1. Función continua en un punto

➤ Función continua en un punto

Una función f es **continua en un punto** a si cumple las tres condiciones siguientes:

a) Existe el límite (finito) de la función $f(x)$ en $x = a$.

b) La función está definida en $x = a$; es decir, existe $f(a)$.

c) Los dos valores anteriores coinciden.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Si una función no es continua en un punto a, diremos que es **discontinua** en dicho punto.

2. Continuidad lateral

- Continuidad lateral.

Una función es **continua por la derecha en un punto** a si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

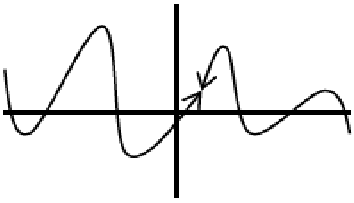
Una función es **continua por la izquierda en un punto** a si existe el límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

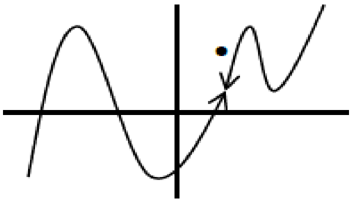
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

3. Tipos de discontinuidades

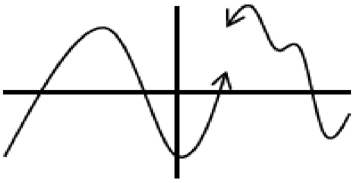
- Tipos de discontinuidades

a) Una función tiene una discontinuidad evitable en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo (o este no existe).
El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama valor verdadero de la función en el mismo.

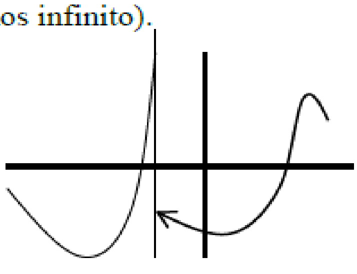


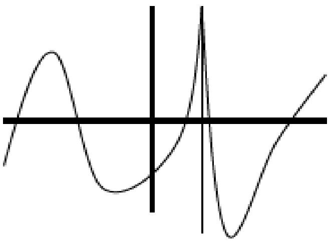


b) Una función tiene una discontinuidad de salto en un punto cuando existen los límites laterales (finitos) en él y son distintos.



c) Una función tiene una discontinuidad infinita en un punto si alguno de los límites laterales es infinito (o menos infinito).





4. Continuidad en un intervalo

➢ Continuidad en un intervalo

Una función es **continua en un intervalo abierto** (a,b) si lo es en cada uno de sus puntos.
Una función es **continua en un intervalo cerrado** $[a,b]$ si lo es todos los puntos de (a,b) y además es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

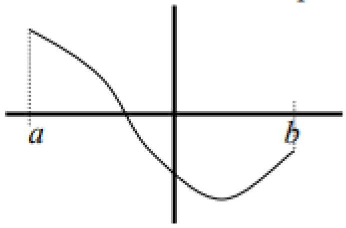
5. Teorema de Bolzano

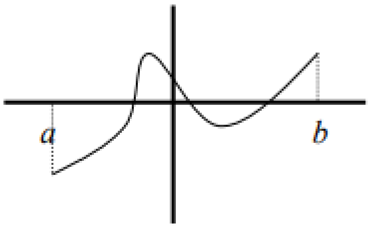
➢ Teorema de Bolzano

"Si una función es continua en un intervalo $[a,b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto interior c del intervalo en el que $f(c) = 0$."

- Interpretación geométrica del Teorema de Bolzano

Si una gráfica continua pasa de ser positiva a ser negativa (o viceversa), entonces atraviesa el eje de abscisas en al menos un punto.





El Teorema de Bolzano es muy práctico para probar que determinadas ecuaciones poseen solución.

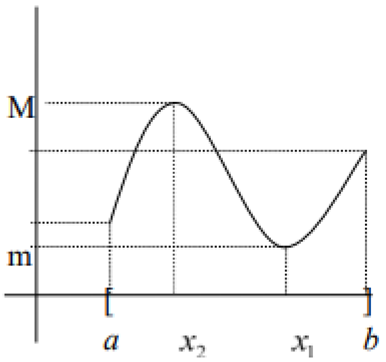
6. Teorema de Weirstrass

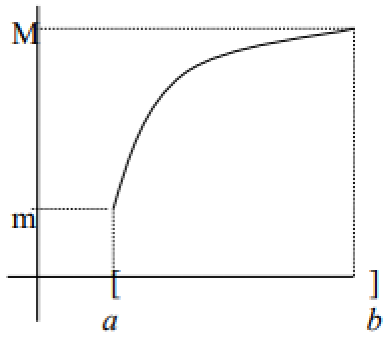
➢ Teorema de Weierstrass

"Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m en ese intervalo".

- Interpretación geométrica del Teorema de Weierstrass

Si una función es continua en $[a,b]$, los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ pueden unirse por medio de una curva continua. Así, se obtienen dos puntos x_1 y x_2 del intervalo $[a,b]$ en los que la función toma, respectivamente, el menor y el mayor valor posible dentro de ese intervalo.





7. Derivada en un punto

- Definición de tasa de variación instantánea o derivada en un punto.

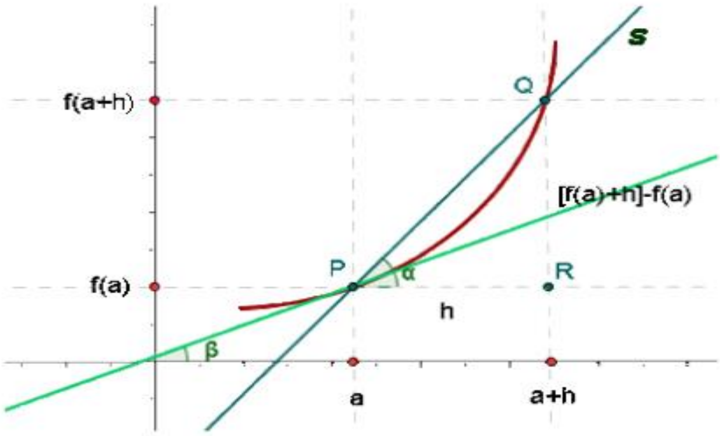
Se llama derivada de la función *f* en el punto *a* al siguiente límite, si es que existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si el límite existe se dice que la función es derivable en el punto *a*. La derivada de una función en un punto es un número real.

- Interpretación geométrica de la derivada.

"La derivada de una función *f* en un punto *a* es igual a la pendiente de la recta tangente a la función *f* en ese punto *a*."



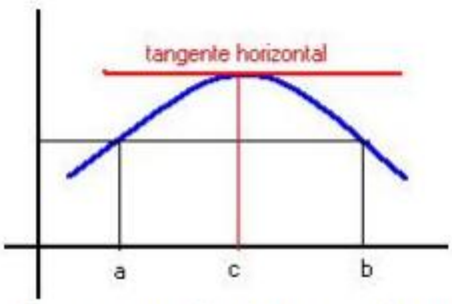
8. Teorema de Rolle

- Teorema de Rolle
  - Enunciado

"Si una función *f* es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el abierto (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto *c* del intervalo (a,b) tal que $f'(c) = 0$"

  - Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el abierto (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto *c* en el interior del intervalo (a,b) en el cual la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente cero, es decir, es paralela al eje de abscisas.



El Teorema de Rolle se suele utilizar en combinación con el Teorema de Bolzano para estimar o incluso conocer con exactitud el número de soluciones de una ecuación.

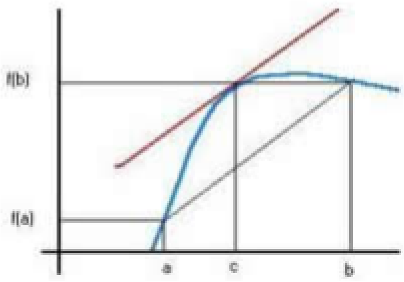
9. Teorema del valor medio del cálculo diferencial

➢ Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (o de los Incrementos Finitos)

Enunciado

"Si una función es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b), entonces existe un punto c del intervalo (a,b) tal que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, o lo que es lo mismo, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$"

- Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial



Si una función es continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el abierto (a,b), entonces en algún punto del interior del intervalo la tangente a la gráfica es paralela a la cuerda, recta que une a los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$, ya que la pendiente de esta recta es $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.