1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Definición: Se llama **derivada de una función f(x) en un punto x=a**, y se representa $f'(a) = Df(a) = \frac{df}{dx}(a)$, al siguiente límite (si existe):

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

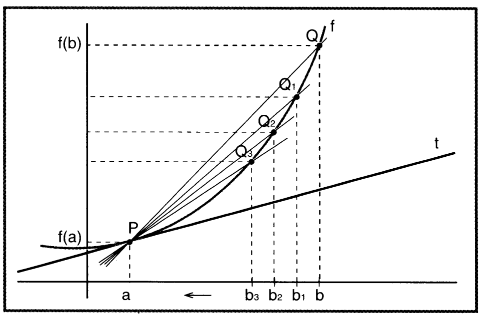
Ejemplo: Calcula *f* '(2), utilizando la definición de derivada, siendo: $f(x) = 2x^2 + 5x$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^2+5(2+h)-18}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(4+4h+h^2)+10+5h-18}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8+8h+2h^2+10+5h-18}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+13h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2h+13)}{h} = \lim_{h\to 0} (2h+13) = 13$$

Interpretación geométrica:

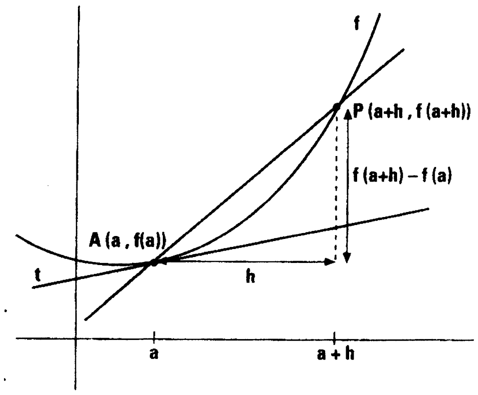
"La recta tangente a una curva en un punto P(a, f(a)) es la posición límite hacia la que tienden las rectas secantes que pasan por ese punto P y por otro punto Q de la curva, cuando el segundo punto Q se acerca a P".



Para poder hallar la ecuación de esa recta tangente en el punto de coordenadas A(a, f(a)), si la escribimos en forma punto-pendiente:

y – f(a) = m(x – a) necesitamos saber el valor de la pendiente m.

Para ello, *si tenemos en cuenta que la recta tangente es la posición límite de las secantes, entonces su pendiente será el límite de las pendientes de las secantes*, con lo que:



$$m = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f\,'(a)$$

Por tanto, la derivada de una función f(x) en un punto "a" puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (a, f(a)).

Interpretación física:

El cálculo de derivadas o cálculo diferencial surge en el siglo XVII al tratar de resolver una serie de problemas que aparecían en las Matemáticas y en la Física, como son (entre otros):

- la definición de velocidad
- la determinación de la recta tangente a una curva en un punto dado.
- el cálculo de los valores máximos y mínimos que alcanza una función.

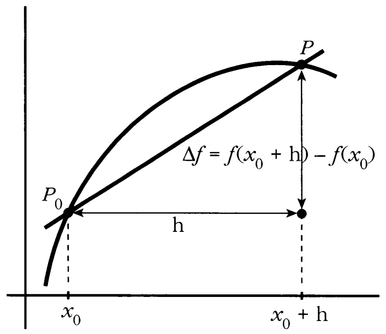
En estos y otros problemas similares de lo que se trata, en el fondo, es de estudiar, de medir y cuantificar, la variación de un determinado fenómeno, la rapidez con que se produce un cambio.

La **tasa de variación media (TVM)**, o cociente incremental, nos da una primera idea de la rapidez con que varía un fenómeno en un intervalo determinado. Se define como el cociente:

$$TVM\left[a,b\right]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir, nos dice cuanto variaría la función por cada unidad de variación de la variable independiente dentro del intervalo considerado suponiendo que esa variación fuese uniforme en todo el intervalo.

La tasa de variación media coincide, evidentemente, con el valor de la pendiente de la recta que une los puntos de coordenadas (x_0, $f(x_0)$) y ($x_0 + h$, $f(x_0 + h)$).



$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ es la pendiente de P_0P

El valor obtenido al calcular la T.V.M. de una función en un intervalo determinado no quiere decir que en todo el intervalo se haya mantenido ese porcentaje de variación; de hecho, no suele ser así. Además, lo que interesa normalmente es saber lo que ocurre en un punto determinado: la velocidad en un instante dado, la trayectoria que seguirá un disco al ser lanzado, el punto en que un proyectil alcanza su máxima altura, etc.

Por tanto, el problema es estudiar **la variación instantánea (T.V.I.)** de la función en un punto determinado x_0. Para ello lo que haremos será estudiar su variación en intervalos [x_0, x] (o [x, x_0]) cada vez mas pequeños haciendo que x se aproxime a x_0. En el momento en que x coincida con x_0 la T.V.M. se convertirá en la tasa de variación instantánea que es lo que realmente nos interesa.

Pero el problema es que en el cociente que define la T.V.M. al llegar a coincidir x con x_0 el denominador valdría 0. Por ello se define la tasa de variación instantánea como:

$$TVI(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad = \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Y este límite es lo que hemos llamado derivada de la función f en el punto x_0.

Por tanto, la derivada puede interpretarse también como la tasa de variación instantánea, es decir, como la razón de cambio instantánea de una función.

Ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de una función en un punto.

Como vimos en la interpretación geométrica de la derivada, ésta es la pendiente de la recta tangente a la función (realmente a la gráfica de la función) en el punto de coordenadas $P(a, f(a))$, por lo que la **ecuación de la recta tangente** será:

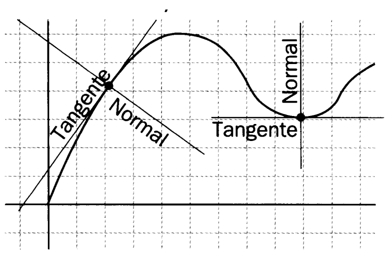
$$\boxed{y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

La normal a una curva en un punto $P(a, f(a))$ es la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Si la pendiente de la tangente es $m_t = f'(a)$, la pendiente de la normal será $m_N = -\frac{1}{f'(a)}$ (ya que el producto de ambas debía ser -1) y **la ecuación de la recta normal** nos viene dada por:

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)}$$

Si f ´(a) = 0, la recta tangente será horizontal y de ecuación y = f(a). En ese caso la recta normal es vertical y de ecuación x = a.



2. DERIVADAS LATERALES.

Como una derivada es un límite, para que exista, han de existir y coincidir los límites laterales que, en este caso, se llaman derivadas laterales de la función en el punto:

Derivada por la izquierda.

Se llama derivada por la izquierda de la función *f* en el punto *x* = *a* al siguiente límite, si es que existe:

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{o} \qquad f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivada por la derecha:

Se llama derivada por la derecha de la función ***f*** en el punto *x* = *a* al siguiente límite, si es que existe:

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{o} \qquad f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Evidentemente, **una función es derivable en un punto sí, y sólo sí, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales son iguales**.

- ⇨ Si las derivadas laterales existen pero no coinciden, se debe a que la función tiene un ***punto anguloso***.

Este es el caso de la función $f(x) = |x|$ que en el punto *x* = 0 tiene por derivadas laterales $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = +1$.

Relación entre continuidad y derivabilidad.

"Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto"

3. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

Hasta ahora sólo hemos estudiado la derivada de una función en un punto y el resultado es un número real por tratarse de un límite.

Si una función *f* es derivable en un subconjunto D' de su dominio *D* ($D' \subseteq D$), podemos definir una nueva función que asocie a cada elemento de D' su derivada en ese punto:

Esta nueva **función que asigna a cada elemento su derivada correspondiente** recibe el nombre de **FUNCIÓN DERIVADA** o, simplemente, **DERIVADA** y se representa por f ´(x).

Derivadas sucesivas

Ya hemos visto que la derivada de una función en un punto, si existe, es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto. Si esto se generaliza a todos los puntos, hemos visto que obtenemos la **función derivada f´(x)**.

Si a esta función (derivada primera) la volvemos a derivar, se obtiene otra función derivada, llamada **derivada segunda ($f''_{(x)}$).**

A partir de la función derivada primera se puede definir, si existe, también su derivada que recibe el nombre de ***derivada segunda*** y se representa por f''.

Análogamente se definirían la derivada tercera, cuarta, quinta,.., n-ésima, y se representarían por $f'''(x),\ f^{(4}(x),\ f^{(5}(x),\ \ldots,\ f^{(n}(x)$

Otras formas de representar las derivadas son:

$$Df,\ D^2 f,\ D^3 f,\ \ldots,\ D^n f$$

$$\frac{df}{dx} = f',\ \frac{d^2 f}{dx^2} = f'',\ \ldots,\ \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n}$$

4. REGLAS DE DERIVACIÓN. REGLA DE LA CADENA.

Obtener la expresión de la función derivada de una función dada implica calcular el límite que define a esa función derivada en un punto genérico usando la expresión que define a la función original; es decir, calcular

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pero calcular ese límite cada vez que deseemos obtener la derivada de una función resulta bastante engorroso y, por ello, se obtienen (aunque no las demostraremos) unas expresiones o fórmulas generales que permiten obtener fácilmente la derivada de cualquier función. Esas fórmulas o reglas de derivación son las siguientes:

Reglas de Derivación:

OPERACIONES	***REGLA***
SUMA Y DIFERENCIA	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
PRODUCTO	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
COCIENTE	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
PRODUCTO POR UN Nº	$(k.f)' = k.f'$
COMPOSICIÓN	$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Derivadas de Funciones Elementales:

TIPOS	FORMAS	
	SIMPLES	COMPUESTAS
Constante: $f(x)=k$	$f'(x)=0$	
F. Identidad: $f(x)=x$	$f'(x)=1$	
Potencial	$Dx^n=n.x^{n-1}$	$Df^n=n.f^{n-1}.f'$
Logarítmico	$D(Lx)=\frac{1}{x}$	$D(Lf)=\frac{f'}{f}$
	$D\log_a x=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$	$D\log_a f=\frac{f'}{f}\cdot\log_a e$
Exponencial	$D(e^x)=e^x$	$D(e^f)=f'.e^f$
	$D(a^x)=a^x.La$	$D(a^f)=f'.a^f.La$
Potencial-exponencial	$D\ f^g=g.f^{g-1}.f'+g'.f^g.Lf$	
Raíz Cuadrada	$D\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\sqrt{f}=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
Seno	$D\operatorname{sen}x=\cos x$	$D\operatorname{sen}f=f'\cdot\cos f$
Coseno	$D\cos x=-\operatorname{sen}x$	$D\cos f=-f'\operatorname{sen}f$
Tangente	$D\operatorname{tg}x=1+\operatorname{tg}^2x$	$D\operatorname{tg}f=f'.(1+\operatorname{tg}^2f)$
	$D\operatorname{tg}x=\sec^2x$	$D\operatorname{tg}f=f'.\sec^2f$
	$D\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos^2x}$	$D\operatorname{tg}f=\frac{f'}{\cos^2f}$
Cotangente	$D\operatorname{ctg}x=-(1+\operatorname{ctg}^2x)$	$D\operatorname{ctg}f=-f'.(1+\operatorname{ctg}^2f)$
	$D\operatorname{ctg}x=-\operatorname{cosec}^2x$	$D\operatorname{ctg}f=-f'\cdot\operatorname{cosec}^2f$
	$D\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}$	$D\operatorname{ctg}f=-\frac{f'}{\operatorname{sen}^2f}$

DERIVADA DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. REGLA DE LA CADENA

Dadas dos funciones f y g, si la función f es derivable en un punto x y la función g es derivable en el punto f(x), la función compuesta gBf es derivable en el punto x y su derivada vale

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$