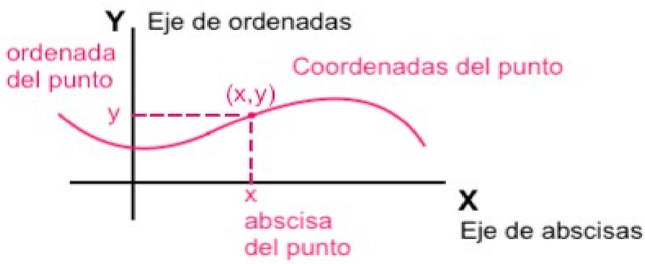
UNIDAD 4: FUNCIONES Y DERIVADAS

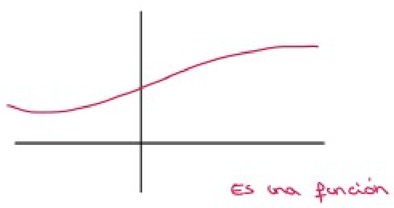
1. FUNCIÓN. REPASO CONCEPTOS BÁSICOS

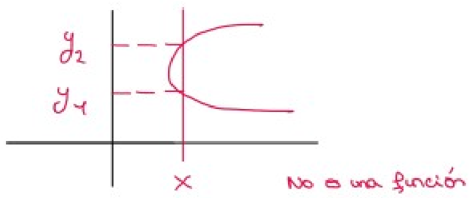
Una **función** real de variable real es una relación o una correspondencia entre dos conjuntos , de manera que a cada número real del conjunto inicial x le hace corresponder un único número real del conjunto final y.

$$f: Dom f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) \quad \text{También llamado y}$$

- **Variable independiente: x,** la forman los valores del conjunto inicial que se fijan previamente. El conjunto de valores que pueda tomar esta variable formará el Dominio de la función.
- **Variable dependiente**: **y**=f(x) , la forman los valores del conjunto final que se obtienen al aplicar la función a la variable independiente. El conjunto de valores que resulta tomar esta variable formará la Imagen de la función.





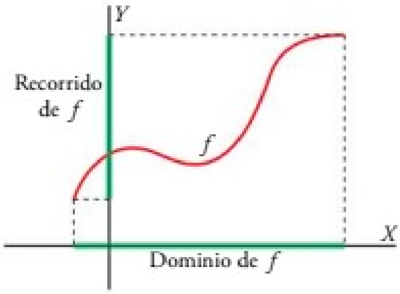


Una función se puede definir mediante un **enunciado**, una t**abla de valores**, **una gráfica** o una **fórmula** (ecuación).

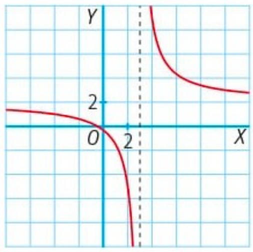
1.2. Dominio y recorrido

El **dominio** de una función f(x) es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente x, es decir, los valores de x para los que existe función. Se representa por D(f) o Dom(f) .

El **recorrido o imagen** de una función f(x) es el conjunto de los valores que puede tomar la variable dependiente y se representa por Im(f)



Ejemplo: Calcula el dominio y recorrido de la siguiente función:



$$Dom(f) = \mathbb{R} - 3 = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

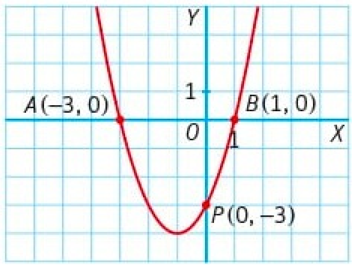
$$Im(f) = \mathbb{R} - 2 = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

1.3. Puntos de corte con los ejes. Signo de la función

Los **puntos de corte** de una función con los ejes van a ser los puntos de intersección de la gráfica con el eje Y y el eje X:

- Los puntos de corte con el eje Y son de la forma (x = 0, y = f(0)).
- Los puntos de corte con el eje X son de la forma (x, y=0)

Ejemplo: Indica los puntos de corte de la siguiente función:



PC eje x: A(-3, 0) y B(1, 0)
PC eje y: C(0, -3)

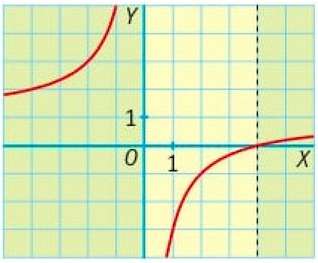
Signo de la función:

La gráfica de una función positiva está por encima del eje X, y por debajo, si la función es negativa. En los puntos de corte con el eje X la función puede pasar de ser positiva a negativa o viceversa.

Una función f es **positiva** en un intervalo (a, b) si $f(x) > 0$ para todos los valores de $x \in (a, b)$

Una función f es **negativa** en un intervalo (a, b) si $f(x) < 0$ para todos los valores de $x \in (a, b)$

Ejemplo: Estudia el signo de la siguiente función a partir de su gráfica:

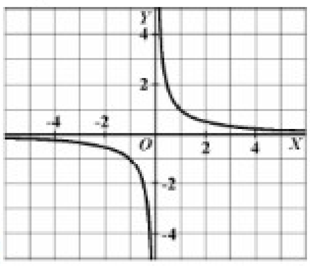


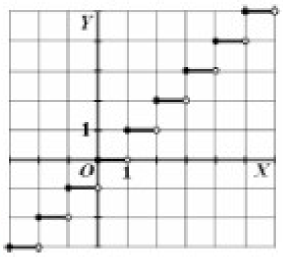
f positiva : (-∞, 0) U (4, +∞)
f: negativa: (0, 4)

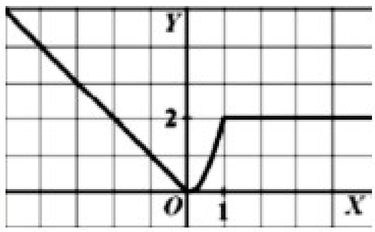
1.4. Continuidad

Una función es **continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo.
Una función es **discontinua** si al dibujar su gráfica existe algún punto en el que se interrumpe (levantamos el lápiz del papel). Los puntos donde la gráfica se interrumpe se llaman puntos de discontinuidad.

Ejemplo: Estudia si las siguientes funciones son continuas, indicando los puntos de discontinuidad si existen.

a) 

b) 

c) 

a) Discontinua. Punto de discontinuidad x=0.
b) Discontinua. Puntos de discontinuidad todos los números enteros.
c) Continua

1.5. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Una función es **creciente** cuando a medida que aumenta el valor de x, también aumenta el valor de f(x): $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (Dicho de otra manera, cuando al mirar su gráfica de izquierda a derecha, esta siempre va hacia arriba)

Una función es **decreciente** cuando a medida que aumenta el valor de x, disminuye el valor de f(x): $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (Dicho de otra manera, cuando al mirar su gráfica de izquierda a derecha, esta siempre va hacia abajo)

Una función es **constante** cuando a medida que aumenta el valor de x, el valor de f(x) no varía. $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (Dicho de otra manera, su gráfida es horizontal. Ni sube ni baja)

- **Para calcular analíticamente** si la función crece o decrece en un intervalo concreto, utilizamos la tasa de variación media.

Se llama **tasa de variación media de f** definida en el intervalo [a, b] al cociente:

$$TVM\, f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Una función f es **creciente** en un intervalo de su dominio, si para cualquier par de valores a y b, con a<b, la $TVM\, f[a,b]>0$

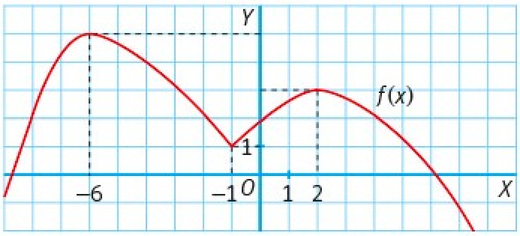
Una función f es **decreciente** en un intervalo de su dominio, si para cualquier par de valores a y b, con a<b, la $TVM\, f[a,b]<0$

- **Extremos:**

Una función tiene un **mínimo relativo** en un punto A(x, y) si en dicho punto la función es continua y pasa de decreciente a creciente. Si "y" es el menor valor que toma la función en todo su dominio, el punto A(x, y) es un **mínimo absoluto**.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto A(x, y) si en dicho punto la función es continua y pasa de creciente a decreciente. Si "y" es el mayor valor que toma la función en todo su dominio, el punto A(x, y) es un **máximo absoluto**.

Ejemplo: Indica los intervalos de crecimiento, los intervalos de decrecimiento y los extremos de la siguiente función. Calcula la TVM en [-8, -7] y [-4, -2].



f creciente en $(-\infty,-6)\cup(-1,2)$

f decreciente en $(-6,-1)\cup(2,+\infty)$

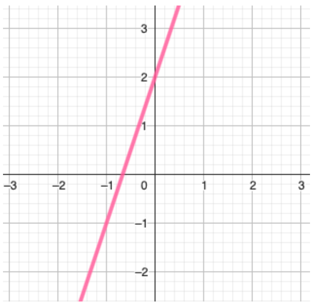
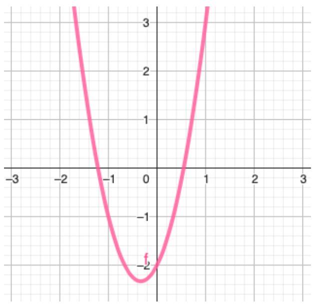
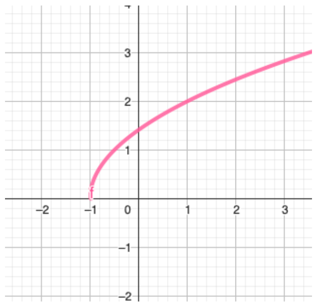
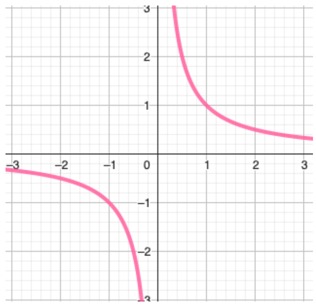
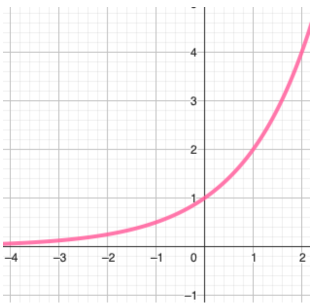
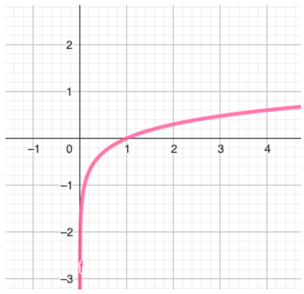
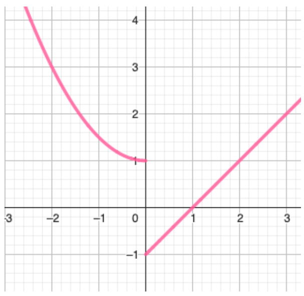
$$TVM\, f[-8,-7]=\frac{f(-7)-f(-8)}{-7+8}=\frac{4-2}{1}=2>0$$

$$TVM\, f[-3,-2]=\frac{f(-3)-f(-4)}{-3+4}=\frac{2-3}{1}=-1<0$$

f tiene un máximo absoluto A(-6, 5) y un máximo relativo en B(2, 3)

f tiene un mínimo relativo en C(-1, 1).

2. FUNCIONES ELEMENTALES

Rectas	Parábolas	Radicales	Racionales
$f(x)=mx+n$	$f(x)=ax^2+bx+c$	$f(x)=\sqrt{p(x)}$	$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$
			
Exponenciales	**Logarítmicas**	**Funciones definidas a trozos**	
$f(x)=a^x$	$f(x)=\log_a x$	$f(x)=\begin{cases} p(x) & si\, x<a \\ q(x) & x\geq a \end{cases}$	
			

2.1 Dominio de una función

Para calcular el dominio analíticamente debemos tener en cuenta el tipo de función con la que estamos trabajando, vamos a ver como se calcula el dominio de las más comunes:

- Funciones **Polinómicas**: son de la forma $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...+d$. Su dominio son todos los números reales : Dom(f) = $\mathbb{R}$.
- Funciones **Racionales**: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ están definidas mediante un cociente de polinomios.

Su dominio son todos los reales excepto los valores de x que anulan al denominador.

- Funciones **radicales**: $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ son expresiones que tienen x dentro de una raíz. Su dominio viene dado por el índice n:

✔ **Si n es par**: el dominio es el conjunto de los reales que hacen positivo al radicando (ya que las raíces con índice par de números negativos no tienen solución real)

✔ **Si n es impar**: el dominio coincide con el dominio del radicando.

- Funciones **exponenciales**: son de la forma $f(x)=a^x$ su dominio son todos los números reales : Dom(f) = $\mathbb{R}$.

- Funciones **logarítmicas**: son expresiones con x en el argumento de un logaritmo. Su dominio estará formado por todos los números reales que hacen que el argumento sea positivo. (No existen logaritmos de números negativos ni el logaritmo de cero).

<u>Ejemplo:</u> Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=5x^3-2x^2+7x-3$ función polinómica $Dom(f)=\mathbb{R}$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$ función racional $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$ $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

c) $f(x)=\sqrt{2x-12}$ función irracional $2x-12\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 12 \Rightarrow x\geq 6$ $Dom(f)$ = [6, +∞)

d) $\log(x+3)$ función logarítmica $x+3>0 \Rightarrow x>-3$ $Dom(f)=(-3,+\infty)$

2.2 Operaciones con funciones

- **Suma y resta**: $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$
- **Producto**: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- **Cociente**: $\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$
- **Composición**: $f\circ g(x)=f(g(x))$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=(x-3)^2$ y $g(x)=x+1$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x+1)=((x+1)-3)^2=(x-2)^2=x^2-4x+4$$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g((x-3)^2)=(x-3)^2+1=x^2-6x+10$$

- **Función inversa**

Se llama función inversa de f a otra función f^{-1} que verifica que si $f(a)=b$ entonces $f^{-1}(b)=a$. Se cumple que $f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$. Es decir, que una función compuesta con su inversa debe devolvernos la variable x (tanto ta el orden en el que compongamos ambas funciones).

<u>Ejemplo:</u> Para obtener la función inversa de $f(x)=x^3-1$ tenemos que despejar la x. Una vez despejada, intercambiamos todas las “y” por “x”. Esa nueva “y” será la $f^{-1}(x)$ buscada.

$$y=x^3-1 \rightarrow \sqrt[3]{y+1}=x \rightarrow \sqrt[3]{x+1}=f^{-1}(x)$$

3.- LÍMITES DE FUNCIONES

Si se quiere estudiar hacia que valor se aproxima una función cuando la variable independiente toma valores próximos a un número real dado, resulta imprescindible introducir un nuevo concepto: **límite de una función en un punto.**

Si a y b son dos números reales, la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = b$ quiere decir que siempre que x tome valores próximos al número a, tanto mayores como menores, los correspondientes valores de f se aproximan al número b.

Ejemplo:

a) $\lim_{x \to 3} x^2 + 1$

x	2,9	2,99	3,01	3,1
$f(x)$	9,41	9,94	10,06	10,61

Vemos que antes y después de 3 $f(x)$ se acerca a 10 por lo tanto $\lim_{x \to 3} x^2 + 1 = 10$.

b) $\lim_{x \to 0} sen \frac{1}{x}$

x	0,01	0,001	-0,001	3-0,01
$f(x)$	-0,5	0,8	-0,82	-0,98

Vemos que antes y después de 0 $f(x)$ no se aproxima a ningún número, por lo tanto no tiene límite.

Límites laterales: En algunos casos no existe el límite en un punto, entonces veremos los límites laterales:

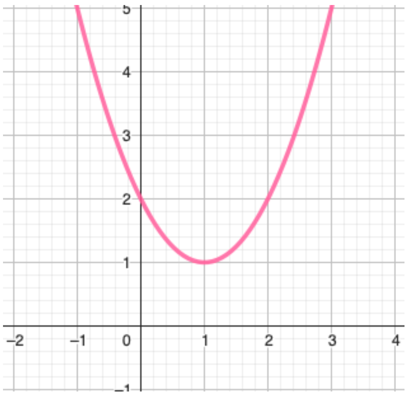
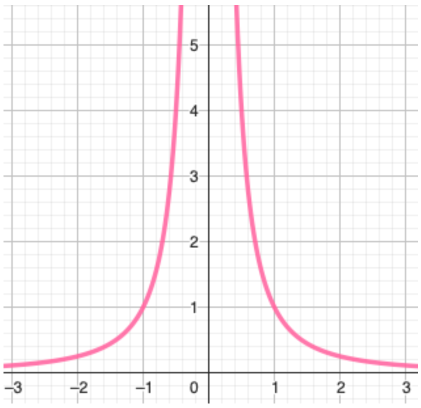
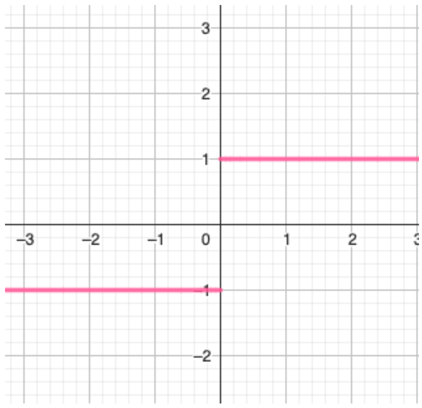
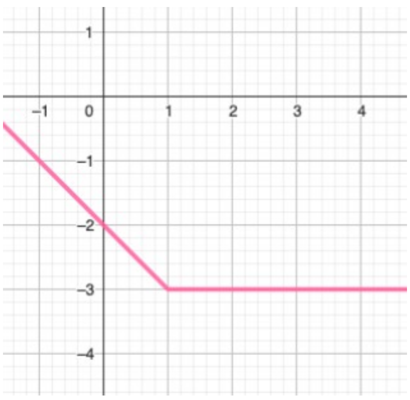
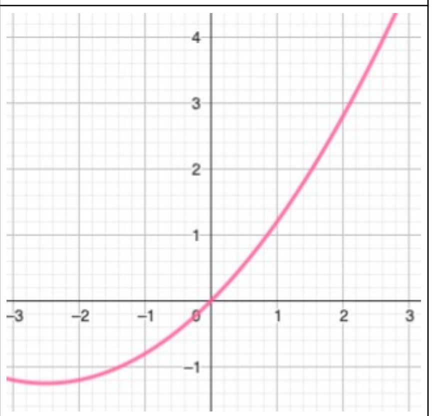
- **Límite lateral de f cuando x tiende al número "a" por la izquierda es el número b**, si al tomar valores próximos a "a" pero menores que "a", los correspondientes valores se aproximan al número b y se denota por $\lim_{x \to a^-} f(x)$.
- **Límite lateral de f cuando x tiende al número "a" por la derecha es el número b**, si al tomar valores próximos a "a" pero mayores que "a", los correspondientes valores se aproximan al número b y se denota por $\lim_{x \to a^+} f(x)$.
- **El límite de una función cuando x tiende a un punto existe si existen los límites laterales y coinciden** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ **.**

Límites infinitos: En algunas ocasiones al acercarse la x a “a” la función $f(x)$ toma cada vez valores más grandes.

- $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ si x toma valores próximos a “a” (tanto a la izquierda como a la derecha) los valores de f se hacen arbitrariamente más grandes.
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si x toma valores próximos a “a” (tanto a la izquierda como a la derecha) los valores de f se hacen arbitrariamente más pequeños.

Límites en el infinito: Además de considerar el comportamiento de una función cuando x tiende a un punto, también podemos estudiar cuando toma cada vez valores más grandes o pequeños.

- $\lim_{x \to \infty} f(x)$ x toma cada vez valores más grandes.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ x toma cada vez valores más pequeños.

El límite cuando x tiende a 0 es 2.	El límite cuando x tiende a 0 es infinito.	El límite cuando x tiende a 0 no existe.
		
El límite cuando x tiende a infinito es -3.	El límite cuando x tiende a infinito es infinito.	
		

3.1 Cálculo de límites

Para calcular un límite sustituimos la variable por el valor al que tiende y hacemos las operaciones, como resultado del límite podemos obtener un valor finito, infinito o indeterminado. Indeterminado quiere decir que no podemos saber el valor del límite de forma inmediata, sino que hay que trabajar más para saberlo.

1.- $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3}{x+1} = \frac{(-2)^2-3}{-2+1} = -1$

2.- Las expresiones de tipo $\infty \pm k$ siempre dan ∞ .

$$\lim_{x\to\infty} x-5=\infty-5=\infty$$

3.- Las expresiones de tipo $\infty\cdot\infty$ dan ∞ . (Hay que tener en cuenta los signos)

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^x=\infty\cdot e^{\infty}=\infty\cdot\infty=\infty$$

4.- Las expresiones de tipo $k\cdot\infty$ dan ∞ (k>0).

$$\lim_{x\to\infty} 3x=3\cdot\infty=\infty$$

5.- Las expresiones de tipo $\frac{k}{0}$ con $k\neq 0$ pueden dar más o menos infinito, hay que estudiar los limites laterales.

$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x}=\frac{3}{0}$ $\rightarrow$ no tiene límite ya que los laterales no coinciden.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x}=\frac{3}{0^+}=\infty$$

6.- Las expresiones de tipo $\frac{k}{\pm\infty}$ siempre dan 0.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x+5}=\frac{3}{-\infty}=0$$

7.- Cuando tenemos el <u>límite de una función polinómica cuando x tiende a infinito</u>, solo tenemos en cuenta el término de mayor grado, el valor de las potencias de grado inferior es insignificante comparado con el mayor.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 - 2x = \lim_{x \to \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

8.- En las potencias el valor del límite depende del valor de k

$$\lim_{x \to \infty} x^5 = \infty^5 = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x^{-5} = \frac{\lim_{x \to \infty} 1}{x^5} = \frac{1}{\infty^5} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3^x = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} 3^x = 3^\infty = \infty$$

NOTA: Operaciones en el infinito

Suma y resta	Producto	Cociente	Potencia
$\infty \pm k = \infty$ $-\infty \pm k = -\infty$ $\infty + \infty = \infty$ $-\infty - \infty = -\infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$ Si k>0 $\infty \cdot k = \infty$ $-\infty \cdot k = -\infty$ Si k<0 $\infty \cdot k = -\infty$ $-\infty \cdot k = \infty$	Si $k \neq 0$ $\frac{k}{\pm\infty} = 0$ $\frac{k}{0} = \pm\infty$	$\infty^k = \infty$ (k>0) $\infty^k = 0$ (k<0) $k^\infty = \infty$ (k>1) $k^\infty = 0$ (0<k<1)

4.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Veamos la continuidad de las funciones elementales:

- Funciones **Polinómicas** son continuas en todo su dominio, es decir $\mathbb{R}$
- Funciones **Racionales**: son continuas en todos los números reales excepto los valores de x que anulan al denominador.
- Funciones **exponenciales**: son continuas en todo su dominio, es decir $\mathbb{R}$
- Funciones **logarítmicas**: es continua en todos todos los números reales que hacen que el argumento sea positivo.

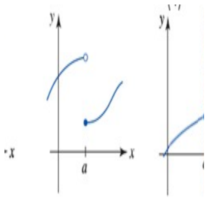
Una función **f es continua en un punto "a"** si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Una **función** será **continua en un intervalo abierto (a, b)** si es continua en todos los puntos pertenecientes a ese intervalo.

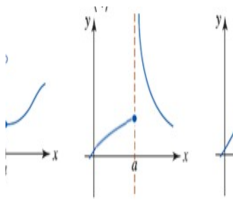
Si una función no es continua en un punto, se dice que es **discontinua** en el. Existen varios tipos de discontinuidades:

a) **Inevitable**: los límites laterales no coinciden $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$

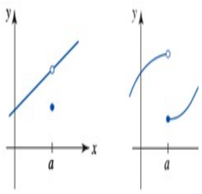
- De salto finito: Ambos limites laterales tienen un valor finito.



- De salto infinito: Uno de los límites laterales tiene un valor finito y el otro infinito.



b) **Evitable**: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$



Ejemplo: Calcula el valor de m para que la función $f(x) = \begin{cases} mx^3 - 3x & x \leq -2 \\ 2x + 2m & x > -2 \end{cases}$ sea continua en todos los números reales.

- La función es continua antes de -2 ya que es una función polinómica.
- La función es continua después de -2 ya que es una función polinómica.
- Para que sea continua en x=-2 tiene que verificarse que $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$
  - $f(-2) = \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} mx^3 - 3x = m(-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -8m + 6$
  - $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 2x + 2m = 2(-2) + 2m = 2m - 4$
  - Para que sea continua $-8m + 6 = 2m - 4 \quad \rightarrow \quad m = 1$

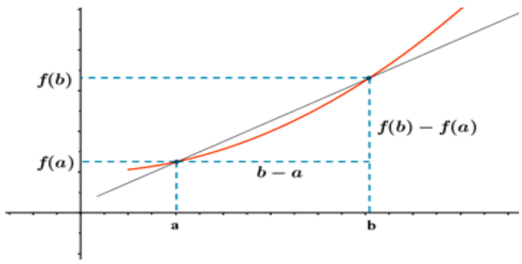
5.- DERIVADAS

5.1.- Tasa de variación media

Para conocer como varía una función en un determinado intervalo, se estudia la **tasa de variación media** (TVM). Dada una función $y=f(x)$, la TVM en el intervalo $[a,b]$ se define como: $TVM\, f[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

La TVM nos mide el aumento o disminución de dicha función en un intervalo, por tanto, es el valor de la pendiente de la recta que pasa por el punto $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$

- Si $TVM\, f[a,b]>0$ entonces f es creciente en $[a,b]$
- Si $TVM\, f[a,b]<0$ entonces f es decreciente en $[a,b]$



$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ejemplo: $f(x)=x^2-x+3$ vamos a calcular la TVM en el intervalo $[2,2+h]$

$$TVM\, f[2,2+h]=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-(2+h)+3-(2^2-2+3)}{h}=\frac{h^2+3h+5-5}{h}=\frac{h^2+3h}{h}=h+3$$

5.2.- Derivada de una función en un punto

Para medir el aumento o disminución de una función en un punto dado, utilizaremos la TVM en un intervalo muy próximo a este punto $(a,a+h)$ cuando $h\to 0$. A este valor le llamamos **derivada de la función en el punto** $x=a$ y se denota por $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Ejemplo: Derivada de $f(x)=x^2$ en $x=2$

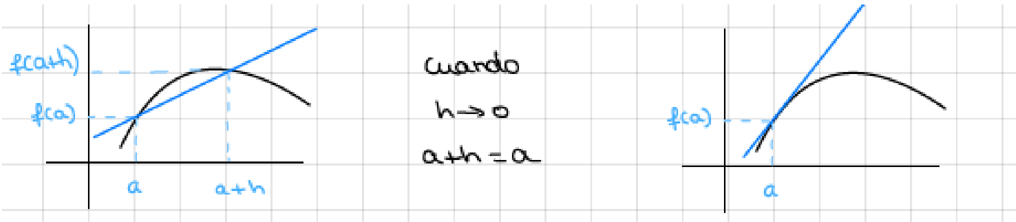
$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h+4-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}h+4=4$$

Propuesto: Derivada de $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ en $x=-1$

5.3.- Interpretación geométrica de la derivada

Geométricamente $f'(a)$ representa el valor de la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, siendo la ecuación de dicha tangente:

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$



Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\frac{4}{x-2}$ en el punto $(3,4)$

$y-f(3)=f'(3)(x-3) \rightarrow y-4=f'(3)(x-3)$ vamos a calcular $f'(3)$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4}{3+h-2}-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4-4-4h}{h+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h}{h(h+1)}=-4$$

$y-4=(-4)(x-3) \rightarrow y-4=-4x+12 \rightarrow y=-4x+16$

5.4.- Cálculo de derivadas

En lugar de tener que aplicar límites cada vez que tengamos que calcular una derivada vamos a ver una serie de reglas para derivar funciones.

- Derivada de la **función constante**
  Si $f(x)=k$ con $x \in \mathbb{R}$ entonces $f'(x)=0$

- Derivada de la **función identidad**
  Si $f(x)=x$ entonces $f'(x)=1$

- Derivada de la función x^n
  Si $f(x)=x^n$ entonces $f'(x)=n \cdot x^{n-1}$

- Derivada de la **función logarítmica**
  Si $f(x)=\log_a x$ entonces $f'(x)=\frac{1}{x \ln a}$

  Si $f(x)=\ln x$ entonces $f'(x)=\frac{1}{x}$

- Derivada de la **función exponencial**
  Si $f(x)=a^x$ entonces $f'(x)=a^x\cdot\ln a$
  Si $f(x)=e^x$ entonces $f'(x)=e^x$

- Derivada de las **funciones trigonométricas**
  Si $f(x)=sen\,x$ entonces $f'(x)=\cos x$
  Si $f(x)=\cos x$ entonces $f'(x)=-sen\,x$
  Si $f(x)=tg\,x$ entonces $f'(x)=1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

5.5.- Operaciones con derivadas

- Derivada de una **suma o resta de funciones**: $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

  Ejemplo:

  $f(x)=x^5+x^2$ $\qquad f'(x)=5x^4+2x$

  $f(x)=\ln x+x^2$ $\qquad f'(x)=\frac{1}{x}+2x$

  $f(x)=sen\,x+\cos x$ $\qquad f'(x)=\cos x-sen\,x$

- Derivada del **producto de un número por una función** $[k\cdot f(x)]'=k\cdot f'(x)$

  Ejemplo:

  $f(x)=5x^4$ $\qquad f'(x)=5\cdot(4x^3)=20x^3$

- Derivada del **producto de dos funciones** $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

  Ejemplo:

  $f(x)=x^3\cdot sen\,x$ $\qquad f'(x)=3x^2\cdot sen\,x+x^3\cdot\cos x$

  $f(x)=(x^2+1)\cdot\ln x$ $\qquad f'(x)=2x\cdot\ln x+(x^2+1)\cdot\frac{1}{x}$

- Derivada del **cociente de funciones** $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

  Ejemplo:

  $f(x)=\frac{x}{sen\,x}$ $\qquad f'(x)=\frac{1\cdot sen\,x+x\cdot\cos x}{sen^2 x}$

  $f(x)=\frac{x}{x^2+5}$ $\qquad f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+5)+x\cdot 2x}{(x^2+5)^2}$

5.6.- Regla de la cadena

La derivada de la función f compuesta con g se obtiene utilizando la denominada **regla de la cadena** $[(g \circ f)(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Ejemplos:

- $h(x) = \cos(x^4) \rightarrow g(x) = \cos x$ y $f(x) = x^4$

  $h(x)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = sen(x^4) \cdot 4x^3$

- $h(x) = (3x+2)^5 \quad h(x)' = 5(3x+2)^4 \cdot 3$

- $h(x) = sen(\ln x) \quad h(x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$

- $h(x) = (\cos x)^6 \quad h(x)' = 6\cos^5 x \cdot (-sen\, x)$

Función	Derivada
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot lna$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{xlna}$
$f(x) = lnx$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = sen\, x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -sen\, x$
$f(x) = tg\, x$	$f'(x) = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$