La regla de L´Hôpital la utilizamos para resolver límites con indeterminaciones del tipo **0/0 y ∞/∞**. El resto de indeterminaciones **∞−∞, 0· ∞, 1$^{\infty}$, ∞^{0}, 0^0** las trasformamos en 0/0 o en ∞/∞ y las resolvemos también por L´Hôpital.

Indeterminación cero entre cero 0/0

Regla de L`Hôpital

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ y existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

entonces se cumple que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

a puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$

Ejercicios resueltos

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=(\text{L`Hôpital})=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=(\text{L`Hôpital})=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-\operatorname{sen} x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-\operatorname{sen} x}=\left(\frac{0}{0}\right)=(\text{L`Hôpital})=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos x}=$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)=(\text{L`Hôpital})=\lim_{x\to 0}\frac{12x}{\operatorname{sen} x}=\left(\frac{0}{0}\right)=(\text{L`Hôpital})=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{12}{\cos x}=\frac{12}{1}=12$$

Indeterminación infinito entre infinito ∞/∞

Regla de L`Hôpital

Si $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\infty,\quad \lim\limits_{x\to a}|g(x)|=\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

entonces se cumple que $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

a puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(\text{L`Hôpital})=\lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{2x}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

Indeterminación ∞−∞

Transformamos la expresión $\infty - \infty$ en $\frac{0}{0}$ y aplicamos L`Hôpital.

Ejemplos

a) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right] = \infty - \infty$

Para transformar la indeterminación $\infty - \infty$ en $\frac{0}{0}$

reducimos a común denominador.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right] = \infty - \infty = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x - x}{x \cdot \operatorname{sen} x}\right] = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$(\text{L`Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (\text{L`Hôpital})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0$$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right) = \infty - \infty$

Para transformar la indeterminación $\infty - \infty$ en $\frac{0}{0}$

Sustituimos la cotangente de x por $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y

reducimos a común denominador.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \cdot \operatorname{sen} x}\right) =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = (\text{L`Hôpital}) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\right) == \left(\frac{0}{0}\right) = (\text{L`Hôpital}) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left[\ln(x+1) - \ln x\right] = \infty - \infty$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos.

La resta de logaritmos la pasamos a cociente.

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\ln(x+1) - \ln x\right] = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$$

Indeterminación 0·∞

La transformamos en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ reescribiendo

$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$, o $f \cdot g = \frac{g}{1/f}$ según convenga.

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0 \cdot \infty$$

Reescribimos $f \cdot g = \frac{g}{1/f}$

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (\text{L`Hôpital}) =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Ejercicios:

Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}.$$ **(1/2)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x + 4x - 1}{3x}$$

(4/3)

Calcular

1. Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

(1)

2. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

(1/3)

3. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

(1/6)

Indeterminaciones de tipo ⇒ 1^∞, ∞^0, 0^0

Para resolver estas indeterminaciones tomamos logaritmos neperianos.

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base ⇒ $\ln a^b = b \ln a$. De esta forma conseguimos bajar el exponente y resolver el límite.

Indeterminación 1^∞

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^\infty$$

- Suponemos que la solución del límite es A

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

- Tomamos logaritmos neperianos en ambos miembros.

$$\ln A = \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

- Aplicamos el logaritmo neperiano de una potencia que es igual al exponente por el logaritmo neperiano de la base de la potencia.

$$\boxed{\ln a^b = b \cdot \ln a}$$

$$\ln A = \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \overbrace{(1+2\cos x)}^{a}{}^{\overbrace{\frac{1}{\cos x}}^{b}}$$

$$\ln A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x}\right) \cdot \ln(1+2\cos x)$$

$$\ln A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}$$

- Calculamos el límite cuando $x \to \frac{\pi}{2}$ y resolvemos la indeterminación resultante.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (\text{L`Hôpital}) =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-2\,\text{sen}\,x}{1+2\cos x}}{-\text{sen}\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+2\cos x} = 2$$

- Definición de logaritmo para calcular A

$$\ln A = 2 \Leftrightarrow e^2 = A$$

Solución: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^2$

Indeterminación 0^0

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0$$

- Aplicamos logaritmos en los dos lados para bajar la x del exponente.

$$A = \lim_{x\to 0^+} x^x \quad \longrightarrow \quad \ln A = \lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln x)$$

- Aplicamos el límite cuando $x \longrightarrow 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln x) = (0 \cdot \infty)$$

- Transformamos la indeterminación $0 \cdot \infty$ en $\frac{\infty}{\infty}$ y resolvemos

$$\lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$(\text{L`Hôpital}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

- Calculamos A aplicando la definición de logaritmo.

$$\ln A = 0 \iff e^0 = A \qquad \longrightarrow A = 1$$

$$A = \lim_{x\to 0^+} x^x \quad \longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

Indeterminación ∞^0

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x} = \infty^0$$

Aplicamos lo mismo que hicimos para resolver 0^0

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} \tan x \cdot \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \tan x \; (\ln 1 - \ln x^2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x \; (-2\ln x) = -2 \lim_{x\to 0^+} \tan x \; (\ln x) = (0 \cdot \infty)$$

$$-2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\tan x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (\text{L`Hôpital}) =$$

$$-2 \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/\text{sen}^2 x} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}^2 x}{x} =$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) = (\text{L`Hôpital}) = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{2\,\text{sen}x \cos x}{1} = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\ln A = 0 \iff e^0 = A \qquad \longrightarrow A = 1$$

$$\text{Solución: } \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x} = 1$$