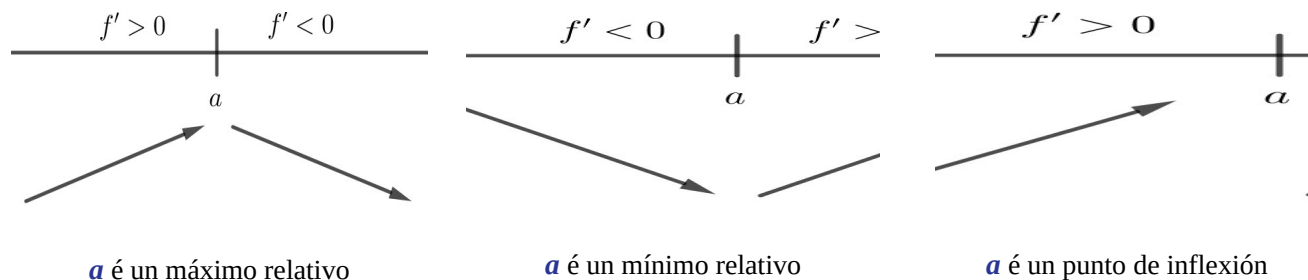
Procedemento	Exemplo
Se f é derivable nun intervalo (a, b) , localizamos os puntos críticos x_0 , x_1 , etc, atopando os valores de x que anulan a derivada	$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 7-x & \text{se } 4 < x \leq 7 \end{cases}$ é derivable en $(0,4)$ e $f'(x)=2x-4$ anúlase para $x_0=2$
Sacamos os puntos críticos do intervalo (a, b) . Agora temos varios sub-intervalos e estudamos o signo da derivada en cada un deles. Para isto calculamos o signo da derivada nun punto de cada sub-intervalo:	Dividimos o intervalo $(0,4)$ en $I_1=(0,2)$ e $I_2=(2,4)$ Como $f'(1)=-2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \in (0,2)$ Logo f é decrecente en $I_1=(0,2)$ Como $f'(3)=2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in (2,4)$ Logo f é crecente en $I_2=(2,4)$

Se ao pasar por un punto crítico a derivada da función cambia de signo, entón a función ten un extremo relativo (máximo ou mínimo)

Como en $x_0=2$ a derivada pasa de negativa a positiva, a función pasa de decrecente a crecente e polo tanto alcanza un mínimo.

3.2.- Extremos dunha función derivable (método da monotonía)

Estudamos o crecemento e decrecemento de f á esquerda e dereita de a mediante o signo de f' . Se $f'(a)=0$, entón:



3.3.- Extremos dunha función derivable (método da segunda derivada)

Este método pode ser preferible se é fácil calcular a 2ª derivada ou se temos que obtela para estudar a curvatura:

Procedemento	Exemplo
Se x_0 é un punto crítico de f (é dicir, $f'(x_0)=0$) estudamos o signo da derivada segunda de f	No exemplo anterior, $f'(x)=2x-4$ anúlase para $x_0=2$ e
Se $f''(x_0)<0$ a función ten un máximo relativo en x_0 Se $f''(x_0)>0$ a función ten un mínimo relativo en x_0 Se $f''(x_0)=0 \Rightarrow$ habería que seguir derivando (*)	Como $f''(x)=2>0 \Rightarrow f'(x)>0 \forall x \in (0,4)$ e en particular $f''(x_0)=2>0 \Rightarrow$
(*) Non atoparemos este caso nas funcións que se manexan neste curso pero o método sería este: Se $f''(x_0)=0 \Rightarrow$ hai que seguir calculando derivadas ata atopar a primeira que non se anula en x_0 . É dicir, a primeira na que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Entón: Se n é impar $\Rightarrow x_0$ é un punto de inflexión	
	Se n é par $\begin{cases} f^{(n)}(a)>0 \Rightarrow a \text{ é un mínimo relativo} \\ f^{(n)}(a)<0 \Rightarrow a \text{ é un máximo relativo} \end{cases}$

Atención! Se f é derivable e a é un máximo ou mínimo relativo $\Rightarrow f'(a)=0$

PERO $f'(a)=0$ NON IMPLICA que a sexa un máximo ou mínimo relativo

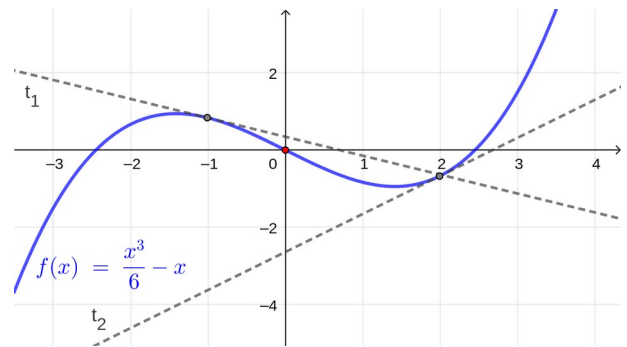
3.4.- Cotas dunha función

En moitos exercicios pídese atopar os valores nos que a función alcanza ou supera unha certa cantidade, é dicir, resolver a inecuación $f(x) \leq C$ ou $f(x) \geq C$. Se a expresión de f é fácil, pódese tentar resolver o exercicio alxebricamente; pero na maioría dos casos debemos resolver a ecuación asociada $f(x)=C$ e axudarnos da gráfica ou do estudo da monotonía para saber cando a función estará por riba ou por debaixo de C .

4 - Curvatura

4.1.- Concavidade e convexidade

- **f é convexa** en a se nun entorno dese punto, a gráfica da función está por riba da tanxente á curva nese punto.
Neste exemplo a función é convexa para calquera $a > 0$
- **f é cóncava** en a se nun entorno dese punto, a gráfica está por debaixo da tanxente á curva nese punto.
Neste exemplo a función é cóncava para calquera $a < 0$



Función convexa nun punto a	Función cóncava nun punto a
f é derivable e $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ é convexa en a A parábola $f(x) = x^2$ é unha función convexa en todo o seu dominio: ◦ A gráfica está por enriba de calquera tanxente ◦ A segunda derivada é sempre positiva: $f''(x) = 2$	f é derivable e $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ é cóncava en a A parábola $f(x) = -x^2$ é unha función cóncava en todo o seu dominio. ◦ A gráfica está por debaixo de calquera tanxente ◦ A segunda derivada é sempre negativa $f''(x) = -2$

Puntos de inflexión

É o punto onde a función pasa de cóncava a convexa ou viceversa, é dicir,

$$a \text{ é un punto de inflexión} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(a) = 0 \\ f''(a) \text{ cambia de signo en } a \end{cases}$$