

## UD4 : Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

### 1. Ecuaciones polinómicas

- **Ecuaciones polinómicas de primer grado:**

Son las formadas por un polinomio de primer grado. Su forma general es  $ax+b=0$  con  $a \neq 0$ . Estas pueden tener una solución, infinitas o ninguna.

Ejemplo:  $\frac{2x}{3} - \frac{x-2}{12} + \frac{x+3}{2} = 2x - \frac{1}{6}$

- **Ecuaciones polinómicas de segundo grado:**

Son las formadas por un polinomio de segundo grado. Su forma general es  $ax^2+bx+c=0$  con

$a \neq 0$ . Las soluciones vienen dadas por:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

El número de soluciones viene dado por el discriminante:

Si  $b^2 - 4ac = 0$  una solución real.

Si  $b^2 - 4ac < 0$  ninguna solución real.

Si  $b^2 - 4ac > 0$  dos soluciones reales.

Cuando la ecuación de segundo grado es incompleta conviene resolverla sin usar la fórmula:

Si falta el término de primer grado se despeja  $x^2$  y se halla la raíz cuadrada.

Si falta el término independiente se extrae factor común  $x$ .

Ejemplo:  $\frac{x^2+1}{2} - \frac{2x-3}{4} + \frac{x^2}{6} = \frac{59}{12}$

- **Ecuaciones polinómicas de grado superior:**

Las ecuaciones de grado superior a dos se resuelven usando el método de Ruffini.

Ejemplo:  $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

### 2. Ecuaciones bicuadradas

Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones del tipo  $ax^4+bx^2+c=0$ . Para resolverlas se hace el cambio de variable  $t=x^2$ .

Sustituyendo nos queda una ecuación de segundo grado  $at^2+bt+c=0$ .

Resolvemos la ecuación y obtenemos el valor de "t". Después calculamos "x" usando que  $t=x^2$

Ejemplo:  $9x^4+5x^2-4=0$

1. Realizamos el cambio de variable  $x^2=t$  y resolvemos la ecuación:

$$9t^2+5t-4=0 \Rightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{18} = \frac{-5 \pm 13}{18} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{9} \\ t = -1 \end{cases}$$

2. Deshacemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3} \\ x^2 = -1 \Rightarrow \text{No tiene solución real} \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones:  $x = \frac{2}{3}$  y  $x = -\frac{2}{3}$

### 3. Soluciones complejas de una función polinómica

Para resolver las ecuaciones del tipo  $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$  necesitamos ampliar el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  a otro conjunto más grande que los englobe. Este nuevo conjunto se denomina **conjunto de los números complejos**  $\mathbb{C}=\mathbb{R}\cup\{i\}$ .

La **unidad imaginaria** es el número complejo  $i$  siendo  $i=\sqrt{-1}$ , por lo tanto  $\sqrt{-4}=\pm 2i$ ,  $\sqrt{-9}=\pm 3i$  y así sucesivamente.

Los números complejos son de la forma  $z=a+bi$ , por ejemplo:  $4i, -3i, 2+3i, -5+4i, \dots$

Ejemplo:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow x=\pm i$$

$$x^2-4x+5=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2+i \\ x=2-i \end{cases}$$

### 4. Ecuaciones racionales

Las **ecuaciones racionales** son las formadas por fracciones algebraicas, es decir, aquellas en las que la incógnita aparece en los denominadores.

En la resolución de este tipo de ecuaciones pueden aparecer soluciones que anulen algún denominador y que, por lo tanto, no sean válidas. Debemos comprobar las soluciones obtenidas para este tipo de ecuaciones.

Ejemplo:  $\frac{3}{x-1}-2=\frac{6}{x^2-1}$

1. Reducimos a común denominador:

$$\frac{3(x+1)}{x^2-1}-\frac{2(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{6}{x^2-1} \Rightarrow 3(x+1)-2(x^2-1)=6$$

2. Resolvemos la ecuación polinómica obtenida:

$$3(x+1)-2(x^2-1)=6 \Rightarrow 3x+3-2x^2+2=6 \Rightarrow 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Comprobamos los resultados:

$x=1$ , esta solución la descartamos porque elimina los denominadores de la ecuación inicial.

$x=\frac{1}{2}$ , es una solución válida.

Ejercicio propuesto:  $\frac{3}{x}-\frac{x}{x+2}=\frac{5x-1}{x^2+x-2}$

## 5. Ecuaciones irracionales

Las **ecuaciones irracionales** son aquellas en las que la incógnita aparece en el radicando de una raíz.

En la resolución de las ecuaciones irracionales pueden aparecer soluciones falsas, por lo tanto, siempre deberemos comprobar las soluciones.

Ejemplo:  $x - \sqrt{x+3} = 2x+1$

1. Aislamos la raíz en un miembro:  $-\sqrt{x+3} = x+1$

2. Elevamos al cuadrado ambos miembros para que desaparezca la raíz: :

$$(-\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2$$

3. Operamos esta expresión y resolvemos la ecuación polinómica obtenida:

$$x+3 = x^2 + 2x+1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

4. Comprobamos las soluciones en la ecuación original:

$$x = -2 \Rightarrow -2 - \sqrt{-2+3} = 2(-2)+1 \Rightarrow -3 = -3 \Rightarrow x = -2 \text{ es solución}$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1+3} = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow -1 \neq 3 \Rightarrow x = 1 \text{ NO es solución}$$

## 6. Ecuaciones logarítmicas

Las **ecuaciones logarítmicas** son aquellas en las que la incógnita aparece en la base o el argumento de un logaritmo.

Para resolver ecuaciones logarítmicas se modifican los miembros con ayuda de las propiedades de los logaritmos y debemos tener en cuenta que  $\log A = \log B \Leftrightarrow A = B$

No existe el logaritmo de 0 ni el logaritmo de un número negativo, por lo que debemos comprobar las soluciones obtenidas.

Ejemplo:  $2 \log x - \log(x+4) = \log 2$

1. Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$$\log x^2 - \log(x+4) = \log 2 \Rightarrow \log \frac{x^2}{x+4} = \log 2 \Rightarrow \frac{x^2}{x+4} = 2$$

1.

2. Operamos esta expresión y resolvemos la ecuación polinómica obtenida:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

3. Se comprueba si las soluciones son válidas en la ecuación original:

$$x = 4 \Rightarrow 2 \log 4 - \log(4+4) = \log 2 \text{ es solución}$$

$x = -2 \Rightarrow 2 \log(-2) - \log((-2)+4) = \log 2$  no es una solución válida, ya que  $\log(-2)$  no está definido en  $\mathbb{R}$ .

## 7. Ecuaciones exponenciales

Las **ecuaciones exponenciales** son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente. Para resolverlas se aplican las propiedades de las potencias y alguna de estas técnicas:

**Tipo 1:** Cuando hay un único sumando a cada uno de los lados de la igualdad. Para resolverlas tenemos que expresar o bien en la misma base o bien en el mismo exponente los dos lados de la igualdad. Debemos tener en cuenta que  $a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$  siempre que  $a \neq 0, a \neq 1$  y  $a \neq -1$ .

Ejemplo:  $81^{2x} = \frac{1}{3}$

Expresamos todas las potencias de la ecuación en la misma base:

$$(3^4)^{2x} = 3^{-1} \Rightarrow 3^{8x} = 3^{-1} \Rightarrow 8x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$$

**Tipo 2:** Cuando tenemos varios sumandos en uno o en ambos miembros de la igualdad. Para resolverla hacemos un cambio de variable  $z = 2^x, 3^2, 5^x \dots$

Ejemplo:  $4^x + 3 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0$

1. Expresamos todos los términos en función de  $2^x$ :

$$(2^2)^x + 3 \cdot 2 \cdot 2^x - 16 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 6 \cdot 2^x - 16 = 0$$

2. Hacemos un cambio de variable  $2^x = z$  y resolvemos la ecuación obtenida:

$$z^2 + 6z - 16 = 0 \begin{cases} z = 2 \\ z = -8 \end{cases}$$

3. Deshacemos el cambio de variable y calculamos x:

$$z = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$z = -8 \Rightarrow 2^x = -8 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

**Tipo 3:** Cuando no se puedan aplicar las técnicas anteriores, tomamos logaritmos.

Ejemplo:  $2^{2x+1} = 189$

Como no se puede expresar en potencias de la misma base, tomamos logaritmos

$$\log 2^{2x+1} = \log 189 \Rightarrow (2x+1) \log 2 = \log 189 \Rightarrow 2x - 1 = \frac{\log 189}{\log 2} = 7,562 \Rightarrow x = 4,281$$

## 8. Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

Para resolver un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas se puede aplicar el método de Gauss, que consiste en usar operaciones elementales en las ecuaciones para transformar un sistema de ecuaciones lineales, en un sistema reducido de forma triangular; que es, por tanto, equivalente al original, es decir, tiene las mismas soluciones.

El sistema reducido tiene que quedar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax+by+c=d \\ b'y+c'z=d' \\ c''z=d'' \end{cases}$$

En general, se siguen los siguientes pasos:

1. Reducir la 2ª y 3ª ecuación con ayuda de la 1ª para que se eliminen las x en ellas.
2. Reducir la tercera ecuación con ayuda de la segunda para eliminar la y en ella.
3. Hallar el valor de z.
4. Sustituimos la z en la 2ª ecuación y calculamos la y.
5. Sustituimos el valor de z e y en la 1ª ecuación y calculamos la x.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y - 6z = -1 \end{cases} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ 2x - y - 6z = -1 \end{cases} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_1} \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ -3y - 2z = -19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ -3y - 2z = -19 \end{cases} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ -3y + 8z = -14 \\ -10z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

Faltan ahora calcular x e y.

Según el número de soluciones el sistema puede ser:

- **Sistema compatible determinado:** una solución.
- **Sistema compatible indeterminado:** infinitas soluciones.
- **Sistema incompatible:** ninguna solución.

Ejercicios propuestos:

a) 
$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+3z=4 \\ 5x-5y+4z=8 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2y-z=-1 \\ 5x-y-3z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$$

## 9. Sistemas de ecuaciones no lineales

Un **sistema de ecuaciones es no lineal** cuando alguna de las ecuaciones no es de primer grado. Las ecuaciones pueden ser polinómicas de grado mayor o igual a dos, racionales, irracionales, logarítmicas, exponenciales ...

Estos sistemas se suelen resolver por el método de sustitución, o con el de reducción

Ejemplo: 
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$$

Despejamos x en la ecuación lineal y la sustituimos en la ecuación de segundo grado.

## 10. Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicos

Los sistemas de ecuaciones exponenciales son aquellos en los que aparece al menos una ecuación exponencial. Para resolverlos se usan los mismos métodos que se aplican en la resolución de ecuaciones exponenciales junto con los métodos de resolución de sistemas. En particular resulta útil hacer un cambio de variable para transformar el sistema en uno lineal

$$u = a^x \quad y \quad v = b^x$$

Ejemplo: 
$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^{x+1} - 3^y = 7 \end{cases}$$

Los sistemas de ecuaciones logarítmicos son aquellos sistemas de ecuaciones que contienen alguna ecuación logarítmica. Se resuelven usando los mismos métodos que se aplican en la resolución de ecuaciones logarítmicas junto con los métodos de resolución de sistemas. No podemos olvidarnos de comprobar la validez de las soluciones.

Ejemplo: 
$$\begin{cases} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ 2 \log x + 2 \log y = 2 \end{cases}$$

## 11. Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre expresiones algebraicas, por ejemplo  $x+2 < 5$  y  $x^2 - 1 \geq 3$

Resolver una inecuación es averiguar lo que tiene que valer la incógnita para que se cumpla la desigualdad. Para resolver inecuaciones se usan fundamentalmente dos reglas, llamadas reglas de equivalencia:

- Se pueden pasar los términos de un miembro a otro de la inecuación cambiándolos de signo.
- Si se multiplica o divide una inecuación por un número positivo se mantiene el sentido de la desigualdad pero si el número es negativo cambia el sentido de la desigualdad.

Una inecuación puede no tener solución, tener algunas soluciones o tener infinitas soluciones.

- **Inecuación de primer grado**

Es una desigualdad algebraica de polinomios de grado 1. Se resuelven por el mismo procedimiento que las ecuaciones de primer grado pero sin olvidar las propiedades de las desigualdades.

Ejemplo:  $-2(x+5) \leq -7x+9$

$$-2(x+5) \leq -7x+9 \Rightarrow -2x-10 \leq -7x+9 \Rightarrow 2x+7x \leq 9+10 \Rightarrow 9x \leq 19 \Rightarrow x \leq \frac{19}{9} \Rightarrow x \leq 2$$

La solución es  $x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$

- **Inecuación de grado dos o superior**

Es una desigualdad algebraica formada por polinomios de grado mayor o igual que dos.

Para resolverlas seguimos los pasos:

1. Calculamos las raíces de la ecuación.
2. Marcamos las raíces en la recta real quedando esta dividida en intervalos.
3. Escogemos un punto de cada uno de los intervalos y estudiamos el signo de la inecuación en ese punto.
4. Por último, tomamos como solución aquellos intervalos que coincidan con el signo de la inecuación.

Ejemplo:  $x^2-6x+8 \leq 0$

$x^2-6x+8=0$  Las soluciones de esta ecuación son  $x=2$  y  $x=4$

Por lo tanto nos queda la recta real dividida en 3 intervalos:  $(-\infty, 2), (2, 4), (4, +\infty)$

Elegimos un punto de cada intervalo y analizamos su signo:

$(-\infty, 2)$ : Elegimos  $x=0$ ,  $0^2-6 \cdot 0+8=8 \geq 0$

$(2, 4)$ : Elegimos  $x=3$ ,  $3^2-6 \cdot 3+8=-1 \leq 0$

$(4, +\infty)$ : Elegimos  $x=5$ ,  $5^2-6 \cdot 5+8=3 \geq 0$

La solución es  $[2, 4]$

- **Inecuación racional**

Es una desigualdad entre fracciones algebraicas. Para resolverlas seguimos estos pasos:

1. Se escribe la ecuación de forma que uno de sus miembros sea nulo.
2. Se factorizan los polinomios del numerador y del denominador.
3. Se analiza el signo de los factores y se obtiene la solución.

NOTA: Los números que anulan el denominador no son nunca soluciones de la inecuación, ya que en ellos la expresión no está definida.

Ejemplo:  $\frac{x-3}{x+5} \geq 0$

El numerador cambia de signo en  $x=3$ , y el denominador en  $x=-5$ . Dividimos la recta en esos tres tramos y en cada uno elegimos un valor de  $x$  para estudiar el signo de la fracción algebraica:

|                   |              |         |         |               |
|-------------------|--------------|---------|---------|---------------|
|                   | $-\infty$    | $-5$    | $3$     | $+\infty$     |
|                   | $\leftarrow$ | $\circ$ | $\circ$ | $\rightarrow$ |
|                   | $x=-6$       | $x=0$   | $x=4$   |               |
| $x-3$             | -            | -       | +       |               |
| $x+5$             | -            | +       | +       |               |
| $\frac{x-3}{x+5}$ | +            | -       | +       |               |

La solución corresponde a los intervalos en los que la fracción es positiva. Además, como la fracción no es estricta,  $x=3$  verifica la desigualdad:  $x \in (-\infty, -5) \cup [3, +\infty)$

## 12. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Un **sistema de inecuaciones** está formado por dos o más inecuaciones. Para calcular sus soluciones, resolvemos cada una de las inecuaciones que forman el sistema y hallamos la intersección de las soluciones obtenidas.

Ejemplo: 
$$\begin{cases} 4x-3 < 1 \\ x+6 > 2 \end{cases}$$

Resolvemos cada inecuación: 
$$\begin{cases} 2x-1 > x+3 \Rightarrow x > 4 \\ 3x+2 \leq 7+2x \Rightarrow x \leq 5 \end{cases}$$

Hallamos la intersección de las soluciones:

La solución es:  $x \in (4, 5]$



## 13. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Para resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas, debemos seguir los siguientes pasos.

1. Se sustituye el signo de cada desigualdad por un  $=$ .
2. Se representan las ecuaciones (rectas) del sistema usando una tabla de valores.
3. Se elige un punto exterior a la recta y miramos si verifica o no la desigualdad, para establecer el semiplano.
4. La solución es la intersección de todos los semiplanos.

$$\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-2y \geq -4 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

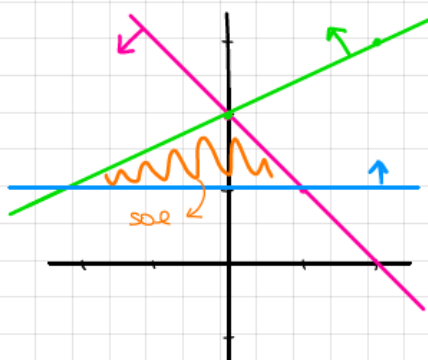
$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

Representamos  
las rectas usando  
tabla valores

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 2 | 3 |

| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |



Estudiamos si el  $(0,0)$  satisface la inecuación  $0+0 \leq 2$  ✓  
Entonces el semiplano es hacia abajo

Estudiamos si el  $(0,0)$  satisface la inecuación  $0-0 \geq -4$  ✓  
Entonces el semiplano es hacia arriba

Estudiamos si el  $(0,0)$  satisface la inecuación  $0 \geq 1$  ✗  
Entonces el semiplano es hacia arriba



## UD4 : Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

### Ecuaciones

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas hallando sus soluciones reales y complejas:

- |                                                                             |                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| a) $2x - \frac{3x-1}{3} = x + \frac{1}{3}$                                  | b) $\frac{3x-1}{4} - 2x = \frac{2x-\frac{7}{4}}{2} - (3x-1)$          |
| c) $6x^2 - 1 + \frac{2x(-x+3)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6}$ | d) $\frac{x^2+1}{2} - \frac{2x-3}{4} + \frac{x^2}{6} = \frac{59}{12}$ |
| e) $6x^4 + 13x^3 - 8x^2 - 17x + 6 = 0$                                      | f) $2x^4 - x^3 - 3x - 18 = 0$                                         |
| g) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0$                                             | h) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$                                           |
| i) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$                                                  | j) $x(9x^2 - 1)(2x + 3) = 0$                                          |
| k) $x^4 - 6x^3 + x^2 + 54x - 90 = 0$                                        | l) $x^6 + 2x^5 + 22x^4 + 46x^3 - 71x^2 - 100x + 100 = 0$              |
| m) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 20x + 13 = 0$                                       | n) $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$                                             |

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones racionales e irracionales.

- |                                                           |                                                              |                                                        |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $\frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x+2} = \frac{6x^2}{x^2-4}$ | b) $\frac{x+9}{x} - \frac{5+x}{x+2} = \frac{12x+12}{x^2+2x}$ | c) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}$ |
| d) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{7}{6}$  | e) $x+4+5\sqrt{x-2}=0$                                       | f) $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$                           |
| g) $\frac{x-1}{\sqrt{x}} = x - \frac{5}{2}$               | h) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$                             |                                                        |

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

- |                                                                      |                                                 |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4$                             | b) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$               |
| c) $\log(2x+3) - \log(x-1) = 2\log 2 + 2\log 3$                      | d) $2\log(2x-2) - \log(x-1) = 1$                |
| e) $\log\left(\frac{2x-2}{2}\right) = 2\log(x-1) - \log x$           | f) $\frac{\log(4-x)}{\log(x+2)} = 2$            |
| g) $\log_3(x-1) - \log_3(x+2) = 1 - \log_3(x+6)$                     | h) $\log(x-2) - \frac{1}{2}\log(3x-6) = \log 2$ |
| i) $\frac{\ln(x-1) + \ln(3x)}{2} = \ln\left(2x - \frac{1}{2}\right)$ | j) $x(9x^2 - 1)(2x + 3) = 0$                    |

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

- a)  $4^{x^2+1}=2^{5x+5}$       b)  $4^{(x-2)^2}=262144$       c)  $2^3 \cdot 2^{x-5}=0,25$
- d)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{3-5x}=\left(\frac{25}{4}\right)^{3x-1}$       e)  $9^x+5 \cdot 3^x-24=0$       f)  $3^{x+2}+9^{x-1}=90$
- g)  $9^x+3^{2x-1}+3^{x-1}=111$       h)  $9^x+3^{2x-1}+3^{x-1}=111$       i)  $2^{2x-4}-5 \cdot 2^{x-3}+1=0$
- j)  $9^{x+2}+3^{x+3}-810=0$       k)  $\sqrt[3]{27}=3^{x+2}$       l)  $49^{\frac{x-5}{3}}=\frac{1}{\sqrt{7^{x-1}}}$

### Sistemas de ecuaciones

5.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones **utilizando el método de Gauss** y clasifícalos según el número de soluciones.

- a)  $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$
- e)  $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$       f)  $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$       g)  $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=15 \\ x+y-z=7 \end{cases}$       h)  $\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

6.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

- a)  $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 2x+3y^2=22 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2x+5y=-8 \\ xy-3x=-5 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} x+y=0 \\ xy=1 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$       e)  $\begin{cases} x+y=11 \\ \frac{1}{x}+\frac{6}{y+1}=1 \end{cases}$       f)  $\begin{cases} xy=-3 \\ x^2+2y^2=19 \end{cases}$

7.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

- a)  $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2^x-2^y=1016 \\ 2^{x-y}=128 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ 3^{x-1}-7^{y+2}=-340 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} \frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}=\frac{x+y}{8} \\ x+y=5 \end{cases}$

8.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

- a)  $\begin{cases} \log x+3\log y=5 \\ \log x-\log y=3 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} \log_3 x=7-\log_3 y \\ x-2y=27 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 3x+2y=64 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} \log x^3-2\log y=6 \\ 2\log x+\log y^2=2 \end{cases}$

## Inecuaciones

9.- Resuelve las siguientes inecuaciones.

- a)  $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \leq \frac{x}{2}$       b)  $2x-3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6}$       c)  $x+2(x+1)+3(x+2) < \frac{x+38}{2}$
- d)  $2x^2+3x > 0$       e)  $3x^2-x-24 \geq 0$       f)  $x^3-4x > 0$
- g)  $x^3+x^2-x-1 \leq 0$       h)  $x^4-1 > 0$       i)  $(x-1)(x+4) < -6$
- j)  $\frac{5x-2}{2x+1} \geq 0$       k)  $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0$       l)  $\frac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0$
- m)  $\frac{x^3}{x^2-9} \geq 0$       n)  $\frac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geq 0$       o)  $\frac{2x+3}{x^3+1} \geq 0$

## Sistemas de inecuaciones

10.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una inc3gnita.

- a)  $\begin{cases} 2x+1 < x+2 \\ 3x-1 \leq 4x \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x^2+2x-3 \geq 0 \\ 2(x-3) > -6 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 3x-4 > x \\ x \geq 2x-1 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} > 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases}$

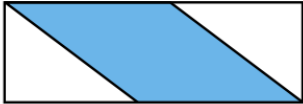
11.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos inc3gnitas.

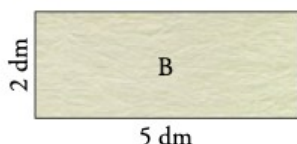
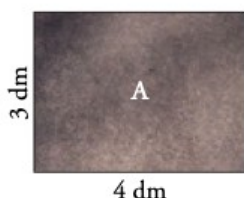
- a)  $\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ x+y \leq 3 \\ x-y \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 3x+4y \geq 12 \\ -3x+4y \leq 4 \\ x-4 \leq 0 \end{cases}$



## UD4 : Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

### Problemas

- 1.- Un circo está compuesto por tres pistas circulares tangentes dos a dos. Las distancias entre sus centros son 80, 100 y 120 metros, respectivamente. Calcula el diámetro de cada una de las pistas.
- 2.- Una vasija contiene una mezcla de alcohol y agua en una proporción de 3 a 7. En otra vasija la proporción es de 2 a 3. ¿Cuántos cazos hemos de sacar de cada vasija para obtener 12 cazos de una mezcla en la que la proporción alcohol-agua sea de 3 a 5?
- 3.- Preparamos un surtido con dos tipos de bombones de 10 €/kg y de 15 €/kg, respectivamente. Nuestro presupuesto es de 600 € y queremos preparar, al menos, 40 kg. ¿Qué restricciones tiene la composición del surtido?
- 4.- Un comité de una comunidad de vecinos debe estar formado por entre 6 y 8 personas, no pudiendo ser el número de hombres ni el de mujeres inferior a un tercio del grupo. Establece las restricciones del problema.
- 5.- En una función de teatro se recaudan 5 200 € vendiéndose 200 entradas de tres tipos distintos: patio de butacas, a 30 €; primer y segundo piso, a 25 €, y localidades con visibilidad reducida, a 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25 % del número de localidades de 25 €, calcula el número de entradas de cada tipo.
- 6.- En una caja registradora encontramos billetes de 50 €, 100 € y 200 €, siendo el número total de billetes igual a 21 y la cantidad total de dinero 1 800 €. Sabiendo que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €, calcula el número de billetes de cada clase.
- 7.- De dos triángulos rectángulos se sabe que: la suma de sus hipotenusas es 18, sus catetos menores son 3 y 5, respectivamente, y sus catetos mayores están en relación 1/3. Determina dichos triángulos.
- 8.- Un almacén tiene contenedores de reciclado para abastecer a las dos entidades para las que trabaja durante 6 meses. Sabiendo que, si suministrara a una sola de las dos, a la primera la podría servir durante 5 meses más que a la segunda, ¿durante cuánto tiempo podría proveer a cada una de ellas si fuesen clientes únicos?
- 9.- Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilogramos compró?
- 10.- El cuadrilátero central es un rombo de 40 m de perímetro. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que la base es el triple de la altura.
- 11.- Calcula las dimensiones de una finca rectangular sabiendo que su perímetro mide 140 m y su diagonal es de 50 m.
- 12.- En una tienda se vende té blanco a 18 €/kg y té verde a 14 €/kg. También, una mezcla de ambos a 16,40 €/kg. ¿Cuál es la composición de la mezcla?
- 13.- Para cubrir el suelo de una habitación, un solador dispone de dos tipos de baldosas:



Eligiendo el tipo A, se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiera el tipo B. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

14.- Las edades de una familia formadas por los padres y una hija suman 86 años. Halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que la edad de la madre es el triple de la edad de la hija, y las edades del padre y de la hija difieren en 26 años.

15.- Se quieren elaborar lotes de tres tipos con programas informáticos. Cada lote del tipo A debe contener dos CD con programas de aplicaciones y tres CD con juegos. Cada lote de tipo B debe contener tres CD de aplicaciones y otros tres con juegos. Finalmente, cada lote de tipo C debe contener dos CD con aplicaciones y cuatro con juegos. Se quiere elaborar un total de 100 paquetes y para ello se dispone de 260 CD de aplicaciones y 325 CD de juegos. ¿Cuántos lotes de cada tipo se deberán hacer si se quieren utilizar todas las existencias disponibles?

16.- Una central lechera emplea partidas de 10.400 litros de leche que envasa en bricks de un litro de leche entera, semidesnatada o desnatada, obteniendo por la venta 5765 euros. Halla cuántos bricks de cada tipo envasa sabiendo que su precio es de 0,60; 0,55 y 0,50 euros respectivamente, y que además, el número de bricks de leche entera es el 60% del de semidesnatada y desnatada juntos.

17.- La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas se esconde en la espesura de un bosque. Una abeja hembra con un macho, se quedan encerrados en una flor de loto. Además, los  $\frac{8}{9}$  del enjambre se quedaron atrás. ¿Cuál es el número de abejas que forman el enjambre?

18.- En un instituto la relación del número de chicos con el número de chicas era de  $\frac{8}{9}$ , pero en junio esta relación era de  $\frac{25}{21}$ , pues abandonaron el centro 20 chicos y el 30% de las chicas. ¿Cuántos alumnos acabaron el curso?

19.- El dueño de una tienda de fotografía dese comercializar dos tipos de cámaras de fotos A y B. Para la compra de ambos tipos dispone de un máximo de 2760 euros y hará el pedido a un almacén que le cobra 120 euros por la cámara tipo A y 180 euros por la cámara B. El dueño hará el pedido con la condición de que: por lo menos 3 cámaras sean de tipo A, entre 4 e 12 sean del tipo B, y el número de cámaras de tipo A no debe superar en más de 3 al número de cámaras de tipo B. Formula un sistema de inecuaciones y representa la solución.

20.- Un alfarero elabora dos tipos de piezas: jarrones y ollas, en cantidades reducidas. Sabe que no puede producir más de 8 piezas diarias ni tampoco más de 4 ollas diarias. También, por motivos de producción, desea que el número de jarrones no supere al número de ollas en más de 2 piezas. Formula un sistema de inecuaciones y representa la solución.

21.- El día que se iban a repartir 4000 € entre varios socios faltaron 9, con lo que los presentes tocaron a 90 € más cada uno. ¿Cuántos socios son?

22.- Si se aumenta en 3 m el lado de un cuadrado, la superficie aumenta en 75 m<sup>2</sup>. ¿Cuál es la longitud del lado?

23.- Un automovilista que se detiene a repostar observa que para llegar a su destino todavía le queda el triple de lo que ya ha recorrido. Además, se da cuenta de que, si recorre 10 km más, estará justo en la mitad del trayecto. ¿Cuántos km ha recorrido y cuál es la longitud del viaje?

24.-Un grupo de escolares quieren remodelar un depósito de 1000 metros cúbicos que abastece de agua potable. Tiene forma cuadrangular tal que la altura es el cuadrado del lado de la base menos 15 metros. Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

25.- Dos árboles de 15 m y 20 m de altura están a una distancia de 35 m. En la copa de cada uno hay una lechuza al acecho. De repente, aparece un ratoncillo y ambas lechuzas se lanzan a su captura a la misma velocidad, llegando simultáneamente al lugar de la presa. ¿A qué distancia de cada árbol apareció el ratón?

26.- Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1 € menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto le costó cada caja?

27.- Una asesoría laboral tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. El próximo año quiere conseguir como clientes por lo menos a 5 empresas, y a un número de particulares que, como mínimo, debe superar en 4 a doble del número de empresas. Además, el número total de clientes anuales no debe superar los 40 clientes. Expresa las restricciones del problema y representa la solución.

