

1 - Igualdades y Ecuaciones

1) Igualdad, identidad y ecuación

Una **igualdad** identifica dos ó más objetos matemáticos cuyo valor numérico es el mismo: dos operaciones combinadas, dos expresiones algebraicas, la longitud de dos segmentos, etc.

Una **identidad** identifica dos ó mas expresiones algebraicas que son siempre iguales, independientemente del valor que substituya a la variable.

Una **ecuación** identifica **dos expresiones algebraicas** que sólo son iguales para algunos valores, que llamamos **soluciones** de la ecuación. Los número desconocidos representados con letras son **incógnitas**.

Igualdad	Identidad	Ecuación
$\frac{3}{2} - 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} - 5 + \frac{5}{4} = \frac{-9}{4}$	$5 \cdot \left(a - \frac{1}{b}\right) = 5a - \frac{5}{b}$	$5 \cdot \left(a - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$

2) Propiedades y elementos de las ecuaciones:

- A las expresiones separadas por el igual se les llama **1º miembro** y **2º miembro**.

En general **no puede haber más de 2 miembros** en una ecuación: $\overbrace{5 \cdot (a-1)}^{1^\circ \text{ miembro}} = \overbrace{2a+3}^{2^\circ \text{ miembro}}$.

- Si calculamos el valor numérico en cada miembro y ambos coincide, el número usado es una **solución** de la ecuación.
- Una ecuación puede tener 0, 1, 2, ... infinitas soluciones. Si todos los números son soluciones, le llamamos igualdad o identidad. OJO!! Puede tener infinitas soluciones pero no que todos los números sean solución:

Ninguna solución	Una solución	Dos soluciones	Infinitas soluciones	Cualquier número es solución
$x+2=x-2$	$x+2=-2$	$x^2-2=2$	$x-y=2$	$x+2=3x-2$ $x+4-2$

- En general, el número de soluciones es (como máximo) el grado de la ecuación.

3) Transformaciones equivalentes:

Si hacemos la **misma operación en ambos miembros de una ecuación** obtenemos otra ecuación equivalente. Es decir, la solución de cada ecuación obtenida con este método es la misma que la ecuación original.

Usaremos esta técnica para transformar las ecuaciones en otras más sencillas:

	Restamos 2a y reducimos	Dividimos por 4 y reducimos
$6a = 50 + 2a \Rightarrow$	$6a - 2a = 50 + 2a - 2a \Rightarrow 4a = 50 \Rightarrow$	$\frac{4a}{4} = \frac{50}{4} \Rightarrow a = 12,5$

2 - Ecuaciones de 1ª grado

1) Pasos para resolver una ecuación de 1ª grado (o para otros tipos de ecuaciones)

(1) ¿Hay paréntesis o corchetes? Aplica la propiedad distributiva para multiplicar el número que hay delante o resta los polinomios. Simplifica	$\frac{2 \cdot (3x+1)}{3} - \frac{x-2}{3} = 2x+3 \Rightarrow$ $\frac{6x+2}{3} - \frac{x-2}{3} = 2x+3 \Rightarrow$
(2) ¿Hay alguna fracción? Calcula el mcm de todos los denominadores y multiplica los dos miembros de la ecuación por ese número. Luego opera y simplifica en ambos miembros. Puede que tengas que repetir el paso anterior. CUIDADADO con los signos negativos antes de una fracción!!	$\frac{6x+2}{3} - \frac{x-2}{3} = 2x+3 \Rightarrow$ $3 \cdot \frac{6x+2}{3} - 3 \cdot \frac{x-2}{3} = 3 \cdot (2x+3) \Rightarrow$ $1 \cdot (6x+2) - 1 \cdot (x-2) = 3 \cdot (2x+3) \Rightarrow$ $6x+2-x+2=6x+9 \Rightarrow$
(3) ¿Hay incógnitas en ambos miembros de la igualdad? Suma o resta en cada miembro los términos que necesites para agrupar todas las incógnitas en un único término. (4) ¿Tienes constantes en ambos miembros de la igualdad? Suma o resta en cada miembro las constantes que necesites para agruparlas todas en el miembro donde no está la incógnita.	(3 y 4) Aplica transposición de términos $6x-x-6x=+9-2 \xrightarrow{\text{Reducir}} -x=5 \xrightarrow{(-1)} x=-5$
(5) ¿La incógnita tiene coeficiente 1? SÍ: la incógnita está despejada y la ecuación está resuelta NO: divide o multiplica los dos miembros de la ecuación por el número que te haga falta para que el coeficiente de la variable sea 1.	$x=-5$
(6) COMPRUEBA LA SOLUCIÓN: $\frac{2 \cdot (3 \cdot (-5) + 1)}{3} - \frac{-5-2}{3} \stackrel{?}{=} 2 \cdot (-5) + 3 \Rightarrow$ 1º Miembro: $\frac{2 \cdot (-14)}{3} - \frac{-7}{3} = \frac{-28+7}{3} = \frac{-21}{3} = -7$ 2º Miembro: $2 \cdot (-5) + 3 = -10 + 3 = -7$	

4) Resolución de problemas con ecuaciones

(1) Representar el problema con un esquema, tabla, dibujo, gráfico, etc. Puedes ayudarte de la pseudoálgebra.	Dos números suman 96. Sabiendo que uno es el triple del otro, ¿qué números son? Nº + Otro Nº = 96
(2) Identifica las cantidades desconocidas. Escribe algebraicamente la relación que hay entre ellas (puedes probar con números arbitrarios para entender esta relación). Usa 1 ó 2 incógnitas como máximo.	Primer Nº = x Segundo Nº = triple de x = 3x
(3) Busca una igualdad en el enunciado y plantea una ecuación.	$x+3x=96 \Rightarrow$
(4) Resuelve la ecuación.	$x=24$
(5) Escribe la solución del problema y compruébala en el enunciado	Primer Nº = 24 Segundo Nº = 72

5) Despejar variables en igualdades (ó incógnitas en ecuaciones).

Es habitual tener que despejar una incógnita en una ecuación en la que además hay otras incógnitas. Para ello tendremos que realizar los mismos pasos que al resolver una ecuación, despejando la incógnita de interés en uno de los miembros y tratando las otras incógnitas como números que se dejan en el otro miembro:

Ley de Boyle-Mariotte	Ley de Ohm	Resistencia equivalente (paralelas)
$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \Rightarrow P_1 = \frac{P_2 \cdot V_2}{V_1}$ Despejamos P_1 trasponiendo V_1	$V = I \cdot R \Rightarrow R = \frac{V}{I}$ Despejamos R trasponiendo I	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ Despejamos R haciendo el inverso de cada miembro

3 - Ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones de segundo grado

Son ecuaciones de 2º grado aquellas en las que la incógnita aparece (al menos una vez) elevada al cuadrado: x^2 ; R^2 ; t^2 ; v^2 .

Por ejemplo: $3x^2 - 3x = x - 1$; $10 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2$; $2 = a^2$; $\pi R^2 = 100$

1) Ecuación canónica ó reducida

Para resolver cualquier ecuación es necesario REDUCIRLA lo máximo posible, eliminando denominadores, paréntesis, agrupando términos semejantes, etc.

Una vez reducida la ecuación de 2ºG quedan tres términos que no podemos reducir, pues no son monomios semejantes. Salvo excepciones, no se puede despejar directamente la incógnita como en las ecuaciones de grado 1.

Tenemos que agrupar todos los términos de la ecuación en el 1º miembro, de forma que el 2º miembro sea 0.

Ejemplo: $3x^2 - 3x = x - 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$ que es una ecuación de 2ºG reducida.

Una ecuación de segundo grado se puede expresar de la forma $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$; con $a \neq 0$, donde a , b y c son números que llamamos coeficientes de la ecuación. A esta forma le llamamos **ecuación canónica ó reducida**.

Conviene, si es posible, simplificar la ecuación para facilitar los cálculos.

Ejemplo: $3x^2 - \frac{3x}{2} = \frac{x}{2} + 2 + x^2 \xrightarrow{+2} 6x^2 - 3x = x - 2x + 4 + 2x^2 \xrightarrow{T y R} 4x^2 - 2x - 4 = 0 \xrightarrow{:2} 2x^2 - 1x - 2 = 0$

2) Tipos de ecuaciones de segundo grado

Aunque todas las ecuaciones de segundo grado son de la forma $a x^2 + b x + c = 0$, podemos diferenciarlas en dos tipos:

◦ **Ecuaciones de 2ºG INCOMPLETAS.** Algún coeficiente es cero, es decir, hay solo dos términos de distinto grado. Las resolveremos con métodos directos, es decir, **NO se resuelven con la fórmula maestra**. Tenemos dos grandes tipos

- **La incógnita sólo aparece una vez:** cualquier ecuación de este tipo se resuelve al despejar la incógnita con una doble raíz cuadrada. Si en la raíz cuadrada queda un n° positivo, la ecuación tiene 2 soluciones opuestas entre sí.

Ejemplo: $3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$. Ya que hay dos números cuyo cuadrado es 4, escribimos así la respuesta: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, lo que quiere decir que las soluciones de esta ecuación son $x = 2$ ó $x = -2$.

Ejemplos: $2 = a^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,4142$ $4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$ $10 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 \Rightarrow \frac{10 \cdot 2}{9,8} = t^2 \Rightarrow t^2 = 49 \Rightarrow t = \pm 7$

Si dentro de la raíz cuadrada queda un n° negativo, la ecuación no tiene solución: $L^2 = -4 \Rightarrow L = \pm\sqrt{-4}$ que no existe.

- **La incógnita aparece con grado 2 y 1:** es necesario sacar factor común y usar un truco de lógica: “si una multiplicación da cero, alguno de los números usados tiene que ser cero”

Ejemplo: $x^2 = 8x \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \xrightarrow{F.C.} x \cdot (x - 8) = 0$. Ya que hay dos números desconocidos x y $x - 8$ cuyo producto es 0, alguno de los dos debe ser cero: $\begin{cases} x = 0 & 1^\text{ª} \text{ solución} \\ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 & 2^\text{ª} \text{ solución} \end{cases}$, por lo que las soluciones son $x = 0$ ó $x = 8$.

Estas ecuaciones siempre tienen dos soluciones, de las que una siempre es cero.

◦ **Ecuaciones de 2ºG completas.** Los tres coeficientes son distintos de cero, es decir, hay tres términos de distinto grado.

Las resolveremos usando la **fórmula maestra**: $a x^2 + b x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$

Las ecuaciones incompletas **NO** se pueden resolver usando la fórmula

3) Número de soluciones de la ecuación de 2º grado:

Se puede saber cuántas soluciones tendrá una ecuación calculando el signo de la expresión que hay dentro de la raíz de la fórmula. A esta expresión se le llama discriminante: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Discriminante positivo: Dos soluciones	Discriminante nulo: Una solución	Discriminante negativo: Ninguna solución
$x^2 + 2x - 3 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 + 2x + 2 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) > 0$	$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$	$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$

Ej. 1 Encuentra el número que falta en $x^2 - [\quad] \cdot x + 9 = 0$ para que tenga una única solución.

Ej. 2 Resuelve las siguientes ecuaciones y haz la comprobación en las que están marcadas con (C):

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $16x^2 = 9$ (C) | b) $5x^2 + 20 = 0$ | c) $5x^2 + 10x = 0$ |
| d) $4A^2 - 1 = 8$ | e) $2x^2 = 3x$ | f) $7x - 21x^2 = 0$ |
| g) $4x^2 - 16 = 9$ (C) | h) $a^2 - 3a = a$ | i) $4x^2 + 16 = 0$ |
| j) $8x^2 = 2$ | k) $7x^2 + 3x = 4x$ | l) $4x^2 + 16 = 0$ |
| m) $x^2 + 2x - 5 = x + 15$ | n) $2 = \frac{9-2m}{3}$ | o) $h^2 + \frac{2}{3}h = h$ |
| p) (C) $x \cdot (x-3) = 0$ | q) $(x+4) \cdot (x-5) = -14$ | r) $(7x-2) \cdot (4-2x) = 0$ |

Ej. 3 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|--|
| a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ | b) $2P^2 - P - 3 = 0$ | c) $4 + 4x + x^2 = 0$ |
| d) $4A^2 - 1A = 8A$ | e) $4x^2 - 4x = 32x$ | f) $11P = 4 - 3P^2$ |
| g) $x^2 - 3x - 10 = 0$ | h) $-5T - 2 + 3T^2 = 0$ | i) $\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \frac{5}{2} = 0$ |

Ej. 4 Obtén las soluciones de estas ecuaciones (si tienen) y haz la comprobación con las soluciones obtenidas:

- | | |
|---|---|
| a) $(a-9)(a+9) = 3(a-27)$ | b) $(y+2)^2 = 2(2-y^2) - y$ |
| c) $x(5x-4) = 3x(x-1)$ | d) $(2b-1)(2b+1) = 1-2b$ |
| e) $6t(t+1) - 3(3t-1) = -4t^2 + 4$ | f) $3m-1 + (2m-1)(m-3) = m(3m-3)$ |
| g) $(m-1) + (2m-1)(m-3) = m(3m-3) - 2m$ | h) $(3x-5)(3x+2) + (x-3)^2 = 3x(3x-2) - 9x$ |
| i) $(x-1) + (2x-1)(x-3) = x(3x-3) - 2x$ | j) $5m \cdot (3m+2) = 3m+2$ |

Ej. 5 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $-\left(P + \frac{5}{3}\right) = 1 - 3P$ | b) $\frac{-1}{5} = \frac{3}{5} - y$ | c) $\frac{2x-5}{5} - \frac{x+4}{4} = x - 2 + \frac{x}{2}$ |
| d) $\frac{a}{6} - \frac{2(2a-5)}{3} = 1 + 2a - \frac{3(a-1)}{2}$ | e) $(-0'63a + 1'45) \cdot 5 = \frac{7'5+a}{10}$ | f) $(x-1752) \cdot (x+2378) = 0$ |
| g) $\frac{3 \cdot (x+2)}{2} - \frac{2 \cdot (x+1)}{5} = \frac{37}{10} - \frac{x-1}{5}$ | h) $1 - \frac{2x-2}{15} - \frac{x-1}{5} = \frac{x}{3}$ | i) $\frac{4}{3} - \frac{2x+5}{9} - \frac{5-4x}{6} = \frac{1-x}{3}$ |
| j) $\frac{x^2+2}{3} - \frac{x^2-2}{4} = 1 + \frac{-2x+5}{12}$ | k) $\frac{13+a}{20} - \frac{10+a}{5} - 5\frac{a}{2} = \frac{1-12a}{10}$ | l) $\frac{2x-3}{2} - \frac{4x+1}{5} = -1 - \frac{4 \cdot (x+1)}{10}$ |

Ej. 6 Obtén la medida pedida en cada caso:

a) La diagonal de un cuadrado de perímetro 12

La altura de un triángulo equilátero de perímetro 12