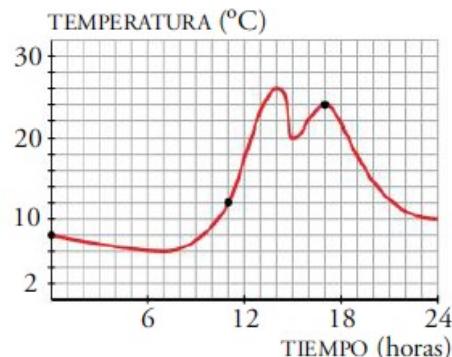


UD4: FUNCIONES Y DERIVADAS. BOLETÍN

REPASO CONCEPTOS BÁSICOS

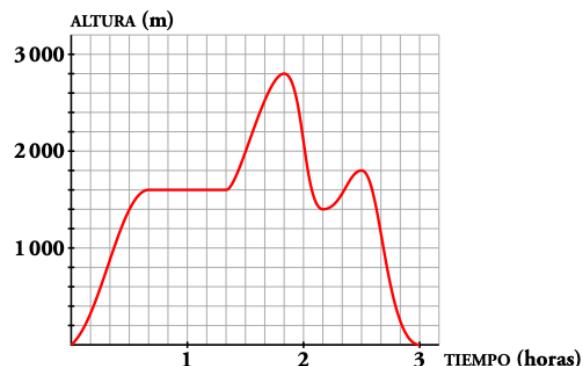
1.- La siguiente gráfica describe la temperatura ambiente, en un cierto lugar, en cada instante de un día.

- a) ¿Podemos decir que la mínima temperatura se dio a las 7 de la mañana? ¿Cuál fue?
- b) ¿Cuándo se dio la máxima temperatura? ¿Cuál fue?
- c) ¿En qué momentos la temperatura fue de 18 °C?
- d) Durante 1 h, aproximadamente, el sol estuvo oculto por las nubes. ¿A qué hora crees que fue?
- e) Indica una temperatura que se haya repetido en cuatro momentos distintos.
- f) Indica la variable dependiente e independiente.

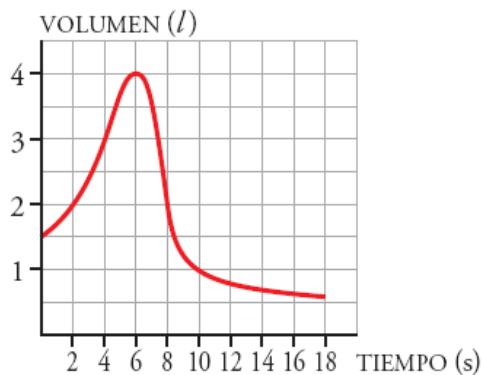


2.- En la gráfica de la derecha puedes ver la altura de una avioneta durante sus tres horas de vuelo.

- a) ¿Cuánto tiempo permanece estable? ¿A qué altura?
- b) ¿Cuánto tarda en estabilizar la altura?
- c) ¿Cuándo llega al máximo? ¿Qué altura alcanza?
- d) Indica la variable dependiente e independiente.



3.- Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro. Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



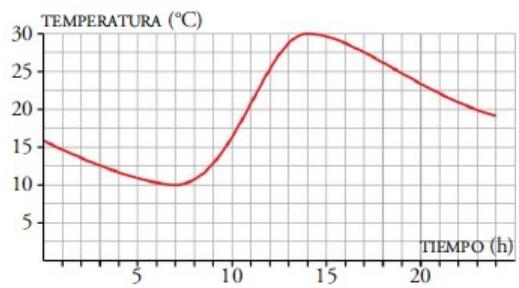
- a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?
- b) ¿Cuánto tiempo duró la observación?
- c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?
- d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? ¿Y cuándo termina?

4.- La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.

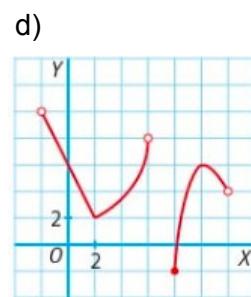
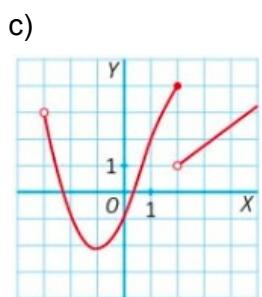
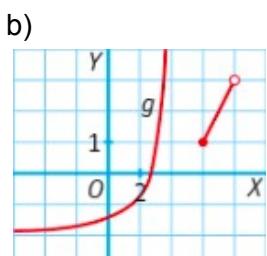
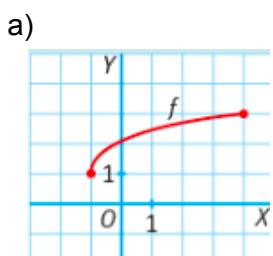
a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos donde decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

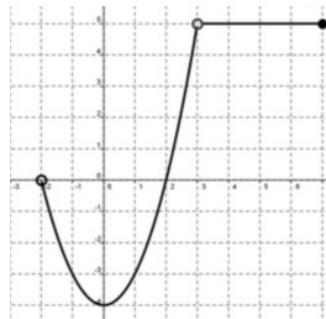
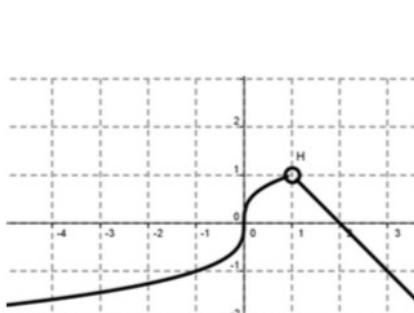
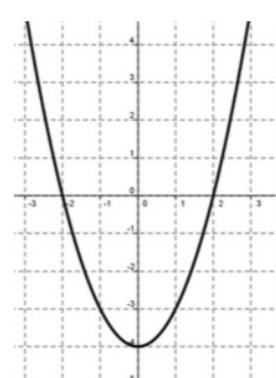
c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



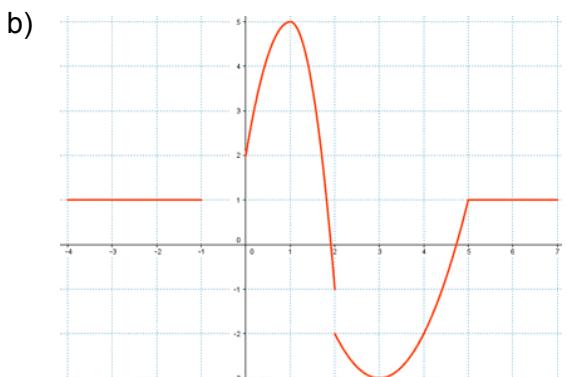
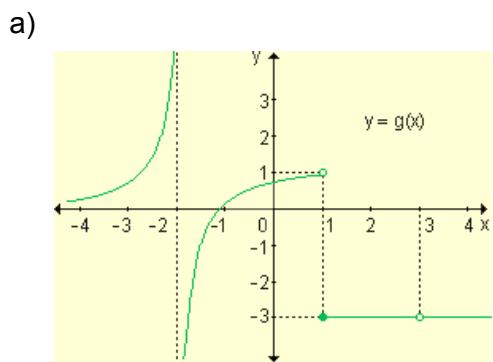
5.- Indica el dominio y recorrido de las siguientes funciones:



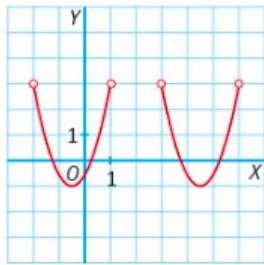
6.- Indica, en las siguientes funciones, los puntos de corte con los ejes y cuando son positivas:



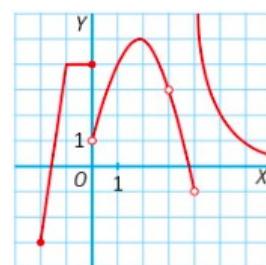
7.- Indica si las gráficas siguientes son continuas, o discontinuas, indicando los puntos de discontinuidad y los intervalos de continuidad de las funciones representadas



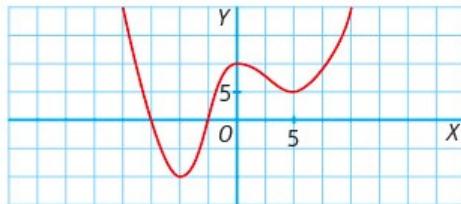
c)



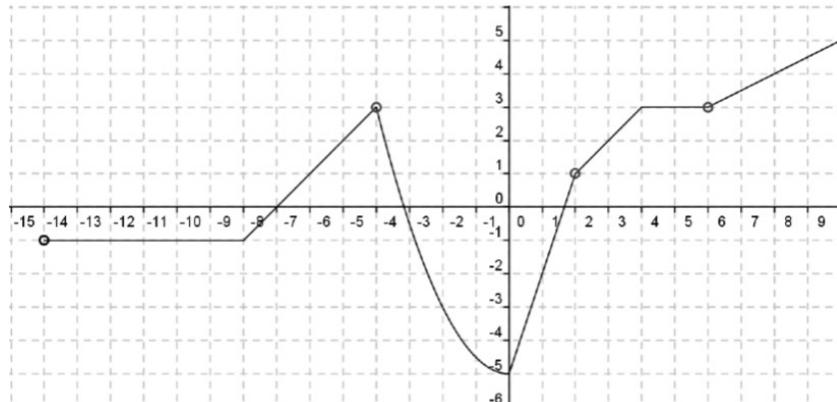
d)



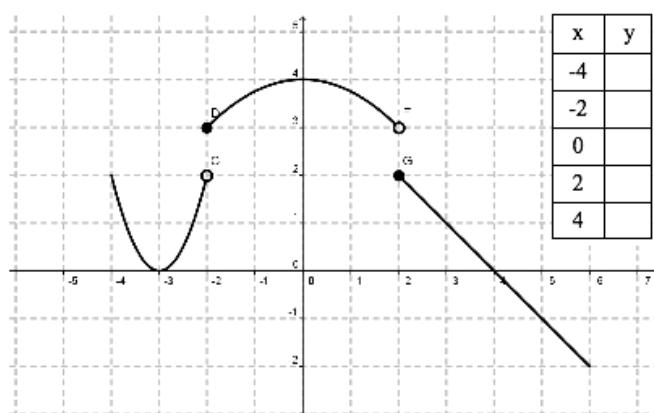
8.- Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos de la siguiente función.



9.- Realiza un estudio completo de la siguiente función (dominio, recorrido, puntos de corte, signo crecimiento y decrecimiento, extremos, continuidad.)

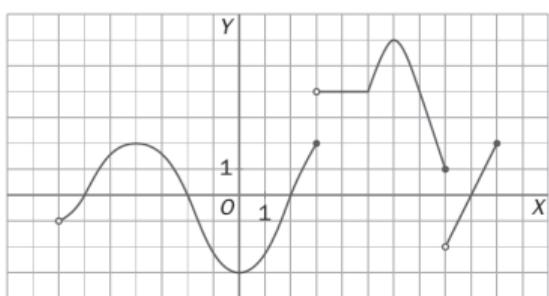


10.- Completa la tabla y estudia su dominio, recorrido, crecimiento y decrecimiento, extremos, continuidad (indicando los puntos de discontinuidad), puntos de corte y signo

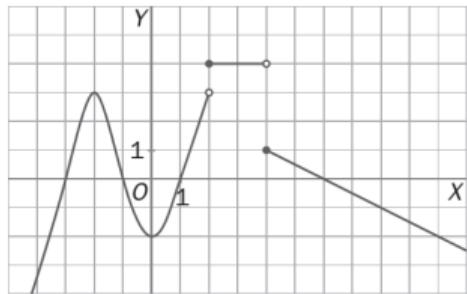


11.- Observa las siguientes gráficas y estuda las siguientes propiedades:

a)



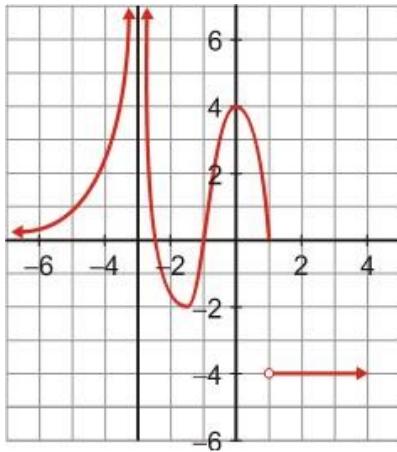
b)



- a) Dominio y recorrido
- b) Calcula $f(-4)$, $f(4)$ y $f(8)$
- c) Continuidad.
- d) Puntos de corte con los ejes.
- e) Crecimiento y decrecimiento.
- f) Máximos y mínimos.
- g) TVM en el intervalo $[-6, -4]$ en las gráficas a.

12.- Calcula:

- a) Dominio y recorrido.
- b) Calcula $f(-4)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- c) Continuidad y discontinuidades
- d) Cortes con los ejes.
- e) Crecimiento y decrecimiento.
- f) Máximos y mínimos relativos.



FUNCIONES ELEMENTALES

13.- Determina el dominio de las siguientes funciones:

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x)=3x^2-4x+1$ | f) $f(x)=\sqrt{14x-5}$ | k) $f(x)=\log(25-x^2)$ |
| b) $f(x)=(x-2)^2$ | g) $f(x)=\sqrt{2x-12}$ | l) $f(x)=\sqrt{x+2}$ |
| c) $f(x)=\frac{2x+3}{3x^2+5x}$ | h) $f(x)=\sqrt{x-2}$ | m) $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}}$ |
| d) $f(x)=\frac{2}{x^2-4}$ | i) $f(x)=\sqrt[3]{3x^2-14x-5}$ | n) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ |
| e) $f(x)=\frac{7x}{x-2}$ | j) $f(x)=\log(x-3)$ | o) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ |

14.- Dibuja una posible gráfica para la función f siendo $\text{Dom}(f)=[0,1] \cup [5,7]$ y $\text{Rec}(f)=[0,2]$.

15.- Representa las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x)=\begin{cases} x^2-9 & \text{si } x < 3 \\ -x+3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{c) } f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si } x < 1 \\ x^2-4x+4 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

16.- Transforma las siguientes funciones con valor absoluto en funciones a trozos:

$$\text{a) } f(x)=|x+1| \quad \text{b) } f(x)=|1-x| \quad \text{c) } f(x)=|x-2| \quad \text{d) } f(x)=|x-5|+3$$

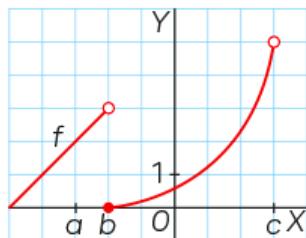
17.- Sean $f(x)=x^2-x-2$, $h(x)=\frac{1}{x^2-4}$ y $t(x)=1-x^2$, calcula:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (f-t)(x) & \text{b) } (f \circ t)(x) & \text{c) } t^{-1}(x) \\ \text{d) } (t \circ h)(x) & \text{e) } h^{-1}(x) & \text{f) } (f \circ t^{-1})(x) \end{array}$$

18.- Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=\frac{1}{x-3}$, calcula:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f^{-1}(x) & \text{b) } g^{-1}(x) & \text{c) } (f \circ g)(x) \\ \text{d) } (g \circ f)(x) & & \end{array}$$

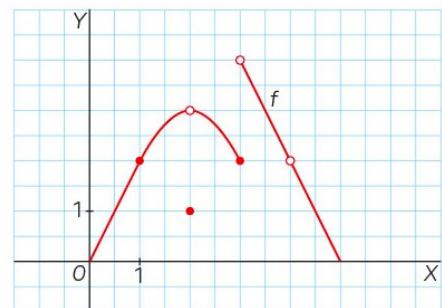
19.- Dada la función de la figura, calcula $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, los límites laterales y el límite de f en a , b y c .



LÍMITES

20.- Calcula:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) & \text{g) } f(0) & \text{h) } f(1) \\ \text{i) } f(2) & \text{j) } f(3) & \text{k) } f(4) & \text{l) } f(5) \end{array}$$



21.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 4x - 5$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{3x+2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{2x-3}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2-x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1}$ g) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x}$ k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x}$ l) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-2x+1}$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ n) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$ o) $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x+2}{7-x}$ p) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4}$

q) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3}$ r) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3}$ s) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

22.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x-2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+3x^2-1}{2x^3+8}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-7}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{-x}}{2}$ g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5+1}{3x^7-1}$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-2x}{7x^2+1}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^{-x}}$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{2x+5}$ k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{7x-2}$ l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-x}{x+5}$

m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{x^2+1}$ n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2+5}$ o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2-4}$ p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{4x^2-3}$

q) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3-x^2}{x^5+x^2}$

CONTINUIDAD

23.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$
 d) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ e) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+1}$

24.- Encuentra el mayor conjunto de números reales donde sean continuas las siguientes funciones

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ c) $f(x) = \frac{3x+7}{x-2}$

$$d) \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$$

$$e) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$$

$$f) \quad f(x) = \sqrt{9x^2 - 4}$$

25.- Halla el valor de k para que la f sea continua en $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \\ 2k+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$26.- \text{ Dada la función } f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^2 - 1} .$$

a) Estudia su continuidad

b) ¿Qué valores hay que adjudicar a $f(1)$ y $f(-1)$ para que la función sea continua en \mathbb{R} ?

27.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 1 \\ x+7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 1 \\ x-7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = 5 - |2x - 6|$$

$$d) \quad f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

28.- Determina a y b para que la función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

29.- Determina m y n para que la función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ mx + n & \text{si } 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$30.- \text{ Sea la siguiente función } f(x) = \begin{cases} ax + 3 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

a) Comprueba que es continua en 1

b) Calcula el valor de a para que sea continua en $\frac{1}{2}$

TASA DE VARIACIÓN MEDIA

31.- Para la función $f(x)=\sqrt{x+4}$ calcula su TVM en los intervalos $[0;1]$, $[0;0,01]$ y $[0;0,001]$ ¿Puedes dar una estimación de su tasa de variación instantánea?

32.- Una enfermedad se ha expandido durante los últimos tres meses según la función $f(t)=3t^2-t^3$, que mide los contagios en función del mes.

a) Representa con ayuda de GeoGebra la función y calcula la TVM para los dos primeros meses y para el último. ¿Qué observas?

b) Analizando la tasa de crecimiento de la enfermedad durante los tres meses, ¿se puede decir que la enfermedad ha sido controlada por completo?

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

33.- Calcula si es posible la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^2-3x$ en $x=-1$ y $x=2$

b) $f(x)=x^3+x-5$ en $x=0$ y $x=5$

c) $f(x)=x^2-5$ en $x=-2$ y $x=2$

34.- Aplicando la definición, halla las siguientes derivadas en los puntos indicados

a) $f(x)=2x^2-3x$ en $x=0$

b) $f(x)=x^3$ en $P(1,1)$

c) $f(x)=\frac{2}{x}$ en $x=4$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

35.- Halla la ecuación de las rectas tangentes a la curva $y=x^4-2x^2-x$ en los puntos $A(-1,0)$ y $B(1,-2)$

36.- Calcula los puntos de corte con los ejes de la tangente a la curva $y=\frac{1}{x-1}$ en el punto $P(2,1)$.

37.- Halla en qué puntos la recta tangente a la curva $y=x^3-5x^2+3x-2$ es horizontal y calcula, en cada caso, la ecuación de dicha tangente.

38.- Halla la recta tangente a la curva $f(x)=\operatorname{sen}x$ en el origen de coordenadas

CÁLCULO DE DERIVADAS

39.- Calcula la derivada de las siguientes funciones elementales.

a) $f(x)=5$ b) $f(x)=5x$ c) $f(x)=x^{10}$ d) $f(x)=\sqrt{x}$

e) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ f) $f(x)=e^x$ g) $f(x)=7x^2$ h) $f(x)=3^x$

i) $f(x)=\log_3 x$

40.- Calcula la derivada de las siguientes sumas de funciones.

a) $f(x)=3x^2+1$

b) $f(x)=8x^4+x^3-2x$

c) $f(x)=x^3+\operatorname{sen}x$

d) $f(x)=3\cos x+\ln x$

e) $f(x)=x-\operatorname{tg}x$

f) $f(x)=5x^5-\arccos x$

g) $f(x)=\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^5}$

h) $f(x)=\frac{-2}{3}\sqrt{x^3}-\sqrt{15x}-\sqrt[3]{x^5}$

i) $f(x)=e^x-\cos x+\operatorname{arctg}x$

41.- Calcula la derivada de los siguientes productos de funciones.

a) $f(x)=x^2 \cdot \operatorname{sen}x$

b) $f(x)=e^x \cdot \cos x$

c) $f(x)=(x^5+3) \cdot (x+1)$

d) $f(x)=(x^2+x-1) \cdot (e^x)$

42.- Calcula la derivada de los siguientes cocientes de funciones.

a) $f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x^2}$

b) $f(x)=\frac{5x^4-3x^3}{x-1}$

c) $f(x)=\frac{4^x}{x^3}$

d) $f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$

e) $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen}x}$

f) $f(x)=\frac{x^2 \cdot \operatorname{tg}x}{e^x}$

g) $f(x)=\frac{2^x \cdot x^2}{\ln x}$

43.- Calcula la derivada de las siguientes funciones usando la regla de la cadena.

a) $f(x)=(x+1)^3$

b) $f(x)=\ln x^2$

c) $f(x)=e^{x^2-5x+3}$

d) $f(x)=\cos(3^x)$

e) $f(x)=\operatorname{sen}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

f) $f(x)=\sqrt{\ln(\operatorname{sen}x)}$

g) $f(x)=\ln(4x^2 \cdot \cos x)$

h) $f(x)=e^{x^2}-\tan(x^3-1)$

i) $f(x)=\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{x}$

44.- Calcula las siguientes derivadas.

a) $f(x)=\sqrt{3}$

b) $f(x)=5x^4+2x^3+7x^2$

c) $f(x)=x^4-3x$

d) $f(x)=\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{5x}{4}-\frac{1}{6}$

e) $f(x)=(x^4+3x^2) \cdot (2-6x-x^2)$

f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

g) $f(x)=\frac{x}{x^2+5}$

h) $f(x)=\frac{x^3-x+3}{x^2+2x-1}$

i) $f(x)=(x-1)^5$

j) $f(x)=(x^3-2x^2+x-3)^6$

k) $f(x)=(2x^2-1) \cdot (x^3+4x-2)^4$

l) $f(x)=\sqrt{x^3-2}$

m) $f(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{2x-1}\right)^3$

n) $f(x)=(x^2-1) \cdot \sqrt{5x-4}$

o) $f(x)=\sqrt{(3x-5)^5-1}$

p) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{(3x-1)^2}$

r) $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 7x - 3)$

s) $f(x) = e^{3x^3-5x+1}$

t) $f(x) = \frac{e^{x^3} + x^3}{x}$

u) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$

v) $f(x) = 7^{2x}$

w) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

x) $f(x) = 3^{x^3-x}$

y) $f(x) = e^x \cdot \ln x$

z) $f(x) = \ln e^x$

45.- Calcula las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

b) $f(x) = \frac{2^x - x}{3^x}$

c) $f(x) = \frac{x \cdot e^x}{\ln x}$

d) $f(x) = \ln(x^3 - 2x - 1)$

e) $f(x) = \log_2(3x^2 - 1)$

f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(7x^2)$

g) $f(x) = 5x \cdot \log_5 x^4$

h) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 5x})$

i) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + e^{2x})$

j) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

k) $f(x) = \operatorname{sen}(5x^2 - 2x + 1)$

l) $f(x) = 2 \operatorname{sen}(x^2 + 1)$

m) $f(x) = x \cdot \cos(3x - 2)$

n) $f(x) = \frac{x + \operatorname{sen} x}{\cos(4x)}$

o) $f(x) = \operatorname{tg}^2(2x)$