

UD4: ECUACIONES Y SISTEMAS

APARTADO 1: ÁLGEBRA

En muchas ocasiones en matemáticas necesitamos trabajar con números que no conocemos, en esos casos, los números se representan por letras y se operan con las mismas leyes y propiedades que en las expresiones numéricas. Se pueden usar para:

- Expresar propiedades $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Expresar fórmulas $A = \frac{b \cdot h}{2}$
- Expresar y operar números desconocidos
Peso de un tubo de galletas $\rightarrow x$
Peso de dos tubo de galletas $\rightarrow 2x$

La parte de las matemáticas que se ocupa de estudiar el comportamiento de las expresiones con letras y números se llama álgebra

1.- LENGUAJE ALGEBRAICO

- Los números ó cantidades desconocidas se llaman incógnitas o variables. Se representan con una letra minúscula ó mayúscula. En general la letra minúscula y la mayúscula no representan el mismo valor: $A \neq a$
- En un mismo cálculo o ejercicio, una letra representa a un único número que no cambia a lo largo del ejercicio. Diferentes letras, sin embargo, pueden representar al mismo número.
- Las letras sí pueden tener un valor cambiante.
- Las propiedades de las letras son las mismas que las de los números (conmutativa, asociativa, distributiva, etc) , salvo que en principio no conocemos el valor de esas letras.
- El símbolo de multiplicación se puede omitir si afecta a una variable ó incógnita:
 $3 \cdot x = 3x$

2.- MONOMIOS Y POLINOMIOS

Una **expresión algebraica** es es cualquier combinación de números y letras relacionados entre sí por operaciones aritméticas.

Ejemplo: $3x^2 - x + 2,2a + \sqrt{5}, \frac{3x+1}{3x-2}$

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las variables por números y operar.

Por ejemplo: el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 1$ para $x = -1$ es

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -1 - 1 + 1 = -1$$

Un **monomio** es el producto de una parte **numérica** llamada **coeficiente** y una parte con **letras y exponentes** naturales llamada **parte literal**. Las letras de la parte literal reciben el nombre de variables y representan números de valor desconocido.

Ejemplo: $34a^2bc^7$ es un monomio, el coeficiente es 34 y la parte literal a^2bc^7

Se llama **grado** de un monomio al número de factores que forman su parte literal y se calcula sumando los exponentes de las letras de la parte literal.

Ejemplo: el grado del monomio $34a^2bc^7$ es $2+1+7=10$

Dos monomios son **semejantes** cuando tienen idéntica parte literal.

Ejemplo: $\frac{-5}{2}xy^2$ y $100xy^2$ son monomios semejantes.

Ejemplo de coeficiente, parte literal, grado y monomios semejantes:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado	Monomio semejante
$5a^2b$	5	a^2b	$2+1=3$	$-8a^2b$
$\frac{3m^3}{4}$	$\frac{3}{4}$	m^3	3	$4,5m^3$
$-13x^5$	-13	x^5	5	$\frac{x^5}{3}$

Un **polinomio** es a suma de dos o más monomios no semejantes, cada uno de los monomios que lo forman se llaman **términos**.

Ejemplo: $xy + 3x + 2y + 5$ y $ab^5 + m^3 + a^2 + b^7$ son polinomios.

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo componen.

Grado absoluto de un polinomio
(mayor grado absoluto de los términos)

$$\underbrace{8x^7y^3}_{GA=10} - \underbrace{3x^4y^4}_{GA=8} + \underbrace{6xy^2}_{GA=3}$$

GA = 10

Valor numérico de un polinomio $p(x)$ para $x=a$ es el resultado de sustituir x por a

Calculamos el valor de $p(x)=2x^4-7x^3+11x-2$ para $x=3$ $p(3)=2\cdot 3^4-7\cdot 3^3+11\cdot 3-2=4$

2.1.- Operaciones con monomios y polinomios

• Suma y resta de monomios:

Para sumar dos polinomios, tenemos que ir sumando los monomios que sean semejantes, se suman los coeficientes y se deja la parte literal.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} a+a+a &= 3a ; 2a-4a+8a=6a ; 2xy+5xy-3xy=4xy ; 2ab^2-3ab^2=-ab^2 ; \\ 2x^2-5+3x^3-3 &= 5x^2-8 ; (7x^2-4)+(2x+1)=7x^2-4+2x+1=7x^2+2x-3 ; \\ (b^2-b+3)-(b-6) &= b^2-b+3-b+6=b^2-2b+9 \end{aligned}$$

Si no son semejantes la suma queda indicada

Ejemplo: $a+b$; $x+x^2-5y$

• Multiplicación de monomios:

Para multiplicar monomios, no es necesario que los monomios sean semejantes

Multiplicación de monomios: multiplicamos por un lado los coeficientes (números) y por el otro las partes literales (letras)

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (3a)\cdot(2b) &= 6ab \\ (3a^4)\cdot(2a^3) &= 6a^7 \\ (-3x)\cdot 4x &= -12x^2 \\ (5ab^2)\cdot(2a^3b^6) &= 10a^4b^8 \end{aligned}$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio: multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3\cdot(3a+5b) &= 3\cdot 3a+3\cdot 5b=9a+15b \\ 4x\cdot(x^2-3y^2) &= 4x\cdot x^2-4x\cdot 3y^2=4x^3-12xy^2 \end{aligned}$$

• División de monomios:

Para dividir monomios, por un lado dividimos los coeficientes (letras) y por el otro las partes literales (letras).

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (6a):(3a) &= 2 \\ (12a^7):(2a^3) &= 6a^4 \end{aligned}$$

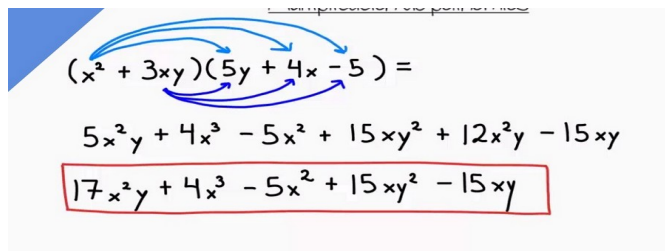
- **Suma y resta de polinomios:** para sumar dos polinomios, tenemos que ir sumando los monomios que sean semejantes y dejamos indicada la operación de los monomios no semejantes.

Por ejemplo:

$$(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) + (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 7x^3 + 4x + 5 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 = x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 10x + 6$$

- $(x^4 - 7x^3 + 4x + 5) - (2x^3 - 8x^2 + 6x + 1) = x^4 - 7x^3 + 4x + 5 - 2x^3 + 8x^2 - 6x + 1 = x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 4x + 7$

- **Producto de polinomios:** Para multiplicar dos polinomios tenemos que multiplicar cada monomio del primero por cada monomio del segundo y operar los semejantes.



$$(x^2 + 3xy)(5y + 4x - 5) =$$

$$5x^2y + 4x^3 - 5x^2 + 15xy^2 + 12x^2y - 15xy$$

$$\boxed{17x^2y + 4x^3 - 5x^2 + 15xy^2 - 15xy}$$

- **Productos notables:**

I. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

- **División de polinomios:** La división de polinomios es similar a la división de números naturales. Al dividir polinomios se obtiene un cociente y un resto.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \quad \Big| \quad x^2 + 3x - 2 \\
 \underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} \quad \quad x^2 - 5x + 6 \\
 -5x^3 - 9x^2 + 30x \\
 \underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} \\
 6x^2 + 20x - 20 \\
 \underline{-6x^2 - 18x + 12} \\
 2x - 8
 \end{array}$$

1 3. REGLA DE RUFFINI

La **regla de Ruffini** es un método que nos permite dividir un polinomio entre un binomio del tipo $(x - a)$. Tendremos que realizar los siguientes pasos:

- 1) Escribimos los coeficientes del dividendo en orden decreciente. Si falta algún término completamos con ceros.
- 2) En la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor (a).
- 3) Bajamos el primer coeficiente.
- 4) Multiplicamos el valor de a por el primer coeficiente bajado y el resultado lo escribimos debajo del segundo coeficiente.
- 5) Sumamos el segundo coeficiente con el valor anotado debajo y escribimos el resultado en la línea inferior.
- 6) Repetimos el proceso hasta completar la fila inferior. El valor de la derecha es el del resto y los valores a su izquierda los coeficientes del cociente.

División clásica de Polinomios

$$\begin{array}{r}
 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 3 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{-5x^4 + 5x^3} \\
 2x^3 + 2x^2 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 4x^2 - 7x \\
 \underline{-4x^2 + 4x} \\
 -3x + 3 \\
 \underline{+3x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

División de Polinomios usando la Regla de Ruffini

1	5	-3	2	-7	3
	5	2	4	-3	0
	5	2	4	-3	0

$5x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

Efectúa la siguiente división: $(-3x^5 + 4x^3 - 5x + 1) : (x - 2)$

1 En la primera fila colocamos los coeficientes del dividendo ordenados según las potencias decrecientes.

4 Los números de la segunda fila se consiguen multiplicando el término independiente del divisor por el último número conseguido de la tercera fila:

$2(-3) = -6$ $2(-6) = -12$
 $2(-8) = -16$ $2(-16) = -32$
 $2(-37) = -74$

2	-3	0	4	0	-5	1
	-6	-12	-16	-32	-74	-73
	-3	-6	-8	-16	-37	-73

2 Término independiente del divisor cambiado de signo

3 Coeficiente principal del dividendo

5 Suma de los números superiores.

6 Suma de los números superiores. Es el resto de la división.

7 Los coeficientes del polinomio cociente son los números de la tercera fila menos el último que es el resto. En este caso los coeficientes son: $(-3, -6, -8, -16, -37)$

Por tanto el cociente es $-3x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 16x - 37$
El resto es $R = -73$

APARTADO 2: ECUACIONES

1.- ECUACIONES

- Una **igualdad** identifica dos o más objetos cuyo valor numérico es el mismo: dos operaciones combinadas, dos expresiones algebraicas, etc
Ejemplo: $3 \cdot (5+2)=30$ es una igualdad
- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se cumple siempre, independientemente de los valores que tomen las letras.
Ejemplo: $3 \cdot (a+b)=3a+3b$ es una identidad
- Una **ecuación** es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple solamente para ciertos valores de las letras.
Ejemplo: $3a=6$ es una ecuación.

1.1- Elementos de una ecuación

- **Resolver** una ecuación es encontrar el valor, o los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.
- **Miembros de una ecuación**: son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo de igualdad.
- **Términos**: son los sumandos que forman los miembros.
- **Incógnitas**: son las letras que aparecen en la ecuación.
- **Soluciones**: valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

1.2- Resolución de ecuaciones lineales (de primer grado)

- **Resolución de la ecuación** $x+a=b$

Para resolver esta ecuación restamos **a** en ambos miembros de la ecuación

$$x+a=b \rightarrow x+a-a=b-a \rightarrow x=b-a$$

Ejemplo:

$$x+3=10 \rightarrow x+3-3=10-3 \rightarrow x=10-3 \rightarrow x=7$$

$$x+4=1 \rightarrow x+4-4=1-4 \rightarrow x=1-4 \rightarrow x=-3$$

- **Resolución de la ecuación** $x-a=b$

Para resolver esta ecuación sumamos **a** en ambos miembros de la ecuación

$$x-a=b \rightarrow x-a+a=b+a \rightarrow x=b+a$$

Ejemplo:

$$x - 3 = 10 \rightarrow x - 3 + 3 = 10 + 3 \rightarrow x = 10 + 3 \rightarrow x = 13$$

$$x - 4 = 1 \rightarrow x - 4 + 4 = 1 + 4 \rightarrow x = 1 + 4 \rightarrow x = 5$$

• **Resolución de la ecuación** $a \cdot x = b$

Para resolver esta ecuación dividimos ambos miembros por **a**

$$a \cdot x = b \rightarrow \frac{a \cdot x}{a} = \frac{b}{a} \rightarrow x = \frac{b}{a}$$

Ejemplo:

$$3x = 15 \rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \rightarrow x = \frac{15}{3} \rightarrow x = 5$$

$$4x = 24 \rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{24}{4} \rightarrow x = \frac{24}{4} \rightarrow x = 6$$

• **Resolución de la ecuación** $\frac{x}{a} = b$

Para resolver esta ecuación multiplicamos ambos miembros por **a**

$$\frac{x}{a} = b \rightarrow \frac{x}{a} \cdot a = b \cdot a \rightarrow x = b \cdot a$$

Ejemplo:

$$\frac{x}{5} = 2 \rightarrow \frac{x}{5} \cdot 5 = 2 \cdot 5 \rightarrow x = 2 \cdot 5 \rightarrow x = 10$$

$$\frac{x}{2} = 4 \rightarrow \frac{x}{2} \cdot 2 = 4 \cdot 2 \rightarrow x = 4 \cdot 2 \rightarrow x = 8$$

Vamos a resolver la ecuación: $4x + 2 + x = 5 + 3x + 3$

REDUCIR $\rightarrow$ $4x + 2 + x = 5 + 3x + 3$
 $5x + 2 = 3x + 8$

TRANSPONER $\rightarrow$
 (Restamos 2 en ambos miembros).
 $5x = 3x + 8 - 2$

REDUCIR $\rightarrow$
 $5x = 3x + 6$

TRANSPONER $\rightarrow$
 (Restamos $3x$ en ambos miembros).
 $5x - 3x = 6$

REDUCIR $\rightarrow$
 $2x = 6$

TRANSPONER $\rightarrow$
 (Dividimos ambos miembros por 2).
 $x = \frac{6}{2}$

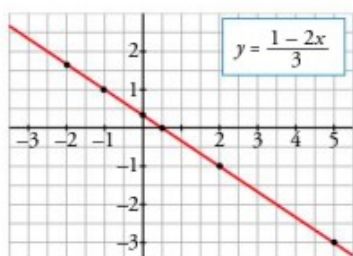
REDUCIR $\rightarrow$
 $x = 3$

Para resolver una ecuación, la iremos transformando, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas, hasta despejar la incógnita (letra).

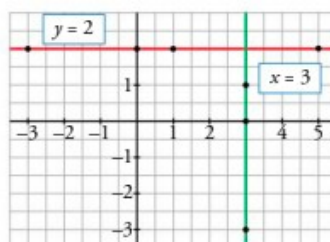
APARTADO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. ECUACIÓN LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

- Una ecuación es **lineal con 2 incógnitas** si se puede escribir de la forma: $ax+by=c$, donde a, b y c son números reales.
- La **solución** de una ecuación lineal con dos incógnitas es todo par de valores (x,y) que hacen cierta la igualdad. Por ejemplo, $2x+3y=1$ es una ecuación lineal con dos incógnitas. Para el par $x=5$ e $y=-3$, se verifica la igualdad. Se pueden buscar más soluciones, tiene infinitas soluciones.
- Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene **infinitas soluciones**.
- Las ecuaciones lineales pueden **representarse**, usando las soluciones como puntos del plano que después unimos y obtenemos una recta.



x	-1	2	5
y	1	-1	-3



$y = 2 \rightarrow 0x + y = 2$

x	-3	0	1	5	...
y	2	2	2	2	2

$x = 3 \rightarrow x + 0y = 3$

x	3	3	3	3	...
y	-3	0	1	5	...

1.1- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Varias ecuaciones forman un **sistema** cuando pretendemos encontrar las soluciones comunes a todas ellas.
- Gráficamente, la **solución de un sistema** de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el **punto de corte de las rectas** que lo forman.

Veamos cuántas soluciones puede tener un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

- Sistema incompatible** → No tiene solución (las rectas no se cortan, son paralelas)
- Sistema compatible indeterminado** → Tiene infinitas soluciones (ambas rectas son la misma)
- Sistema compatible determinado** → Tiene una única solución (las rectas se cortan en un punto)

1.2- Método de sustitución

- Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Se obtiene así una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
- Se calcula la otra incógnita, llevando el valor de la conocida a la expresión de la que se despejó inicialmente.

Resolver por sustitución este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Despejamos y en la primera ecuación (es lo más fácil), sustituimos en la segunda y resolvemos:

$$y = 13 - 3x \rightarrow 2x + 3(13 - 3x) = 4 \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos el valor $x = 5$ en la ecuación en la que y aparecía despejada.

$$y = 13 - 3x \rightarrow y = 13 - 3 \cdot 5 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

1.3- Método de igualación

- Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas, obteniendo una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación y se continúa como en el método anterior, sustituyendo en cualquiera de las despejadas.

Resolver por igualación este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Despejamos y en las dos ecuaciones, igualamos los resultados y resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 13 \rightarrow y = 13 - 3x \\ 2x + 3y = 4 \rightarrow y = \frac{4 - 2x}{3} \end{array} \right\} 13 - 3x = \frac{4 - 2x}{3} \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos en cualquiera de las ecuaciones en las que y aparece despejada:

$$y = 13 - 3x \rightarrow y = 13 - 3 \cdot 5 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

1.4- Método de reducción

- Se multiplica cada ecuación por el número que convenga para que los coeficientes de ambas queden igualados pero con signos opuestos. Al sumarlas, se obtiene una nueva ecuación con una sola incógnita.
- Se resuelve la nueva ecuación.
- El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales.

Resolver por reducción este sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

- Multiplicamos la primera ecuación por (-3) , dejando la segunda como está. Después, sumamos ambas y resolvemos:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 & \times (-3) \rightarrow -9x - 3y = -39 \\ 2x + 3y = 4 & \rightarrow 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Sumando: } \begin{array}{r} -9x \\ 2x \\ \hline -7x \end{array} \quad \begin{array}{r} -39 \\ 4 \\ \hline -35 \end{array} \rightarrow x = \frac{-35}{-7} \rightarrow x = 5$$

- Sustituimos el valor $x = 5$ en cualquiera de las ecuaciones iniciales. En este caso, es más fácil en la primera:

$$3 \cdot 5 + y = 13 \rightarrow y = 13 - 15 \rightarrow y = -2$$

- La solución del sistema es $x = 5$, $y = -2$.

1.5- Método de gráfico

Como hemos dicho, las infinitas soluciones de una ecuación lineal con 2 incógnitas forman una línea recta al representarlas en el plano.

Por tanto, si buscamos la solución de un sistema de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas podemos proceder de la siguiente manera:

- Representar por separado las infinitas soluciones de la primera ecuación.
- Representar las infinitas soluciones de la otra ecuación en el mismo eje de coordenadas.

La solución será el punto de corte de ambas rectas.

Este método tiene varios inconvenientes:

- Si la solución del sistema son números muy grandes, se nos saldrá de nuestra área de dibujo.
- Si la solución del sistema no son números enteros, no podremos conocerlos con exactitud.

UD6: FUNCIONES Y GRÁFICAS

APARTADO 1: FUNCIONES, TABLAS Y GRÁFICOS

1.- FUNCIONES

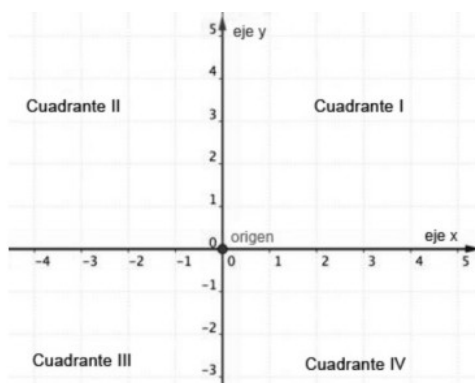
Para representar puntos en el plano se utilizan dos rectas perpendiculares graduadas, una horizontal y otra vertical llamadas **ejes de coordenadas** o **ejes cartesianos**.

El eje horizontal se representa por **X** y llama **eje de abscisas**.

El eje vertical se representa por **Y** y se llama **eje de ordenadas**.

El punto donde se cortan los ejes se denomina **origen de coordenadas** y se representa por **O**.

Los ejes de coordenadas dividen al plano en 4 regiones llamadas **cuadrantes**.



Las coordenadas cartesianas de un punto P son un par ordenado de números (a,b) que indican su posición respecto de los ejes coordenados: P(a,b)

La primera coordenada, a, se denomina **abscisa** del punto y representa la posición respecto al eje X.

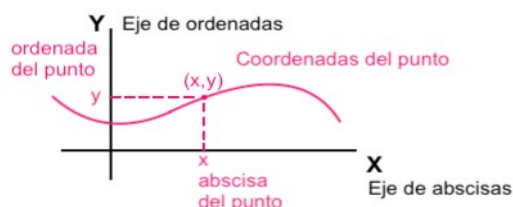
La segunda coordenada, b, se denomina **ordenada** del punto y representa la posición respecto al eje Y.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes, de forma que **a cada valor de la primera, le corresponde un único valor de la segunda**.

La primera magnitud se llama **variable independiente**, **x**, y se fija previamente. La segunda magnitud es la **variable dependiente**, **y**, que se obtiene a partir de la primera.

Una función liga dos variables numéricas a las que habitualmente se les llama x e y.

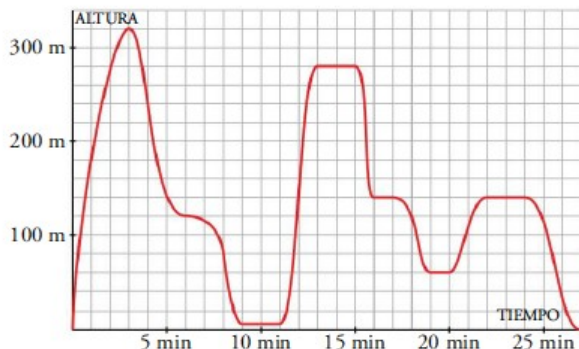
- **x** es la variable independiente
- **y** es la variable dependiente.



Las variables x e y , se asocian mediante **la función f** . De tal forma que **f asocia a cada valor de x , un único valor de y** . Se expresa de la siguiente forma **$y = f(x)$** .

Las funciones vienen dadas de diferentes formas:

Mediante su **gráfica**.



Mediante un **enunciado**

Una cisterna contiene 5 litros de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 minutos en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 mins

Mediante una **expresión analítica**

$$y = f(x) = \frac{x-3}{6}$$

Mediante una **tabla de valores**

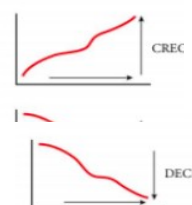
x	y
-2	8
0	6
6	0

2.- DOMINIO Y RECORRIDO

- Se llama **dominio de definición** de una función f al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.
- Se llama **recorrido** de f al conjunto de valores que toma la función. Es decir, es el conjunto de valores de y , para los cuales existe un x tal que $f(x) = y$

3.- CRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- Una función f es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente x , aumenta la variable dependiente y .
- La función f es **decreciente** cuando al aumentar x disminuye y .



Una función puede ser creciente en unos tramos y decreciente en otros

- Una función tiene un **máximo** relativo en un punto si la función es creciente antes del punto y decreciente después.
- Una función tiene un **mínimo** relativo en un punto si la función es decreciente antes del punto y creciente después.



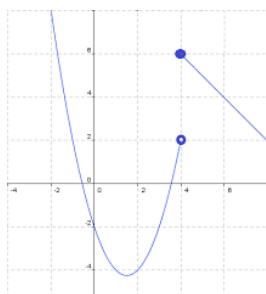
4.- FUNCIONES CONTINUAS. DISCONTINUIDADES

Una función es **continua** si no presenta ninguna discontinuidad. Esto puede resumirse diciendo que una función es continua si su gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.

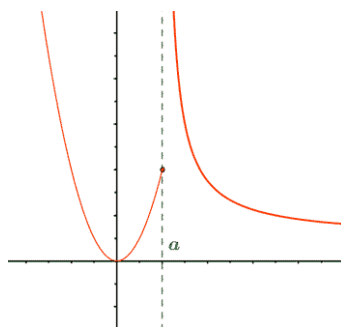
También se puede decir que una función es **continua en un tramo**, aunque tenga discontinuidades en otros lugares.

Las discontinuidades se clasifican en:

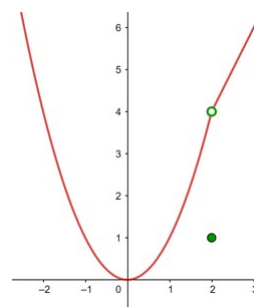
a) Inevitable de salto finito:



b) Inevitable de salto infinito:

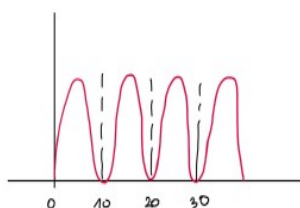


c) Evitable:



5.- PERIODICIDAD Y SIMETRÍA

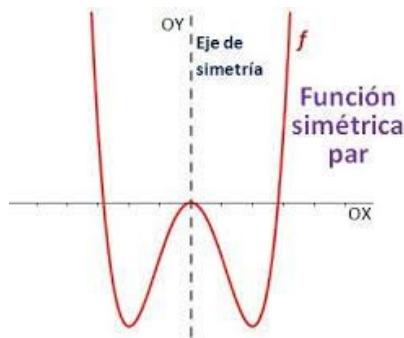
- ➔ Una **función periódica** es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama **periodo**.



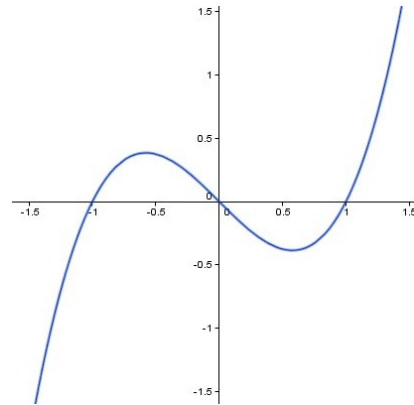
función f
Periodo: ..

Se trata de una función periódica de periodo=10

- Una función f es **simétrica par** si al doblar su gráfica por un eje de ordenadas, las ramas de la función se superponen.



- Una función f es **simétrica impar** si al doblar su gráfica por el eje de ordenadas y luego por el de abscisas (o al revés), las ramas de la función se superponen.



APARTADO 2: FUNCIONES LINEALES

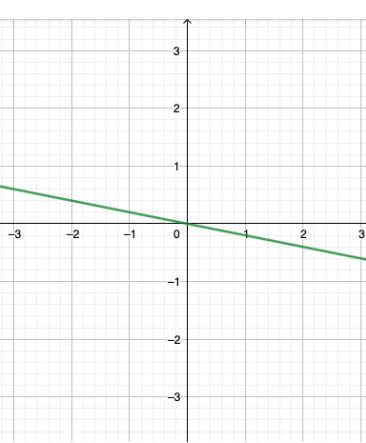
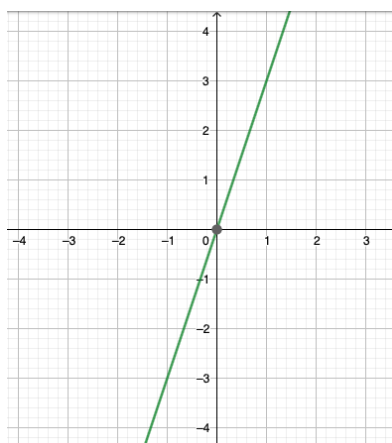
1. FUNCIONES LINEALES

Una **función lineal** no es más que una recta, y se representa haciendo una tabla de valores, tenemos diferentes tipos de funciones lineales. Su expresión algebraica es un polinomio de primer grado. Ejemplo: $f(x) = 3x - 2$

1.1. Función de proporcionalidad

La **función de proporcionalidad** tiene por ecuación $y = mx$ y se representan mediante rectas que pasan por el $(0,0)$. La pendiente de la recta es la constante de proporcionalidad, m . Si $m < 0$ la recta es decreciente y si $m > 0$ la recta es creciente.

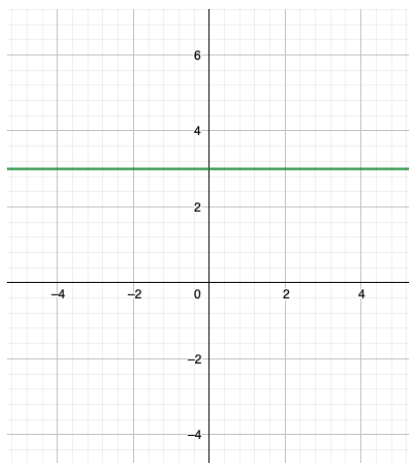
Por ejemplo: $y = 3x$



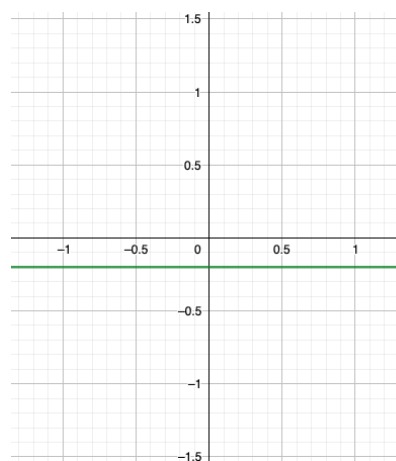
1.2. Función constante

Las **funciones constantes** son de la forma $y=n$ y se representa mediante una recta paralela al eje X. Su pendiente es 0. La recta $y = 0$ coincide con el eje X.

Por ejemplo: $y=3$



$$y=\frac{-1}{5}$$



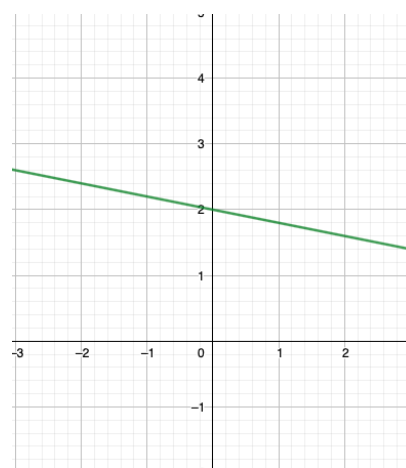
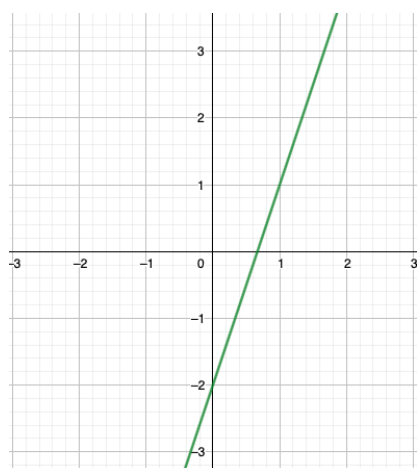
1.3. Expresión general

La expresión general de una **función lineal** es $y=mx+n$, se representa mediante una recta con las siguientes características:

- Su pendiente es m
- Su ordenada en el origen es n. Es decir, si $x=0$, entonces $y= n$. Por tanto corta al eje Y en el punto (0, n)

Por ejemplo: $y=3x-2$

$$y=\frac{-1}{5}x+2$$



La **pendiente (m)** es la variación que experimenta la y cuando la x aumenta una unidad. Para hallarse se divide la variación de la y por la variación de la x entre dos de sus puntos.

1.4. Recta de la que se conocen un punto y la pendiente

Suponemos que de una recta **conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente m** . Entonces su ecuación puede escribirse de la siguiente forma: $y = y_0 + m(x - x_0)$

1.5. Recta que pasa por dos puntos

Si ahora **conocemos dos puntos de la recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2)** , podemos obtener su pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Al tener un punto, y la pendiente estamos en el caso anterior, y ya podemos calcular la ecuación.

APARTADO 3: SUCESIONES

1. SUCESIONES

Se llama **sucesión** a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero,...

Ejemplo:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------|
| a) 1, 5, 9, 13, 17, ... | (sumar 4 al anterior) |
| b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... | (elevar al cuadrado) |
| c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... | (potencias de 2) |
| d) 1, -3, 9, -27, 81, -243,... | (potencias de -3) |

1.1- Términos de una sucesión

Los elementos de la sucesión se llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con subíndice. EL subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión.

Ejemplo:

- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| a) 1, 5, 9, 13, 17, ... | $a_1=1, a_2=5, a_3=9$ |
| b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... | $b_1=1, b_2=4, b_3=9$ |
| c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... | $c_1=2, c_2=4, c_3=8$ |
| d) 1, -3, 9, -27, 81, -243,... | $d_1=1, d_2=-3, d_3=9$ |

Se llama **término general** de una sucesión a (y se simboliza por a_n) a la expresión que representa un término cualquiera de esta.

Ejemplo:

- | | |
|--------------------------------|---------------------|
| a) 1, 5, 9, 13, 17, ... | $a_n = a_{n-1} + 4$ |
| b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... | $b_n = n^2$ |
| c) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... | $c_n = 2^n$ |
| d) 1, -3, 9, -27, 81, -243,... | $d_n = (-3)^n$ |

1.2- Sucesiones recurrentes

Las sucesiones cuyos términos se obtienen a partir de los anteriores se dice que están dadas en **forma recurrente**.

Un ejemplo de este tipo de sucesiones es la sucesión de **Fibonacci**, cuyos términos se obtienen sumando los dos anteriores 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que se pasa de cada término a siguiente sumando un mismo número (positivo o negativo), al que se llama diferencia, **d**, de la progresión.

Ejemplos:

- a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... (sumar 3 al anterior)
- b) 120, 140, 160, 180, ... (sumar 20 al anterior)
- c) 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, ... (restar 2 al anterior)

2.1- Término general de una Progresión Aritmética (PA)

Podemos obtener el **término general** de una progresión aritmética, a partir del primer término, a_1 y la diferencia, d .

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

...

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Ejemplos:

- a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$
- b) 120, 140, 160, 180, ... $a_n = 120 + (n-1) \cdot 20$
- c) 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, ... $a_n = 9 + (n-1) \cdot (-2)$

2.2- Suma de los términos de una PA

Los números naturales forman una progresión aritmética de diferencia $d=1$, vamos a sumar los diez primeros números naturales $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$$\begin{array}{r} S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ + S_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2 \cdot S_{10} = 11 + 11 + 11 + 11 + \dots + 11 + 11 \end{array}$$

$$2 \cdot S_{10} = 11 \cdot 10 \rightarrow S_{10} = \frac{11 \cdot 10}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

En una progresión aritmética de n términos, la suma de dos términos **equidistantes** de los extremos es **siempre la misma**.

Vamos a obtener la fórmula general para sumar los n primeros términos de una progresión aritmética

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\text{Suma} \quad \rightarrow \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\text{Suma invertida} \quad \rightarrow \quad S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + () + () \dots + () + () + (a_n + a_1)$$

Hay n paréntesis y el resultado de cada uno de ellos es $a_1 + a_n$. Por tanto:

$$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \rightarrow S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

UD4: ECUACIONES Y SISTEMAS

APARTADO 1: ÁLGEBRA

1.- Si x es la edad de una persona, expresa en lenguaje algebraico:

- a) Los años que tendrá dentro de un año
- b) Los años que faltan para que cumpla 80 años
- c) Los años que tendría hace 6 años
- d) la edad que tendrá dentro de 15 años
- e) Los años que tiene hoy

2.- Llamando x a un número natural, expresa en lenguaje algebraico:

- a) El doble del número
- b) El cuadrado de un número
- c) El siguiente del número
- d) En anterior del número
- e) Una tercera parte del número
- f) La suma del número, su doble y el siguiente.
- g) El doble de la suma de dos números

3.- Traduce al lenguaje algebraico:

- a) La diferencia de los cuadrados de dos números
- b) La suma de la mitad de un número más el doble del mismo número
- c) El triple de un número menos la sexta parte de otro
- d) La cuarta parte de un número más el doble de su siguiente
- e) El triple de sumar siete a un número, n .
- f) El número siguiente al número natural x .
- g) El doble de restar quince a un número, n .
- h) Los $\frac{3}{5}$ de un número x al que se le quitan 6 unidades.

4.- Expresa en lenguaje algebraico el siguiente enunciado: la edad de Ana, dentro de ocho años, será igual al doble de la que tenía hace dos años.

5.- Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes para los valores indicados.

	$x=2$	$x=-1$	$x=-2$	$x=1/2$	$x=10$
a) $2x-5$					
b) $3-x$					
c) $3x-x-x$					
d) $x \cdot (x-2)$					
e) x^2-2x					

6.- Completa la tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte Literal	Grado	Monomio semejante
$2a$				
x^2				
$-3ab$				
$\frac{1}{2}xy^3$				

7.- Calcula el valor de m en los siguientes casos, para que cada par de monomios tengan el mismo grado:

a) $-3x^m yz \simeq 6a^2 bc$

c) $xy^2 z^3 \simeq -2x^m y^2$

b) $6rs^2 t^3 \simeq 5x^m yz^2$

d) $abc^3 \simeq 3r^m b^2 c$

8.- Calcula el resultado de estas sumas y restas de monomios

a) $a+a+a+a$

f) $5x^2 - (2x+x^2)$

b) $10x-3x-x$

g) $(x+4x)-(5x-3x)$

c) $10a-3b-a$

h) $(2a-1)-5a$

d) $9x^2-5x^2+3+x+1$

i) $(4x^2-5)-(2x^2+2)$

e) $5x^2 y - 3xy^2 + xy^2 - 2x^2 y$

j) $(x^2+x)+(3x+1)$

9.- Realiza los siguientes productos y divisiones de monomios

a) $3 \cdot 2x$

j) $6x:3$

b) $(-2) \cdot \frac{6}{8}m$

k) $9m^3:9$

c) $(-3) \cdot (-4m)$

l) $(-20m^2):(-4)$

d) $x \cdot 2x$

m) $x^2:x$

e) $3x^2 \cdot 2x^3$

n) $a^3:a$

f) $x^3 \cdot (-2x)$

o) $m^7:m^3$

g) $2m^3 \cdot (-4m^3)$

p) $8x:2x$

h) $5a^2 \cdot (2ab)$

q) $6x:3x^2$

i) $(3a^2b^3) \cdot (a^2b)$

r) $4a^3:10a^4$

10.- Calcula:

a) $8x-6x+3x-5x+4-x$

b) $4,5a-7b-1,4b+0,6a+5,3b+b$

c) $\frac{3}{5}m-2mn+\frac{1}{10}m+2mn-2m$

d) $-3x^2y+2ab-5x^2y+\frac{1}{2}ab$

e) $(-7x^2ay) \cdot (8x^3a^5):(-4x^4a^6)$

11.- Sean $P=5x^3-2x+1$ y $Q=x^4-2x^2+2x-2$. Halla $P+Q$ y $P-Q$.

12.- Halla los siguientes productos con polinomios:

a) $2x \cdot (x^2+3x-1)$

b) $-7x \cdot (2x^3-3x^2+x)$

c) $8x^2 \cdot (x^2+3)$

d) $-2 \cdot (-3x^3-x)$

e) $-x^3 \cdot (-3x+2x^2)$

f) $-7x^5 \cdot (2x^2-3x-1)$

13.- Siendo $P=4x^2+3$, $Q=5x^2-3x+7$ y $R=5x-8$ calcula:

a) $P \cdot Q$

b) $P \cdot R$

c) $Q \cdot R$

14.- Opera y simplifica la expresión resultante:

a) $x(5x^2+3x-1)-2x^2 \cdot (x-2)+12x^2$

$$b) 5 \cdot (x-3) + 2 \cdot (y+4) - \frac{7}{3} \cdot (y-2x+3) - 8$$

$$c) (x^2 - 2x + 7) \cdot (5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$$

15.- Realiza las siguientes divisiones:

$$a) (x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 8) : (x^2 - 3x + 1)$$

$$b) (6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$$

$$c) (5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$$

$$d) (x^3 + 4x + 6) : (x - 4)$$

$$e) (5x^4 - 3x^2) : (x - 2)$$

$$f) (x^3 - 2x^2 + 4) : (x + 3)$$

16.- Calcula usando las identidades notables:

$$a) (x+4)^2$$

$$b) (2x-5)^2$$

$$c) (1-6x)^2$$

$$c) \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$d) \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$$

$$d) \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$e) (x+1) \cdot (x-1)$$

$$f) (2x+3) \cdot (2x-3)$$

$$g) (ax+b) \cdot (ax-b)$$

APARTADO 2: ECUACIONES

1.- Comprueba en cada caso cuál o cuáles de los valores de x son soluciones de la ecuación:

a) $5x - 7 = 13, x = 1, x = 3, x = 4$

b) $x^2 - 6 = x, x = -2, x = 1, x = 3$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x + 3 = 4$

b) $b - 1 = 8$

c) $a + 5 = 11$

d) $2 - z = 4$

e) $1 = 9 - X$

f) $4B = 20$

g) $\frac{x}{2} = 1$

h) $8 = 4t$

i) $\frac{x}{5} = 2$

j) $3A - 2 = 0$

k) $4a + 5 = 13$

l) $\frac{x}{3} - 2 = 3$

m) $8N - 5N = N + 8$

n) $5n - 7 = 2 - 4n$

o) $3x + x + 4 = 2x + 10$

p) $8 - b = 3b + 2b + 5$

q) $6P - 9 + 3P - 2 - 5P = P - 6 - 3P + 1$

r) $1 = 6y - 4y$

s) $2 = 11n - 5n$

t) $4 = 2m - 7m$

u) $4x - (2 + x) = 3(x - 1)$

v) $4 \cdot (x - 2) + 3 = 1 - 3 \cdot (2 - x)$

w) $2z - 8 = 1 - 3 \cdot (z - 2)$

x) $7h + 3 \cdot (5h - 3) - (5h + 1) = 7 \cdot (2h + 2)$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x - 12 + 4x - 1 = x - 7x + 12 - 3x + 5$

b) $5x - 4(2x - 3) = 2x - 17$

c) $4x + 5 - 7x = 2(3x - 6) - 1$

d) $3x + (x + 5) = 5x - (3 + 2x)$

e) $7x - 4(2x - 5) = 3(5x - 2) - 6$

f) $2x - (x + 5) = 6 + (x + 1)$

g) $5(x - 1) - 6x = 3x - 9$

h) $4 - 5(2x + 1) = -3(4x - 5)$

4.- Resuelve estas ecuaciones

a) $2a = \frac{1}{2}$

e) $P + \frac{2}{7} = 1 - \frac{2P}{7}$

b) $\frac{7x}{3}=2$

f) $\frac{y}{3}+1=y+\frac{5}{6}$

c) $-4A=1-\frac{1}{3}$

g) $\frac{a}{2}-\frac{2}{5}=\frac{a}{5}+\frac{1}{2}$

d) $\frac{15x}{2}-1=5$

h) $\frac{b}{3}-1=\frac{b}{5}-\frac{2}{3}$

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $3x-2(x+3)-x-3(x+1)$

b) $4+b-4(1-b)+5(2+b)=0$

c) $2x+7-2(x-1)=3(x+3)$

d) $4(2x-7)-3(3x+1)=2-(7-x)$

e) $\frac{a-3}{5}=\frac{a+1}{3}-2$

f) $1=\frac{x+3}{3}-\frac{x}{2}$

g) $\frac{3b+4}{5}=\frac{b+2}{2}$

h) $\frac{5a-16}{6}=\frac{-a+8}{12}+\frac{a+1}{3}$

i) $\frac{2v-4}{3}=3-\frac{4+v}{2}$

j) $\frac{x+2}{2}-\frac{x+3}{3}=\frac{-x-4}{4}+\frac{x-5}{5}$

k) $\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-1}{10}+\frac{5x-2}{8}=\frac{x+1}{4}$

l) $2x-\frac{1}{2}(1+3x)-\frac{3}{5}(x-2)=\frac{1}{4}(3-x)$

m) $4(2r+1)-3(r+3)=5(r-2)$

n) $2(z-3)+1=3(z-1)-(2+z)$

6.- Si al triple de un número se le suman cinco unidades da 29. ¿De qué número se trata?

7.- Un niño es 26 años menor que su padre. Dentro de tres años, la edad del padre será el triple que la del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad?

8.- Entre monedas de 1 € y de 2 € tengo 15 monedas. Si en total tengo 22 €, ¿cuántas monedas de cada valor tengo en la cartera?

9.- Eduardo ha sacado 25 puntos entre las notas de Lengua, Matemáticas e Inglés. Si en Matemáticas ha sacado un punto más que en Inglés, y en Lengua dos puntos más que en Matemáticas, ¿qué nota ha sacado en cada asignatura?

10.- Ana le dijo a su hija Elisa que la suma de las edades de ambas era 75 y que ahora ella tenía el doble. ¿Qué edades tienen?

11.- La suma de tres números consecutivos es 57. ¿Qué números son?

12.- Si añadieras 20 botes de ketchup a la estantería, habría el cuádruple que si retiraras 10.
¿Cuántos botes hay en la estantería?

13.- La semana pasada, Mario dedicó a jugar con videojuegos tres horas más del doble del tiempo que dedicó a hacer sus deberes de Matemáticas. Si dedicó 12 horas en total a las dos actividades, ¿cuánto tiempo dedicó a cada una de ellas?

14.- El número de libros que hay en la estantería de la clase de Adrián es igual al triple del número de alumnos más cuatro. Un día que faltan a clase cinco alumnos reparten los libros y cada uno toca a cuatro. ¿Cuántos alumnos hay en la clase de Adrián?

15.- Blanca sale de casa con cierta cantidad de dinero. Se gasta la mitad en un libro y la tercera parte en un estuche. Si vuelve con 5 €, ¿cuánto dinero tenía?

16.- Un pastor tiene, entre ovejas y cabras, 231 cabezas. El número de ovejas supera en 83 al de cabras. ¿Cuántas cabras y cuántas ovejas hay en el rebaño?

17.- Una tableta de chocolate cuesta el doble que un paquete de arroz. Dos tabletas de chocolate y tres paquetes de arroz han costado 5,60 €. ¿Cuánto cuesta cada uno de esos artículos?

18.- Sabiendo que un yogur de frutas es 5 céntimos más caro que uno natural, y que seis de frutas y cuatro naturales me han costado 4,80 euros, ¿cuánto cuesta un yogur natural? ¿Y uno de frutas?

19.-En un garaje hay coches y motos. En total hay 39 vehículos y 130 ruedas. ¿Cuántos coches hay? ¿Cuántas motos hay?

20.- Si al doble de un número le sumamos 15 obtenemos 51, ¿Qué número es?

21.- Si a un número le quitas 13, obtienes 91, ¿Cuál es el número?

22.- La suma de dos números consecutivos es 95, ¿Cuáles son esos números?

- 23.- En una ferretería se venden tornillos en cajas de tres tamaños: pequeña, mediana y grande. La caja grande contiene el doble que la mediana y la mediana 25 tornillos más que la pequeña. He comprado una caja de cada tamaño y en total hay 375 tornillos, ¿Cuántos tornillos hay en cada caja?
- 24.- En mi colegio entre alumnos y alumnas somos 624. Si el número de chicas supera en 36 al de chicos, ¿Cuántos chicos y cuantas chicas hay?
- 25.- Irene y Alejandro tienen 73 CD's de música. Irene tiene el doble que Alejandro más 1. ¿Cuántos CD's tienen cada uno?
- 26.- Tres amigos van de compras. Juan gasta el doble que Alicia y Ana gasta el triple que Alicia. Si entre los tres han gastado 72 €, ¿Cuánto ha gastado cada uno?
- 27.- Sabiendo que un pantalón es 5 € más caro que una camisa y que si compro 6 pantalones y 4 camisas pago 480 €, ¿Cuánto vale el pantalón y la camisa?
- 28.- Un kilo de chirimoyas cuesta el doble que uno de naranjas. Por 3 kilos de chirimoyas y 5 de naranjas he pagado 11 €. ¿Cuánto vale el kilo de cada una?
- 29.- En un concierto hay 432 personas. Si sabemos que hay 48 mujeres más que hombres, ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?
- 30.- Para una fiesta se han comprado 340 refrescos. De naranja hay el triple que de cola. De limón el doble que de cola menos 20 ¿Cuántos refrescos hay de cada clase?
- 31.- Entre Ana y María tienen 270 €. Si Ana tiene el doble que María más 30 €, ¿cuánto tiene cada una?
- 32.- El padre de Antía tiene 30 años más que él y su madre tiene 5 años menos que su padre. Averiguar la edad de actual de Antía sabiendo que la suma de las edades de sus padres es 7 veces la edad de Antía.
- 33.- Buscar un número positivo x de modo que al sumarlo con su doble se obtenga el triple de dicho número. ¿Cuántos números x cumplen lo anterior?

APARTADO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.- Representa gráficamente las infinitas soluciones de las siguientes ecuaciones lineales de 2 incógnitas:

a) $2x+y=3$ b) $x+2y=6$ c) $2x-y=1$ d) $x+3y=5$

2.- Resuelve los siguientes sistemas usando el método gráfico e indica de qué tipo de sistema se trata:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

3.- Resuelve los siguientes sistemas usando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+9y=4 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

4.- Resuelve los siguientes sistemas usando el método de igualación.

a) $\begin{cases} 3x+8y=5 \\ 2x-2y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=28 \\ 7x+2y=-7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 7x+10y=2 \end{cases}$

5.- Resuelve los siguientes sistemas usando el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ 4x-5y=38 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-4y=11 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

6.- Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 3(x-1)+y=0 \\ 3(x+1)+y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=4-y \\ 3x-5=7-6y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 5x-3=9y-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(3x-2)=y-1 \\ 3(x+y)+2(x-y)=8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=4 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y+1}{4}=1 \\ \frac{2x-1}{2}-\frac{2y+1}{6}=1 \end{cases}$

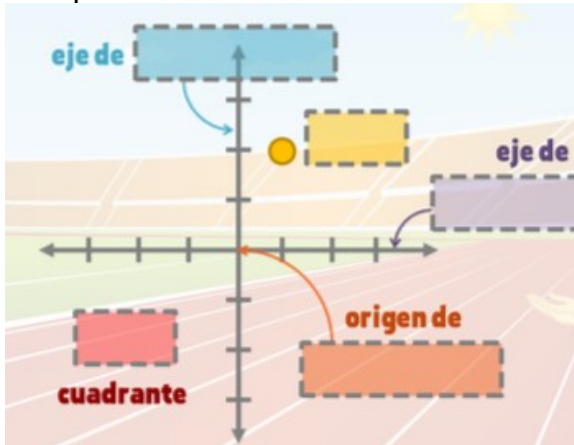
- 7.- Encuentra dos números cuya suma sea 45 y cuya resta sea 21.
- 8.- Alberto y su padre se llevan 25 años de edad. Calcular la edad de Alberto sabiendo que dentro de 15 años la edad de su padre será el doble que la suya.
- 9.- La factura del teléfono del mes pasado ascendió a un total de \$39 por un consumo de 80 minutos mientras que la de este mes asciende a \$31,5 por un consumo de 55 minutos. El importe de cada factura es la suma de una tasa fija (mantenimiento) más un precio fijo por minuto de consumo. Calcular la tasa y el precio de cada minuto.
- 10.- La semana pasada compramos berenjenas a un precio de 2,7€/kg y patatas a un precio de 0,7€/kg pagando por ellas un total de 15,1€.
Sin embargo, esta semana hemos pagado 18€ por una compra con la misma cantidad de estas hortalizas a un precio de 2€ por kilo de berenjenas y 1,2€ por kilo de patatas.
Calcular la cantidad de hortalizas que se compran.
- 11.- Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de 6 euros el litro y la segunda de 7.2 euros el litro. ¿Cuántos litros de cada clase hay que poner para obtener 60 litros de mezcla a 7 euros el litro?
- 12.- Se mezcla una cierta cantidad de café de 34 € el kilo, con 80 kilos de otro café de 50 €/kg, para obtener una mezcla que se pueda vender a 44 € el kilo. ¿Cuánto café de 34 € debe emplearse en la mezcla?
- 13.- Un joyero tiene dos lingotes de oro, con un 80% de pureza y el otro con un 95% de pureza. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kilos con un 86% de pureza?
- 14.- Una tienda de discos vende 84 discos a dos precios distintos: unos 18 € y otros a 14,4 €, obteniendo de la venta 1.242 €, ¿Cuántos discos vendió de cada clase?
- 15.- Hace 5 años, la edad de Sonia era triple que la de Roberto, y dentro de 10 años será doble. ¿Qué edad tiene cada uno?
- 16.- Calcula las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que es 25 m más larga que ancha y que el perímetro mide 210 metros.
- 17.- Un orfebre recibe el encargo de confeccionar un trofeo, en oro y en plata, para un campeonato deportivo. Una vez realizado, resulta de un peso de 1.300 gramos, habiendo costado 2,840 €. ¿Qué cantidad ha utilizado de cada metal precioso, si el oro sale 8 €/gramo y la plata por 1,7 €/gramo?

18.- La edad de un padre es el triple de la de su hija más 2 años y hace 5 años la cuadruplicaba. ¿Qué edades tienen padre e hija?

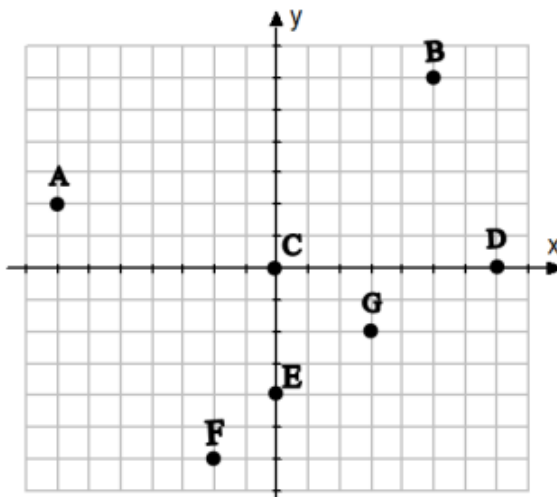
UD6: FUNCIONES Y GRÁFICAS

APARTADO 1: FUNCIONES, TABLAS Y GRÁFICOS

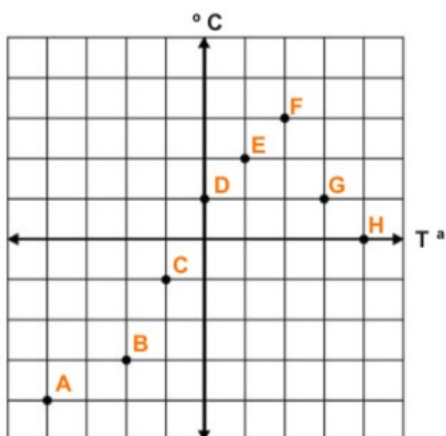
a) Completa:



b) Escribe las coordenadas de los puntos señalados:



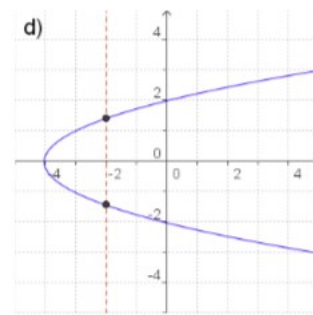
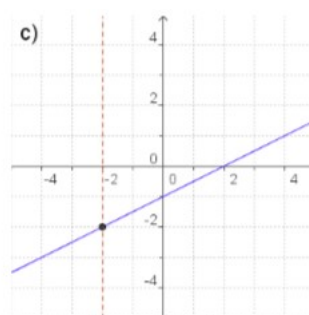
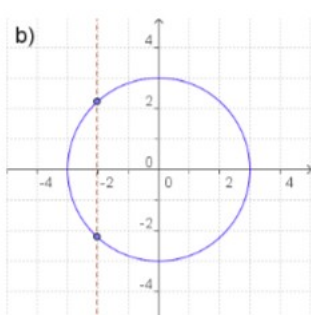
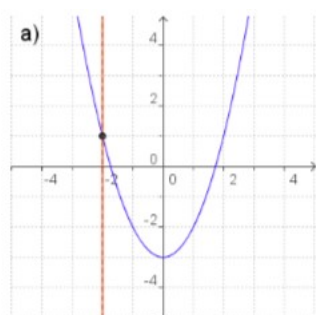
c) Escribe las coordenadas de los puntos señalados:



- d) Representa en los ejes de coordenadas los siguientes puntos: P(2, 3); Q(-5, 6); R(-4, 0); S(0, 4); T(2, -3); U(-6, -5); V(5, 0) .
- e) Representa en los ejes de coordenadas los siguientes puntos:
P(2, 3), Q(4, 2), R(-3, 1), S(-4, 3), T(-6, -4), U(0, 3), V(5, 0), W(0, -5), X(-3, 0), Y(4, -3)
- f) Completa a tabla Indicando en qué cuadrante del plano están situados los siguientes puntos de coordenadas:

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
P(-3,-4)				
Q(5,2)				
R(-1,7)				
S(2, -2)				
T(-1, -4)				
U(-2, 5)				
V(3, -3)				

- g) Dados los puntos A(4, -1); B(3,4); C(-3,2); D(-2,-3):
- Determina el cuadrante en el que se encuentra cada uno.
 - Represéntalos en los ejes de coordenadas.
 - Une los puntos alfabéticamente y, finalmente, une el punto D con A. ¿Qué figura obtienes?
- h) De las siguientes gráficas indica las que corresponden a una función y las que no justificando tus respuestas:

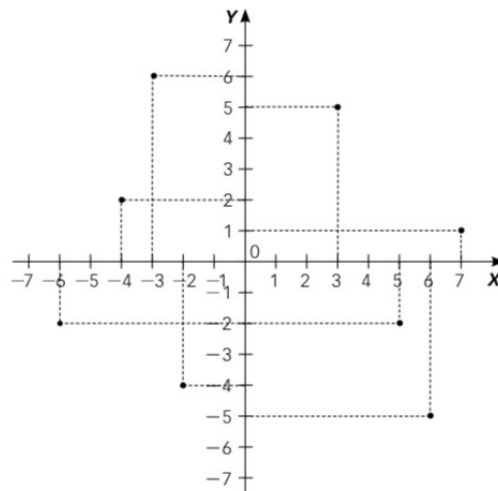


Relacionar e interpretar tablas y pares de valores

- i) Calcula el valor de la variable dependiente en la fórmula $y = x^2 - 3$ para los siguientes valores de la variable independiente. Construye una tabla de valores.
- a) $x=1$ b) $x=-1$ c) $x=2$ d) $x=-2$ $x=1/2$
- j) Representa en el plano los pares de valores de la siguiente tabla:

Valor x	-1	-2	2	3	4	6
Valor y	3	-2	4	5	0	-1

- k) Forma una tabla de valores ordenados que correspondan a los puntos representados:

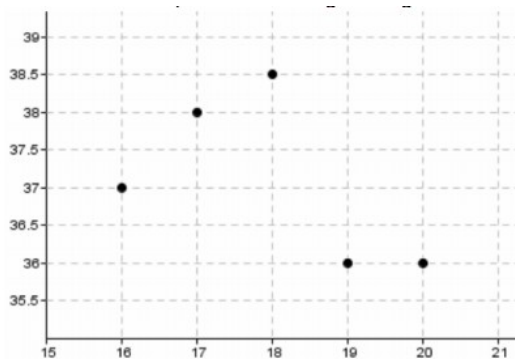


- l) En una clase de laboratorio un alumno ha medido la temperatura de un líquido según se calentaba. Los resultados del experimento los anoto en la siguiente tabla:

Tiempo (minutos)	0	1	2	3
Temperatura ($^{\circ}$ C)	20	25	30	40

Representa los valores de la tabla sobre unos ejes de coordenadas tomando la escala que consideres más adecuada.

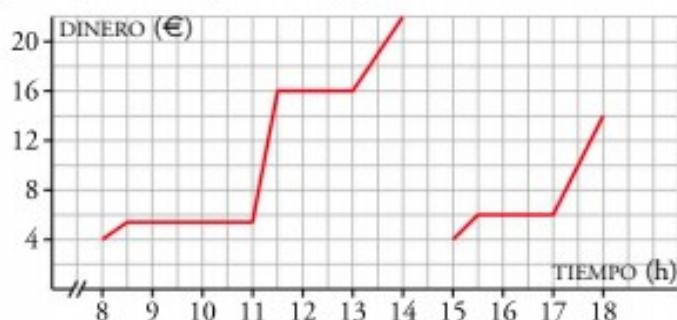
- m) Laura tiene fiebre, y para seguir un control cada hora ha ido anotando su temperatura corporal, obteniendo como resultado los valores que se muestran en el siguiente gráfico:



- Averigua a qué horas tuvo la temperatura más baja.
- Indica a qué hora el enfermo se tomó su medicación antitérmica (para bajar la fiebre).

- n) En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica se ve la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:

a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?



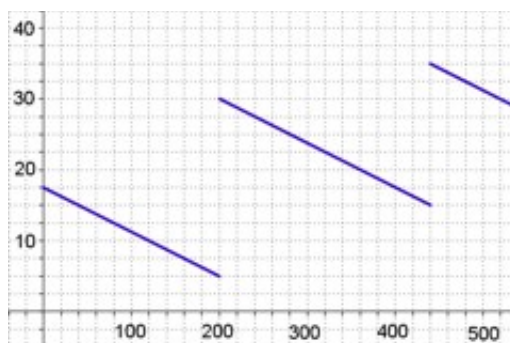
b) ¿A qué hora es el recreo?

¿Cuánto dura?

c) El puesto se cierra al medio día, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

- 15.- El gráfico muestra cómo varía la gasolina que hay en mi coche durante un viaje de 520 km por una autovía.



a) Indica las variables x e y

b) ¿Cuánta gasolina había al cabo de 240 km? En el depósito caben 40 litros, ¿cuándo estaba lleno más de medio depósito?

c) ¿En cuántas gasolineras paré?, ¿en qué gasolinera eché más gasolina? Si no hubiera parado, ¿dónde me habría quedado sin gasolina?

d) ¿Cuánta gasolina usé en los primeros 200 km? ¿Cuánta en todo el viaje? ¿Cuánta gasolina gasta el coche cada 100 km en esta autovía?

- 16.- Una cisterna contiene 5 litros de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 minutos en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 mins.

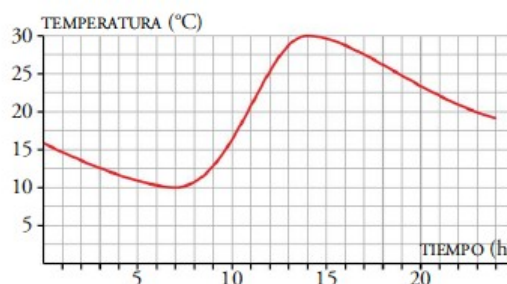
a) Representa la función *tiempo- cantidad de agua*

b) Explica si la función es periódica.

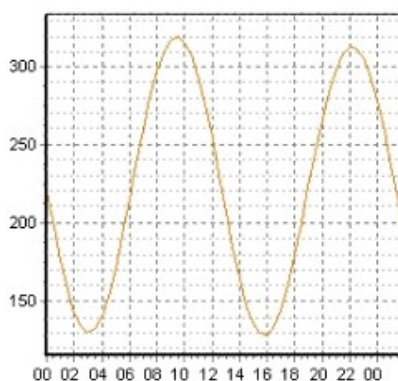
c) Durante a primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

17.- La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

- Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos dónde decrece.
- ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?
- ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.

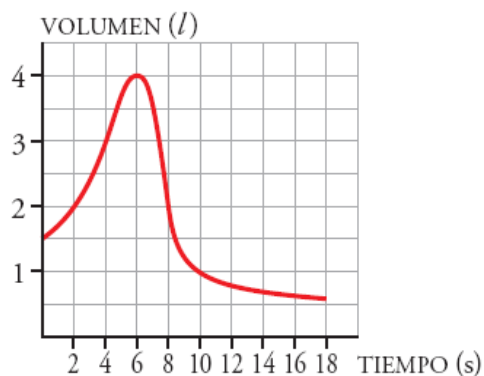


18.- En el gráfico se representa la altura del nivel del mar en el puerto de A Coruña a lo largo del día 17 de enero de 2008.



- ¿A qué hora se alcanzan los máximos?, ¿y los mínimos?, ¿qué altura alcanza el nivel del mar en cada caso?
- ¿En qué intervalos del día la función es creciente, esto es, sube la marea? ¿Entre qué horas el nivel del mar se mantiene por encima de los 300cm?, ¿y por debajo de los 150 cm?
- ¿Qué tiempo transcurre entre dos mareas altas consecutivas? ¿y entre dos mareas bajas consecutivas también? ¿A qué hora del día siguiente se producirá la siguiente pleamar?

19.- Para medir la capacidad respiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro. Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



- ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?
- ¿Cuánto tiempo duró la observación?
- ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?
- ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ¿Y cuándo termina?

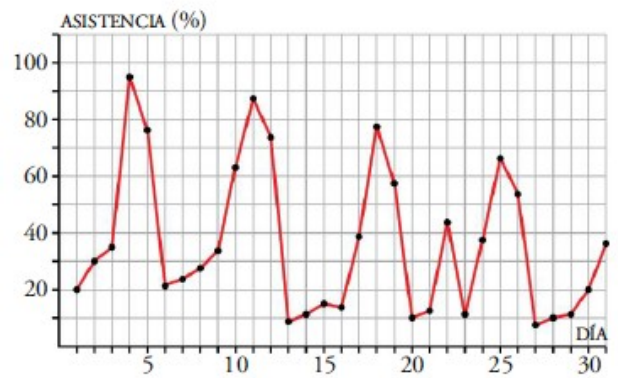
20.- La siguiente gráfica muestra el porcentaje de ocupación de unos multicines en una ciudad a lo largo de un determinado mes:

a) ¿en qué días caen los fines de semana? ¿Cómo puedes saberlo?

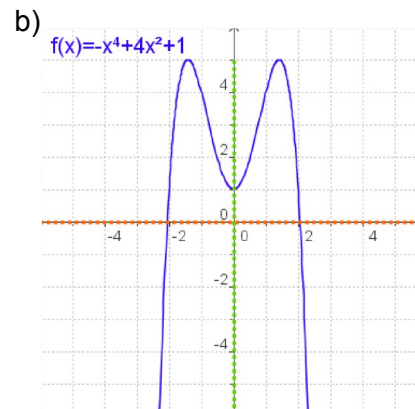
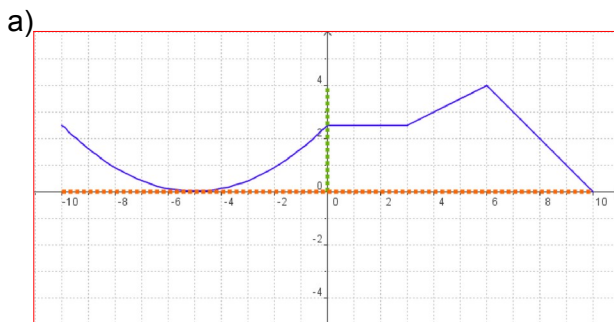
b) ¿Qué día ha haido más espectadores? ¿Y menos? ¿Qué días de la semana son?

c) ¿Cuántos máximos y cuántos mínimos relativos tiene la gráfica de la función?

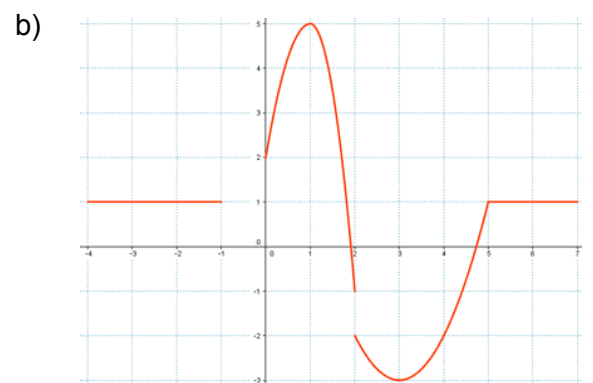
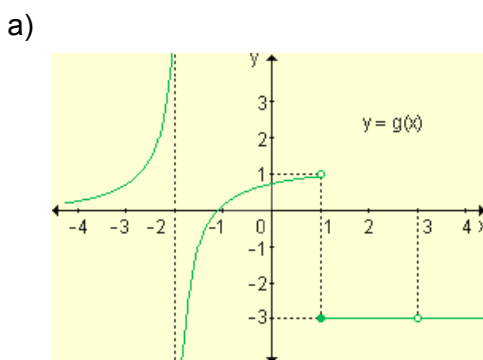
d) Hubo un día entre semana que fue festivo ¿De qué día se trata?



21.-Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:



22.- Indica si las gráficas siguientes son continuas, o discontinuas, indicando el tipo de discontinuidad, y los intervalos de continuidad:



23.- Calcula de ambas gráficas

a)



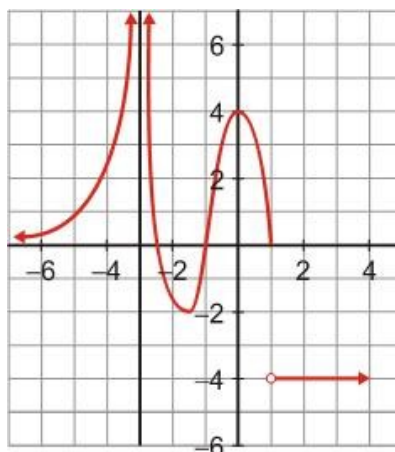
b)



- a) Dominio y recorrido
- b) Intervalos de continuidad y tipos discontinuidades
- c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- d) Máximos y mínimos
- e) ¿Son periódicas?

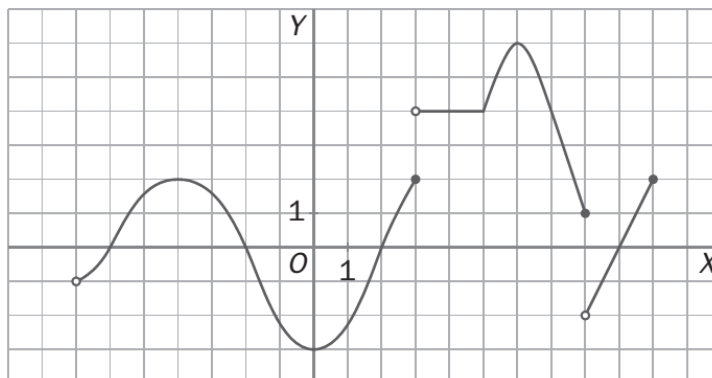
24.- Calcula:

- a) Dominio y recorrido.
- b) Calcula $f(-4)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- c) Continuidad y discontinuidades
- d) Cortes con los ejes.
- e) Crecimiento y decrecimiento.
- f) Máximos y mínimos relativos.
- g) ¿Son simétricas? ¿Son periódicas?



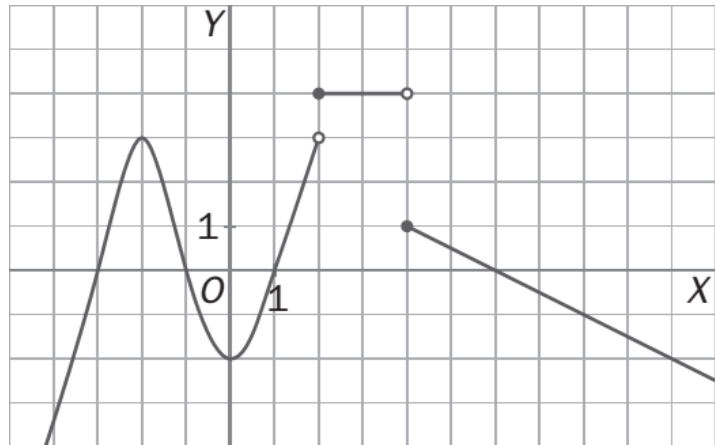
25.- Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades:

- a) Dominio y recorrido.
- b) Calcula $f(-4)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- c) Continuidad y discontinuidades
- d) Cortes con los ejes.
- e) Crecimiento y decrecimiento.
- f) Máximos y mínimos relativos.
- g) ¿Es simétrica? ¿Es periódica?



26.- Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades:

- a) Dominio y recorrido.
- b) Calcula $f(2)$, $f(4)$ y $f(0)$.
- c) Continuidad y discontinuidades
- d) Cortes con los ejes.
- e) Crecimiento y decrecimiento.
- f) Máximos y mínimos relativos.
- g) ¿Son simétricas? ¿Son periódicas?



APARTADO 2: FUNCIONES LINEALES

1.- Representa las siguientes funciones:

a) $y = 2x - 1$

c. $y = \frac{1}{2}x - 2$

e. $y = -2$

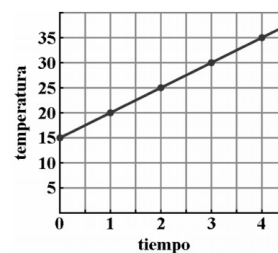
b) $y = \frac{-3}{2}x + 3$

d. $y = -3x$

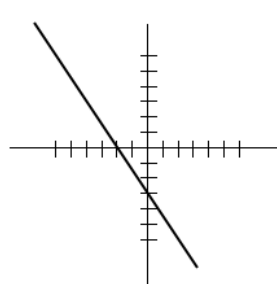
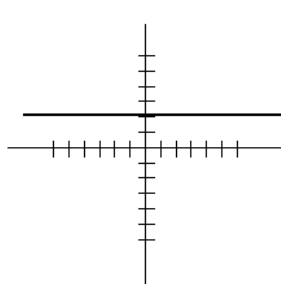
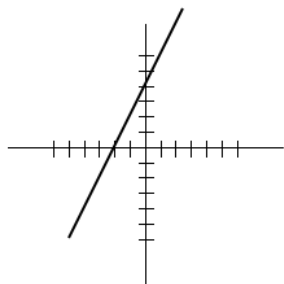
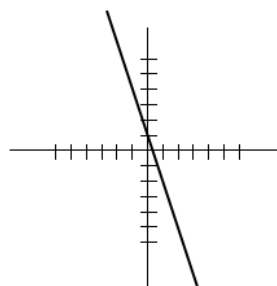
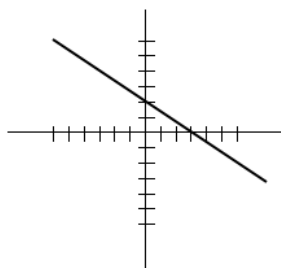
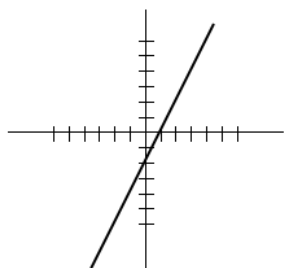
f. $y = -5x - 4$

2.- Se ha medido la temperatura de un gas a medida que se calentaba y se ha obtenido la siguiente gráfica:

- Indica si la función es de proporcionalidad, lineal o constante.
- Calcula la pendiente m de la recta.
- Indica la ordenada en el origen, n .
- Escribe la fórmula de la función.
- Calcula la temperatura del gas a los 10 minutos.



3.- Averigua la pendiente de las siguientes rectas y escribe sus ecuaciones:



4.- Escribe la ecuación punto-pendiente de las siguientes rectas:

- a) Tiene pendiente 3 y pasa por el punto A(3, -2)
- b) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto B(-2, 1)
- c) Tiene pendiente 0 y pasa por el punto C(-3, -4)

5.- Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

- a) Pasa por el punto P(2, -4) y Q(5, 3)
- b) Pasa por el punto P(-3, -2) y Q(4,6)
- c) Pasa por el punto P(-2, 4) y Q(-6, 4)

6.- Al apuntarnos a un gimnasio, hemos tenido que pagar una cantidad fija en concepto de matrícula. Después tendremos que ir pagando las mensualidades. Si estamos 6 meses, nos cuesta en total 246€, y si estamos 15 meses, nos costará 570€. Calcula cuánto nos gastaríamos en total si estuviéramos yendo durante un año.

7.- Al llamar a un fontanero me informa que cobra 50 € como concepto de desplazamiento y 20 € por cada hora de trabajo. Realiza una tabla de valores de lo que me costaría el arreglo si durase: 0 horas, 1 hora, 2 horas y 3 horas. Identifica la variable independiente y la dependiente. Representa gráficamente la función y escribe su expresión algebraica.

9.- Escribe la ecuación de la recta que:

- a) es paralela a la recta $y=2x-1$ y que pasa por el punto (-1,2)
- b) es paralela a la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B (-1,-2) y pasa por el punto C (3,1)

APARTADO 3: SUCESIONES

1.- Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones definidas por los siguientes términos generales:

a) $a_n = n^3$ b) $b_n = n^2 - 3n + 7$ c) $c_n = \frac{n-3}{n+4}$

2.- Escribe los 5 primeros términos de una sucesión recurrente con estos datos $a_1 = 1$ y $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3$

3.- Escribe los 5 primeros términos de una sucesión recurrente con estos datos $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

4.- Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ b) $1, 4, 9, 16, \dots$ c) $11, 9, 7, 5, \dots$ d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

5.- De una progresión aritmética sabemos que $a_1 = 1$ y $a_5 = 7$. Calcula:

- a) La diferencia de la progresión
- b) El término general
- c) El término a_{15}
- c) la suma de los 15 primeros términos.

6.- En una progresión aritmética el sexto término vale 10 y la diferencia es 1,5. Calcula:

- a) El primer término
- b) El término general
- c) El término a_9
- d) La suma de los 9 primeros términos.

7.- El quinto término de una progresión aritmética es -7 y el primer término es 5. Calcula:

- a) La diferencia de la progresión
- b) El término general
- c) El término a_{12}
- d) La suma de los 12 primeros términos

8.- Dada una sucesión $\{a_n\} = -7, -10, -13, -16 \dots$

- a) ¿De qué tipo de sucesión se trata?
- b) Calcula el término general
- c) ¿Qué **número** ocupa el lugar 10 ?
- d) ¿Qué **lugar** ocupa el número -40?

9.- El cuarto término de una progresión aritmética es 7 y el séptimo es 16. Halla:

- a) La diferencia de la progresión y el término general.

b) La suma de los 16 primeros términos de la progresión.