

UD 3: MATEMÁTICAS FINANCIERAS

1.- INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA. JUSTIFICACIÓN

Nos adentramos en el mundo de la **educación financiera** que permite tomar decisiones sobre la importancia del dinero, el ahorro, los intereses a pagar o recibir cuando solicitas un préstamo, las cuotas que vas a pagar del mismo, las comisiones y el aumento o pérdida de valor que supone pasar el dinero de una a otra moneda.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) determina en su informe Pisa 2015 la importancia de la educación financiera para la juventud al prepararla para afrontar retos de índole financiero a lo largo de su vida.

Seguro que tienes algo de dinero ahorrado en una hucha, pero ¿qué harás cuando tengas mucho más?, ¿lo seguirás guardando en esa misma hucha? Tener educación financiera te permitirá sacar partido a tus ahorros. Es importante que aprendas a hacer crecer tu dinero y a controlar el que ya tienes.

Cuando tienes una cantidad de dinero puedes gastarlo o invertirlo para recuperarlo en un futuro más o menos próximo, pero ten siempre presente el principio básico de la preferencia por la liquidez: “Un euro hoy es mejor que un euro mañana”.



1.1.- EL INTERÉS

El **interés** es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo. Es decir, **es el beneficio que produce el dinero prestado**.

Para calcular intereses se deben entender diferentes conceptos:

- **Capital (C)**: Cantidad depositada en una entidad bancaria
- **C_i** : Capital inicial, el prestado al inicio del periodo
- **C_f** : Capital final, el recibido al final del periodo
- **Años (n) o (t)**: Periodo de tiempo
- **Tasa de interés (r)**: Porcentaje aplicado para calcular el beneficio que produce el dinero prestado

- **Interés (I)**: Cantidad de dinero producida por un capital de un interés determinado.

Vamos a estudiar el cálculo de dos tipos de interés: **interés simple e interés compuesto**.

1.2.- EL INTERÉS SIMPLE

En el **interés simple**, al capital C depositado se le aplica un tanto por ciento o rédito anualmente. En el interés simple, los intereses dependen sólo del capital principal (C), la tasa de interés (r) y el número de periodos (t). Por lo tanto, el cálculo del interés simple obtenido al cabo de varios años se realiza mediante la siguiente fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el tiempo que se deposita el capital son meses o días, el interés se calcula dividiendo la expresión anterior entre 12 meses o 360 días (año comercial).

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \quad \text{con } t \text{ en meses}$$

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} \quad \text{con } t \text{ en días}$$

A partir de un capital inicial (C_i) podemos llegar a calcular un capital final (C_f):

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot n\right)$$

En definitiva, el capital final se halla añadiendo al capital inicial los intereses:

$$C_f = C_i + I$$

Actividades resueltas

💡 Depositamos 4 000 € al 2 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 30 meses?

Calculamos el interés simple:

$$\begin{aligned} I &= \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \\ I &= \frac{4000 \cdot 2 \cdot 30}{1200} = 200 \text{ €} \end{aligned}$$

Sumamos capital e intereses:

$$4000 + 200 = 4200 \text{ €}$$



💡 Hallar el interés producido durante diez años, por un capital de 30.000€, al 6%. Calcula el capital final obtenido.

Calculamos el interés simple:

$$\begin{aligned} I &= \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \\ I &= \frac{30000 \cdot 6 \cdot 10}{100} = 18000 \text{ €} \end{aligned}$$

Calculamos el capital final:

$$C_f = C_i + i$$

$$C_f = 30000 + 18000 = 48000 \text{ €}$$

1.3.- EL INTERÉS COMPUUESTO

Desde otro punto de vista, el interés es el porcentaje que se aplica a un préstamo a lo largo de un tiempo, incrementando su cuantía a la hora de devolverlo. Este tipo de interés no se calcula como el interés **simple**, sino que se establece lo que se llama “**capitalización**”.

Hablamos de **intereses compuestos** cuando los diferentes intereses que se obtienen al finalizar un periodo, se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el siguiente periodo.

La fórmula empleada para calcular el interés compuesto es la siguiente:

$$C_f = C_i \cdot (1 + r) \quad (\text{siendo } r \text{ el interés en tanto por 1})$$

Sabiendo que la **capitalización compuesta** plantea que a medida que se van generando intereses, estos pasan a formar parte del capital inicial, y ese nuevo capital producirá intereses en los períodos sucesivos. Si se trata de un depósito bancario, el capital final se calculará siguiendo el procedimiento explicado que se resume en el siguiente cuadro:

C_i (capital inicial)	1 año	i (tanto por uno)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 años	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 años	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
.....
Al cabo de n años	n años		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Si hablamos de que una **tasa de interés anual es capitalizable mensualmente**, en la resolución de ejercicios tendremos que hallar el interés mensual:

$$\text{Interés mensual} = \frac{\text{Interés anual}}{12} \quad \text{Habrá que pasar también el tiempo de años a meses.}$$

Si hablamos de que una **tasa de interés anual es capitalizable diariamente**, en la resolución de ejercicios tendremos que hallar el interés diario:

$$\text{Interés diario} = \frac{\text{Interés anual}}{360} \quad \text{Habrá que pasar también el tiempo de años a meses.}$$

Actividades resueltas

- 💡 El capital inicial de un depósito asciende a 82 000 €. El tanto por ciento aplicado es el 3% a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$$

$$C_f = 82\,000 \cdot (1 + 0,03)^5 = 82\,000 \cdot 1,159... = 95\,060 \text{ €}$$



- 💡 Se depositan 7 000 en un banco que reconoce una tasa de interés del 36% anual, capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el capital final acumulado en cuatro años?

I anual = 0,36

Calculamos primero el interés mensual

$$\text{Interés mensual} = \frac{\text{Interés anual}}{12} = \frac{0,36}{12} = 0,03 \text{ mensual}$$

Calculamos también el tiempo

n = 4 años = 48 meses

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$$

$$C_f = 7\,000 \cdot (1 + 0,03)^{48} = 7\,000 \cdot 4,1322\dots = 28\,925,76 \text{ €}$$



2.- OPERACIONES FINANCIERAS

Una **operación financiera** consiste en sustituir uno o más capitales por otro u otros equivalentes en diferentes momentos de tiempo a través de una ley financiera. Por tanto, una operación financiera tiene las siguientes partes:

- Cuantía inicial
- Cuotas
- Intereses

A modo de ejemplo, cuando se concede un préstamo bancario a un cliente:

a) Esta operación supone para un **cliente** un cobro inicial (el importe del préstamo que se le concede) y unos pagos periódicos (las cuotas pactadas con el banco) a lo largo de todo el periodo de tiempo que dure la operación financiera.

b) Esta operación supone para el **banco** un pago inicial único (el importe del préstamo que se le concede) y unos cobros periódicos (las cuotas pactadas con el cliente).

Las cuotas son los pagos periódicos que se realizan durante el tiempo que dura una operación financiera. Existen dos tipos de cuotas:

- **Cuotas de amortización:** Cantidad dedicada al reembolso (amortización) de la cuantía prestada.
- **Cuotas de intereses:** De cada año o periodo.

2.1.- LOS PRÉSTAMOS

Un tipo de las operaciones financieras que existen son los **préstamos**. Los préstamos consisten en la entrega de una cantidad de dinero por parte de una persona llamada **prestamista** a otra llamada **prestatario** que se compromete a **reembolsarlo junto con los intereses generados** en un periodo de tiempo fijado.

Normalmente la devolución del préstamo se realiza usando la **capitalización compuesta** que ya hemos estudiado y la devolución del mismo se realiza con periodos equidistantes (meses, trimestres, años, etc.). Lo normal es hacerlo anualmente por eso los **reembolsos** que se van haciendo reciben el nombre de **anualidades**.

Los elementos que intervienen en una operación de préstamo son:

- **C₁** = Capital inicial prestado o importe del préstamo. También se llama deuda pendiente a comienzos del año uno.
- **n o t**= Duración del préstamo. Número de periodos que dura la operación
- **i** = Tipo de interés anual en tanto por uno que se aplica en la operación de préstamo.
- **a₁ , a₂ , ..., a_k , ..., a_n** = Cuantía de la anualidad. Es el cobro que recibe el prestamista correspondiente al pago que realiza el prestatario al final de cada periodo.
- **A₁ , A₂ , ..., A_k , ..., A_n** = Cuota de amortización de cada periodo. Es la cantidad dedicada al reembolso o amortización del importe de préstamo.
- **I₁, I₂, ... I_k, ... I_n** = Cuota de intereses de cada periodo.

Se tiene que cumplir que la anualidad de un año cualquiera a_k tiene que ser igual a la suma de la cuota de amortización de ese año A_k y la cuota de interés de ese año I_k.

$$a_k = A_k + I_k$$

- **M_k** = Cuantía del capital amortizado en los k primeros periodos.
- **C_k** = Deuda pendiente al principio del año (o periodo) k + 1 o capital pendiente de amortización al principio del periodo k + 1. También se denomina deuda pendiente al final del periodo k.

Se tiene que cumplir que la suma de las cuotas de amortización ha de ser igual al capital prestado.

$$C_i = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Hay distintas formas de cancelar o devolver el capital inicial, es lo que se llama “**sistema amortizativo**” o “**sistema de amortización**” del préstamo. Un sistema u otro depende de hacer diferentes hipótesis sobre las cuotas de interés, las cuotas de amortización u otras variables del préstamo.

a) **Préstamos amortizables con reembolso único**. El capital inicial y los intereses acordados se devuelven de una vez en la fecha que se haya convenido. Según cuando se paguen los intereses existen:

- **Reembolso único con pago único de intereses**: Al cancelar el préstamo se paga todo el capital y todos los intereses. Se resuelve usando la capitalización compuesta.
- **Reembolso único con pago periódico de intereses**: Al cancelar el préstamo se paga todo el capital, pero los intereses se pagan anualmente. Se llama método de amortización americano y se aplica para resolverlo la capitalización simple.

b) **Préstamos amortizables mediante una serie de pagos.** Cada pago incluye intereses y una cuota de amortización para cancelar la deuda. Hay 6 casos. De todos, vamos a estudiar el **método de amortización mediante cuotas de amortización constantes**.

2.2.- AMORTIZACIÓN MEDIANTE CUOTAS DE AMORTIZACIÓN CONSTANTES

En este método ocurre que en **cada periodo se amortiza la misma cantidad del capital**, es decir, **todas las cuotas de amortización son iguales** ($A_1 = A_2 = A_3 \dots$). El total de las cuotas será igual al total del importe del préstamo (C_i). Por tanto, $C_i = n \cdot A$, si despejamos, obtenemos la fórmula de la cuota de amortización constante:

$$A = \frac{C_i}{n}$$

Para resolver un préstamo se realiza un cuadro de amortización con los siguientes elementos:

- ✓ **A** = Cuotas de amortización
- ✓ **M_k** = Total amortizado (la suma de las cuotas de amortización en cada momento)
- ✓ **C_k** = Capital vivo o deuda pendiente en un momento determinado (se obtiene con la diferencia entre el capital inicial C_i y el total que se ha amortizado en ese momento).

$$C_k = C_i - M_k .$$

- ✓ **I_k** = Cuota de intereses. El interés de un periodo se obtiene multiplicando el tanto unitario del interés (i), por la deuda pendiente al comienzo de ese periodo o al final del periodo anterior:

$$I_k = C_{k-1} \cdot i$$

- ✓ **a_k** = anualidad. Es la suma de la cuota de amortización constante y los intereses de ese periodo: $a_k = A + I_k .$

Veámoslo con un ejemplo:

Un banco concede un préstamo por valor de 20 000 € para ser amortizado en 8 años mediante cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 9 %. Haz el cuadro de amortización. C_i = 20 000 de euros; n = 8 años; A = constante; i = 0,09

n	a _k	I _k	A _k	M _k	C _k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZATIVOS	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
0	-	-	-	-	20 000
1	4 300	1 800	2 500	2 500	17 500
2	4 075	1 575	2 500	5 000	15 000
3	3 850	1 350	2 500	7 500	12 500
4	3 625	1 125	2 500	10 000	10 000
5	3 400	900	2 500	12 500	7 500
6	3 175	675	2 500	15 000	5 000
7	2 950	450	2 500	17 500	2 500
8	2 725	225	2 500	20 000	-

3.- COMISIONES BANCARIAS

Una **comisión bancaria** es la cantidad de dinero que una entidad bancaria cobra a sus clientes por prestarles sus servicios (tener una cuenta corriente, disponer de tarjetas de débito o crédito, invertir en acciones, contratar una hipoteca, hacer trasferencias, etc.) Cada entidad bancaria puede cobrar la cuantía de comisiones bancarias que más oportuno considere. Los clientes se encargan de realizar un estudio de mercado para saber qué entidad bancaria les da las mejores condiciones y así decidir a cuál le confía su dinero o con cual realiza sus operaciones financieras.

Sólo en algún caso puntual, como adelantar el pago de una hipoteca, el banco no puede cobrar las comisiones que decida, sino que **la ley limita dichas cantidades**. Los tipos de comisiones existentes más comunes son los siguientes:

- **Comisión de mantenimiento.** Aplicada por el banco por mantener una cuenta abierta.
- **Comisión de administración.** Aplicada cada vez que un cliente realiza un movimiento.
- **Comisión por transferencias.** Aplicada cada vez que se envía dinero a otra cuenta.
- **Comisión de emisión o mantenimiento de las tarjetas.** Aplicada por disponer de una tarjeta.
- **Comisiones por uso de tarjetas en el extranjero.** Aplicada por operar fuera de España con una tarjeta.
- **Comisión de descubierto.** Aplicada por el banco por estar en números rojos.
- **Comisión por retiradas de efectivo en cajeros.** Aplicada por retirar efectivo en cajeros de otra entidad.
- **Comisión por uso de oficinas.** Aplicada por operar en la ventanilla de las oficinas bancarias.

Excepto al pagar en efectivo, el resto de los medios de pago generalmente presentan **comisiones**, aunque es cierto que las mismas se pueden negociar con las entidades con las que se realiza el acuerdo.

Los bancos tienen por finalidad obtener rendimiento financiero por cualquier operación y el pago de importes es una de ellas. Las transferencias incluyen comisión sólo si las deseamos inmediatas. La mayoría de los bancos cobran comisiones por: realizar **transferencias, emitir cheques, pagar contra reembolso, financiar cantidades...**

Actividades resueltas

💡 La plataforma de pago PayPal cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:

- Si factura menos de 2 500 € al mes, cobrará 3,4% + 0,35 € por cada transacción.

Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a PayPal de comisiones si factura 325 € realizando 5 transacciones.

Calculamos primero el porcentaje de comisiones:

$$325 \cdot 0,034 = 11,05 \text{ €}$$

Después calculamos el importe cobrado por el total de las transacciones:

$$5 \cdot 0,35 = 1,75 \text{ €}$$

Finalmente calculamos el importe total cobrado por PayPal a la empresa:

Importe total cobrado = Total de comisiones cobradas + total por transacciones

$$\text{Importe total cobrado} = 11,05 + 1,75 = 12,8 \text{ €}$$

4.- DIVISAS: CONCEPTO Y TIPOS

Las **unidades monetarias diferentes** a la que nosotros utilizamos se denominan **divisas**. Entre distintas **monedas se establecen tipos de cambio que varían constantemente**.

En la Unión Europea, la unidad monetaria que se emplea es el Euro se representa por €. Para poder cambiar de euros a otra divisa, se utilizan factores de conversión, se redondea el resultado si hace falta.

Si una empresa estadounidense vende a un español un coche, querrá que se le pague en dólares. Si la empresa española vende aceite a la estadounidense querrá que se le pague en euros. Por tanto, necesitamos un mercado en el que el español pueda conseguir dólares y el estadounidense pueda conseguir euros. El lugar donde puedo cambiar monedas de distintos países es el **MERCADO DE DIVISAS**. El precio de la divisa es el **tipo de cambio**. El tipo cambio (precio de las monedas) varía todos los días, por lo tanto, con un euro cada día podremos obtener más o menos cantidad de otra divisa, por ejemplo, dólares.

El tipo de cambio diario queda determinado por **la ley de la oferta y la demanda**. Si se demanda mucho de una divisa, su precio sube. Debemos diferenciar por tanto la **apreciación** de **la depreciación** del tipo de cambio.

Sabiendo que el tipo de cambio relaciona dos monedas, podemos expresarlo de dos maneras equivalentes. En el caso del euro y el dólar sería así:

- **Tipo de cambio €/\$**: Es el número de euros que hay que dar para obtener un dólar.

- **Tipo de cambio \$/€**: Es el número de dólares que hay que dar para obtener un euro.

A lo largo de la unidad cogeremos la **definición del BCE**, es decir, que el tipo de cambio sea **\$/€**.