

Unidade 5 - Contrastes de hipóteses

1 - Principais conceptos usados nos contraste de hipótese

Un **contraste de hipóteses** é o procedemento estadístico mediante o cal decidimos a aceptación ou rexeitamento dunha hipótese. Estas hipóteses fórmulanse mediante igualdades sobre parámetros estatísticos dunha poboación.

- Chamaremos **hipótese nula** e representámola por H_0 á hipótese que se formula e que queremos contrastar para ser aceptada ou rexeitada.
- Chámase **hipótese alternativa**, e denótase por H_1 , á hipótese contraria a H_0 , de tal forma que a aceptación da hipótese nula implica o rexeitamento da hipótese alternativa e viceversa.

Exemplo: a media de idade para o accidente coronario é superior aos 52 anos:

$$H_0: " \mu > 52 " \quad e \quad H_1: " \mu \leq 52 "$$

Exemplo: a proporción de faltas de pagamento é do 10%:

$$H_0: " p = 0,10 " \quad e \quad H_1: " p \neq 0,10 "$$

Exemplo: Un equipo médico afirma que a proporción de recién nacidos varóns nun determinado hospital é do 35 %. A hipótese nula sería $H_0: " p = 0,35 "$ mentres que a hipótese alternativa sería $H_1: " p \neq 0,35 "$.

- O test ou contraste de hipótese é o procedemento que me permite decidir se debemos aceptar ou rexeitar a hipótese nula en base aos datos obtidos dun mostreo. Debemos ter en conta o seguinte:
 - O test **non serve** para demostrar que H_0 é certa.
 - O test serve para decidir que, a partir dos datos da mostra, non pode rexeitarse H_0 , é dicir que é **aceptable supoñer que H_0 é certa**.
 - Igualmente serve tamén para **rexear H_0 e aceptar H_1** .
- Como en calquera inferencia estadística, podemos cometer erros ao inferir os resultados da mostra á poboación. Nos contrastes de hipóteses estes erros poden ser de dous tipos:

	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Acéptase H_0	Correcto	Erro tipo II
Rexeítase H_0	Erro tipo I	Correcto

Chamaremos **nivel de significación α** á probabilidade de cometer un erro de tipo I. É dicir:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{Rexear } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$$

Chamamos **nivel de confianza $1 - \alpha$** á $1 - \alpha = P(\text{Aceptar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$

2 - REXIÓN DE ACEPTACIÓN E REXEITAMENTO

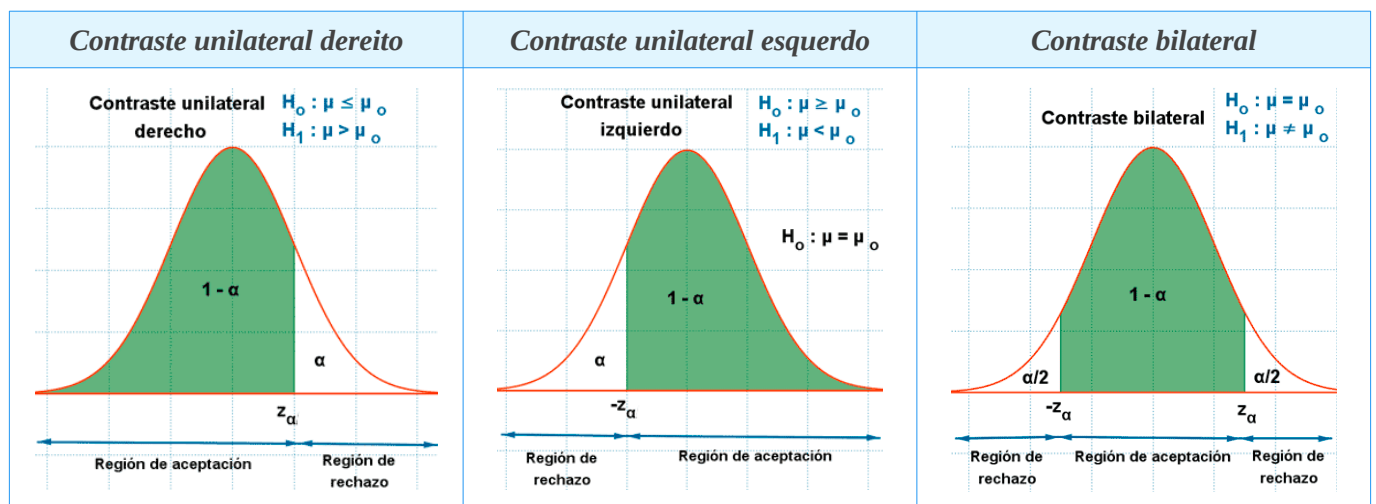
Unha vez que formulamos a hipótese nula e establecemos o nivel de confianza co que queremos traballar, é necesario atopar un intervalo de valores dentro do cal é lóxico que se poida atopar o parámetro mostral se é certa a hipótese nula, a este intervalo chámasele zona de aceptación.

<i>Acéptase H_0</i>	<i>Rexéitase H_0</i>
O parámetro SÍ está na rexión de aceptación	O parámetro NON está na rexión de aceptación
O parámetro NON está na rexión de rexeitamento	O parámetro SÍ está na rexión de rexeitamento

A zona de rexeitamento está formada polos valores do parámetro non aceptables se H_0 fose certa.

Polo tanto, se o valor do parámetro mostral pertence á rexión de rexeitamento decidimos rexeitar a hipótese nula H_0 e aceptar a hipótese alternativa H_1 .

Utilizamos tres tipos de hipóteses e os contrastes e rexións asociadas:



Exemplo: Trabállase coa hipótese de que un de cada 10 homes manifesta algún tipo de daltonismo. Elixidos 400 homes, 50 deles resultan ser daltónicos.

a) *Expón o contraste de hipótese correspondente para decidir si a hipótese de partida é certa.*

b) *Acha a zona de aceptación e rexeitamento da variable tipificada, cun nivel de significación do 5%, para decidir si a hipótese de partida é certa.*

a) $H_0: p = 0,1$ $H_1: p \neq 0,1$

b) *Estamos no caso contraste bilateral, imos calcular $z_{\alpha/2}$:*

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Rexión de aceptación: $(-1,96; 1,96)$

Rexión de rexeitamento: $(-\infty; -1,96) \cup (1,96; \infty)$

3 - ESTADÍSTICOS PARA OS CONTRASTES

Xa formulamos a hipótese nula, decidido o nivel de confianza co que queremos traballar e calculado a zona de aceptación. Agora temos que ver cando aceptamos unha hipótese ou cando a rexeitamos. Para iso usaremos os seguintes estadísticos (lembramos que **os estadísticos son parámetros da mostra**):

Estadístico para a media	Estadístico para a proporción
$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}}$

Entón se o noso estadístico está na zona de aceptación, podemos aceptar H_0 ; en cambio se o estadístico se atopa na zona de rexeitamento, rexeitamos H_0 .

	Hipótese nula H_0	Hipótese alternativa H_1	Estadístico	Tipo de contraste	Rexión de aceptación
Proporción	$H_0: p = p_0$	$H_1: p \neq p_0$	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \cdot (1 - p_0)}{n}}}$	Bilateral	$(-z_{\alpha/2}; z_{\alpha/2})$
	$H_0: p \leq p_0$	$H_1: p > p_0$		Unilateral dereito	$(-\infty; z_{\alpha})$
	$H_0: p \geq p_0$	$H_1: p < p_0$		Unilateral esquerdo	$(-z_{\alpha}; \infty)$
Media	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	Bilateral	$(-z_{\alpha/2}; z_{\alpha/2})$
	$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$		Unilateral dereito	$(-\infty; z_{\alpha})$
	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$		Unilateral esquerdo	$(-z_{\alpha}; \infty)$

Exemplo: Unha enquisa a 64 profesionais dunha institución revelou que o tempo medio de emprego en devandito campo era de 5 anos, cunha desviación típica de 4. Considerando un nivel de significación do 0.05. Formula un test para contrastar a hipótese de que o tempo medio de emprego dos profesionais desta institución está por baixo dos 6 anos.

- Empezamos formulando o contraste: $H_0: \mu \leq 6$ e $H_1: \mu > 6$
- Estamos no caso unilateral dereito, imos calcular z_{α}

$$P(Z \leq z_{\alpha}) = 1 - \alpha \Rightarrow P(Z \leq z_{\alpha}) = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha} = 1,645$$
- Entón a rexión de aceptación é: $RA = (-\infty; 1,645)$
- Imos agora a calcular o estadístico:
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{5 - 6}{\frac{4}{\sqrt{64}}} = -2$$
- Finalmente vemos si o estadístico está na rexión de aceptación: $-2 \in (-\infty; 1,645)$
- Entón aceptamos a hipótese nula, é dicir, aceptamos que a media sexa inferior a 6 anos

Exercicios

- 1.- Un fabricante garante a un laboratorio farmacéutico que as súas máquinas producen comprimidos cun diámetro medio non superior a 13 milímetros, que é o límite permitido polo laboratorio. Sábese que o diámetro dos comprimidos do fabricante segue unha distribución normal con desviación típica 0,6 milímetros. O laboratorio verifica unha mostra aleatoria de 100 comprimidos de devandito fabricante e obtén que o diámetro medio é 13,12 milímetros.
- Formula un test para contrastar que o diámetro medio dos comprimidos é o que afirma o fabricante, fronte a que é superior. A que conclusión chégase cun 5% de nivel de significación?
 - Calcula un intervalo do 89% de confianza para o diámetro medio dos comprimidos deste fabricante. Interpreta o intervalo obtido.
- 2.- Unha empresa multinacional que ten delegacións en Francia e España realiza un estudo sobre a satisfacción dos seus empregados no traballo. No estudo realizado na delegación francesa, sábese que o 45% dos empregados están satisfeitos co seu traballo. Na delegación española, dunha mostra aleatoria de 1600 empregados, 672 están satisfeitos co seu traballo.
- Formula un test para contrastar a hipótese de que a proporción de empregados satisfeitos na delegación española é polo menos a mesma que na delegación francesa, fronte a que é inferior. Que conclusión se obtén co 1% de nivel de significación?
 - Explica, no contexto do problema, en que consisten os erros de tipo I e tipo II.
- 3.- Un estudo revela que polo menos o 80% dos universitarios galegos practican algún deporte. Elíxese unha mostra aleatoria de 200 universitarios galegos e compróbase que 146 deles practican algún deporte.
- Formula un test para contrastar a afirmación do estudo fronte a que menos do 80% dos universitarios galegos practican algún deporte. A que conclusión chégase cun nivel de significación do 7%?
 - A partir da mostra dada, calcula un intervalo do 93% de confianza para a proporción de universitarios galegos que practican algún deporte. Interpreta o intervalo obtido.
- 4.- O peso das robalizas capturadas polos pesqueiros dun porto na costa galega distribúese normalmente con media μ e desviación estándar $\sigma=500$ gramos. Elíxese unha mostra aleatoria de 25 robalizas de devandito porto.
- Obtense o intervalo de confianza (2083, 2517) para a media μ . Calcula o peso medio das robalizas da mostra e o nivel de confianza co que se construíu o intervalo.
 - Utilizando o peso medio da mostra obtido no apartado (a), formula un test para contrastar que o peso medio das robalizas que se pescan alí é de polo menos 2500 gramos, como afirman os pescadores do lugar, fronte a que é inferior. A que conclusión chégase cun nivel de significación do 4%?
- 5.- A puntuación do coeficiente intelectual (CI) nun estudo sobre certa poboación de nenos segue unha distribución normal con media de 100 puntos e desviación típica de 16 puntos.

- a) Elíxese unha mostra aleatoria de 25 nenos desa poboación. Calcula a probabilidade de que a puntuación media do CI nesa mostra sexa superior a 108 puntos.
- b) Co fin de contrastar a puntuación media do CI nesa poboación coa dos nenos de certa Comunidade Autónoma (CA), selecciónase unha mostra aleatoria de 400 nenos da CA e obtense unha puntuación media de 101 puntos de CI. Supondo que se mantén a desviación típica, formula un test para contrastar que a puntuación media non supera os 100 puntos fronte a que é superior en dita CA. A que conclusión chégase cun 6% de nivel de significación?
- 6.-** Unha compañía de seguros afirma que polo menos o 90% das súas demandas resólvense en menos de trinta días. Para comprobar devandita afirmación, unha asociación de consumidores elixe unha mostra aleatoria de 120 demandas contra a compañía e atopa que 102 delas resolvéronse en menos de trinta días.
- a) Formula un test para contrastar a información da compañía de seguros fronte a que a porcentaxe de demandas que se resolven en menos de trinta días é menor ao 90%.
- b) A que conclusión chégase cun 5% de nivel de significación? Chégase á mesma conclusión se o nivel de significación é do 1%?
- 7.-** Nun estudo recente afírmase que hai un 5% de lesións de xeonllo entre futbolistas que xogan sobre céspede e calzan un novo modelo de botas de fútbol. De 250 futbolistas que xogan sobre céspede e calzan botas de fútbol convencionais, déronse 20 de tales lesións.
- a) Formula un test para contrastar a hipótese de que a proporción de lesións de xeonllo xogando con botas convencionais non supera ás de tales lesións xogando co novo modelo, fronte á hipótese de que si a supera.
- b) A que conclusión chégase cun 5% de nivel de significación? Chégase á mesma conclusión cun 1% de nivel de significación?
- 8.-** Nun estudo sociolóxico afirmábase que o tempo medio que os mozos están conectados a Internet non supera as 60 horas mensuais. Deséxase contrastar si actualmente segue en vigor ese estudo, e para iso entrevístanse 400 mozos seleccionados ao azar e obtense que o tempo medio é de 62 horas. Supomos que o tempo dedicado polos mozos a conectarse a Internet segue unha distribución normal, con desviación típica de 15 horas mensuais.
- a) Formula un test para contrastar a hipótese de que o tempo medio mensual dedicado actualmente polos mozos a conectarse a Internet é o mesmo que o que afirma o estudo, fronte á alternativa de que aumentou. A que conclusión chégase cun 2% de nivel de significación?
- b) Usando a información recollida na mostra, calcula o intervalo do 98% de confianza para o tempo medio mensual dedicado actualmente pola poboación de mozas a conectarse a Internet.
- 9.-** Sospéitase que o número de unidades que contén cada dose dun medicamento non chega ás 10000 que se indican no envase. Para comprobar que o contido medio das doses é o indicado tomamos, ao azar, 100 doses e determinamos o número de unidades de cada unha, obtendo de media 9940 unidades e de desviación típica 120 unidades. Que podemos dicir sobre a indicación do envase, para un nivel de confianza do 99,2%?

- 10.-** Os médicos chineses afirman que a acupuntura ten unha eficacia do 90% como anestesia para cirurxía. Un médico español observou que, de 49 pacientes aos que someteu a acupuntura, só 37 deles responderon ao efecto anestésico esperado. Rexeitaríase hipótese de que a acupuntura é eficaz no 90% dos casos a favor de que é eficaz en menos dun 90% dos casos, cun nivel de significación do 0.015?
- 11.-** Se ao lanzar 80 veces unha moeda obtéñense 45 caras, pódese aceptar que a moeda está trucada, cun nivel de significación do 3,9%?
- 12.-** Unha investigación sobre os servizos posvenda para clientes que adquiriron certa marca de automóbiles presenta os seguintes datos sobre unha mostra de 608 clientes: 371 están moi satisfeitos, fronte aos 45 que se declaran moi insatisfeitos. Pódese concluír que a proporción de clientes moi satisfeitos é superior ao 60%, cun nivel de significación do 5,4%?
- 13.-** Nun hospital observouse que os pacientes abusaban do servizo de urxencias, de forma que un 30% das consultas podían perfectamente esperar a concertar unha cita co médico de cabeceira, porque non eran realmente urxencias. Posto que esta situación retardaba o servizo, realizase unha campaña intensiva de concienciación. Transcorridos uns meses recolleuse información de 120 consultas ao servizo, das cales só 30 eran realmente urxencias.
- Hai persoal do hospital que defende que a campaña non mellorou a situación. Expón un test para contrastar esta hipótese fronte a que si mellorou. Se se conclúe que a situación non mellorou e realmente si o fixo, como se chama o erro cometido?
 - A que conclusión se chega no test exposto no apartado anterior cun nivel de significación do 1%?
- 14.-** Cando una máquina funciona correctamente produce pezas cuxa lonxitude segue unha lei normal de media 12 cm e desviación típica 1 cm. O encargado do control de calidade tomou unha mostra de 25 pezas, obtendo unha media de 11.5 cm.
- Contrasta a hipótese de que a máquina está funcionando correctamente, cun nivel de significación igual a 0.056.
 - Calcula o intervalo de confianza ao nivel do 90% para a lonxitude media das pezas que está producindo a máquina.
- 15.-** Os estudantes universitarios de certo país dedican ao estudo un número de horas semanais que segue unha distribución normal de media descoñecida e de desviación típica 7 horas. Nunha mostra de 200 estudantes obtívose unha media mostral de 30 horas de estudo semanal.
- Acha un intervalo de confianza ao 89% para o número de horas de estudo semanais dos estudantes universitarios do devandito país.
 - Poderíase afirmar que os estudantes universitarios dese país estudan menos de 35 horas semanais cun nivel de confianza do 94,57%?