UD 2: PROPORCIONALIDAD, TASAS Y NÚMEROS ÍNDICE

1.- RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

Magnitud: es una cualidad o característica de un objeto que se puede medir.

Ejemplo: longitud, masa, volumen, nº alumnos,…

Las magnitudes se expresan en unidades de medida

Ejemplo: lm, km, g, kg, l, n.º personas,...

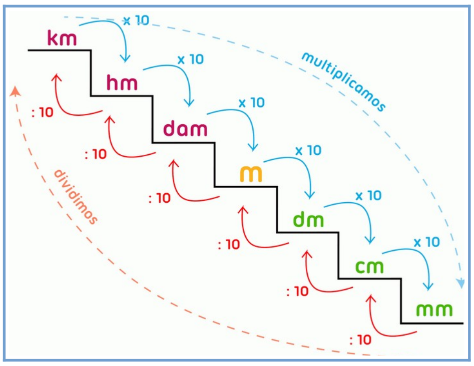
1.1- Sistema métrico decimal

El **sistema métrico decimal** es un conjunto de unidades de medida para las magnitudes básicas

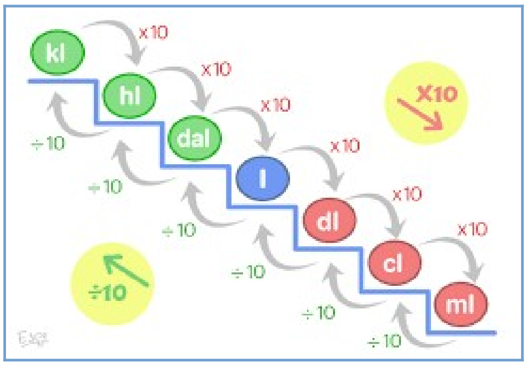
Magnitud	Unidad Fundamental	Múltiplos	Submúltiplos
Longitud	El metro	Kilómetro, hectómetro, decámetro	Decímetro, centímetro, milímetro
Capacidad	El litro	Kilolitro, hectolitro, decalitro	Decilitro, centilitro, mililitro
Peso	El gramo	Kilogramo, hectogramo, decagramo	Decigramo, centigramo, miligramo

1.2- Cambios de unidades

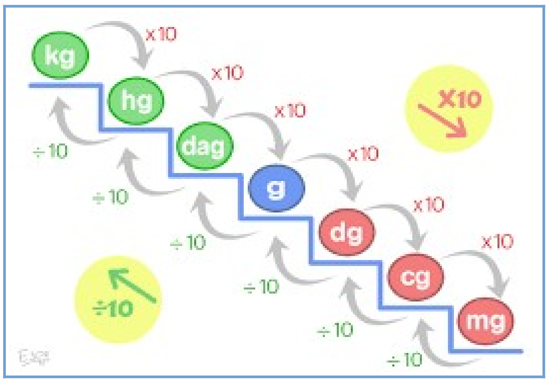
Longitud



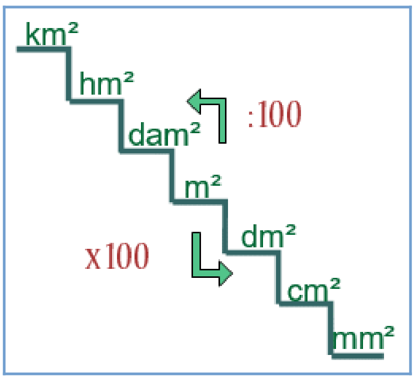
Capacidad



Peso



Superficie



2.- RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

La **razón** de los números a y b es la fracción $\frac{a}{b}$

Una **proporción** es la igualdad de dos razones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y se lee a es a b como c es a d.

Para calcular el término desconocido en una proporción, se aplica esta propiedad de las fracciones equivalentes $\frac{a}{b}=\frac{c}{x} \rightarrow a \cdot x=b \cdot c \rightarrow x=\frac{b \cdot c}{a}$

- **Relación de proporcionalidad directa:**

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una cierta cantidad de uno de ellos por un n.º , la cantidad correspondiente de la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Ejemplo:

N.º Cajas	1	2	3	4	5
Coste	6	12	18	24	30

La **constante de proporcionalidad** es el cociente entre dos valores correspondientes, siempre es el mismo.

Ejemplo: 6:1=6, 12:2=6, 18:3=6, 24:4=6, 30:5=6.

- **Relación de proporcionalidad inversa:**

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una cierta cantidad de uno de ellos por un n.º, la cantidad correspondiente de la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

Ejemplo:

N.º perros	1	2	3	5	6
N.º días dura comida	30	15	10	6	5

La **constante de proporcionalidad** es el producto entre dos valores correspondientes, siempre es el mismo.

Ejemplo: 30·1=30, 2·15=30, 3·10=30, 5·6=30, 6·5=30

3.- PORCENTAJES

- El **% o porcentaje** de un número significa que si dividimos en 100 partes ese número, cogemos el % indicado.

  $9\%=\frac{9}{100}$ → cojo 9 de cada 100

- **Cálculo de porcentajes:** Para calcular el % de una cantidad, se multiplica la cantidad por el % y se divide entre 100

  $20\%\ de\ 50=\frac{20 \cdot 50}{100}=10$

- **Relación entre porcentajes y proporciones:** Un % expresa la relación de proporcionalidad existente entre la parte que se toma de un total y el total.
  Ejemplo: El 20% de las 180 habitaciones de un hotel están vacías ¿cuántas habitaciones hay vacías?
  Total hab. Hab. vacías
  100 ———— 20 $\frac{100}{180}=\frac{20}{x}$ $x=\frac{180\cdot 20}{100}=36$ o también $20\%\, de\, 180=36$
  180 ———— x

- **Porcentajes fracciones y números decimales:** Para pasar de **porcentaje a fracción**, basta con dividir por 100; para pasar de **fracción a decimal**, hacemos la división.
  $35\%=\frac{35}{100}=0{,}35$

4.- PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

- **Reducción a la unidad:**
  3 botes de mermelada pesan 600gr ¿cuánto pesan 4 botes?
  n.º botes peso
  3 ———— 600gr
  1 ———— 600 : 3 = 200gr
  4 ———— 100 · 4= 800 gr

- **Fracciones equivalentes**

N.º botes	3	600
Peso (gr)	4	?

  $\frac{3}{4}=\frac{600}{?}$ → Para pasar de 3 a 600, multiplicamos por 200, entonces 4·200=800.

- **Reglas de tres directa**
  n.º botes peso
  3 ———— 600 $\frac{3}{4}=\frac{600}{x}\Rightarrow x=\frac{4\cdot 600}{3}=800$
  4 ———— x

5.- PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

- **Reducción a la unidad:**
  Un granjero tiene pienso para alimentar a sus 3 vacas durante 10 días ¿cuánto le durará el pienso si tuviera 5 vacas?
  n.º vacas tiempo (días)
  3 ———— 10
  1 ———— 10 · 3 = 30
  5 ———— 30 : 5 = 6

- **Fracciones equivalentes**

N.º vacas	3	5
Tiempo (días)	10	?

$$3*10=5*x \quad \rightarrow \quad x=\frac{3*10}{5}=6$$

- **Reglas de tres inversa**

n.º vacas		tiempo (días)
3	———	10
5	———	x

$$\frac{5}{3}=\frac{10}{x}\Rightarrow x=\frac{10\cdot 3}{5}=6 \text{ días}$$

6.- PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Llamamos proporcionalidad compuesta a aquellas situaciones en las que intervienen más de dos magnitudes ligadas

En un comedor escolar con 60 comensales se han consumido 36 kilos de verdura en 3 semanas. ¿Cuántos kilos de verdura se consumirán, en cuatro semanas, con 80 comensales?

Comensales		Tiempo (semanas)		Peso (kg)
60	———	3	———	36
80	———	4	———	x

$$\frac{60}{80}\cdot\frac{3}{4}=\frac{36}{x}\Rightarrow x=\frac{80\cdot 4\cdot 36}{60\cdot 3}=64$$

Recuerda que si una de las magnitudes guarda una relación de proporcionalidad inversa con la magnitud del valor desconocido debes invertir su razón en la multiplicación.

7.- REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Tres amigos aficionados al bricolaje alquilan un taladro para hacer arreglos en casa. El primero lo utiliza durante dos días y se lo pasa al segundo, que lo tiene cinco días. Después lo recibe el tercero, que lo usa durante tres días y lo devuelve a la tienda. ¿Cuánto debe poner cada uno para pagar los 60€ que cuesta en total el alquiler?

Días	2	5	3	2+5+3=10
Coste	x	y	z	60

Veamos el coste por día $60:10=6$ euros
El primero pagará → $2\cdot 6=12$ euros
El segundo pagará → $5\cdot 6=30$ euros
El tercero pagará → $3\cdot 6=18$ euros

8.- REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Tres obreros **A, B y C** deben repartirse **$12,000** por realizar un trabajo. El reparto será **inversamente proporcional** al **número de días que tardaron en hacerlo**, ya que quien lo hizo más rápido trabajó más intensamente.

- A tardó 4 días
- B tardó 6 días
- C tardó 12 días

¿Cuánto debe recibir cada uno?

Persona	Tiempo (días)	Inverso
A	4	1/4
B	6	1/6
C	12	1/12

Buscamos fracciones equivalentes a las inversas pero con el mismo denominador (es decir, las reducimos a común denominador). En este caso serían 3/12, 2/12 y 1/12 respectivamente.
Sumamos las partes : 3+2+1= 6
Cada parte valdrá 12000/6= 2000 $
Por tanto:
La persona A recibirá 3*2000= 6000 $
La persona B recibirá 2*2000= 4000 $
La persona C recibirá 1*2000= 2000 $

9.- AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

- **Aumentos:** Aumentamos una cantidad un %

Las reservas de agua de un embalse han aumentado un 20% respecto a los del año pasado que eran 60 millones de litros ¿Cuáles son las reservas actuales?

F1) Vemos lo que aumentó $20\% \, de \, 60 = \frac{20 \cdot 60}{100} = 12$ millones de litros ha aumentado.

Entonces $60 + 12 = 72$ millones de litros en total.

F2) Lo hacemos con reglas de 3

Reserva pasada	Reserva actual
100	120
60	x

$x = \frac{60 \cdot 120}{100} = 72$ millones litros.

F3) Si consideramos la cantidad inicial como un todo, es decir, un 100%, al aumentar un 20 % tendremos finalmente el 120 %. El 120% es $\frac{120}{100}$, o lo que es lo mismo 1,2. De esta manera 60*1,2 = 72 millones de litros en total.

- **Disminuciones:** Disminuimos una cantidad un %

Las reservas de agua de un embalse han disminuido un 20% respecto a los del año pasado que eran 60 millones de litros ¿Cuáles son las reservas actuales?

F1) Vemos lo que disminuyó $20\% \, de \, 60 = \frac{20 \cdot 60}{100} = 12$ millones de litros ha disminuido.

Entonces $60 - 12 = 48$ millones de litros en total.

F2) Lo hacemos con reglas de 3

Reserva pasada		Reserva actual
100	——	80
60	——	x

$x = \frac{60 \cdot 120}{100} = 48$ millones litros.

F3) Si consideramos la cantidad inicial como un todo, es decir, un 100%, al disminuir un 20 % tendremos finalmente el 80 %. El 80% es $\frac{80}{100}$, o lo que es lo mismo 0,8. De esta manera 60*0,8 = 48 millones de litros en total.

9.- NÚMEROS ÍNDICE

Los **números índice** son medidas estadísticas que expresan las variaciones de una determinada magnitud económica de forma relativa a un **momento de referencia.**
El número índice, NI, correspondiente al momento n_1 y en base (o tomando como referencia) al momento n_0 de una cierta cantidad viene dado por:

$$NI^{n1}_{no} = \frac{Medida\ de\ la\ magnitud\ en\ n1}{Medida\ de\ la\ magnitud\ a\ en\ n0} * 100$$

Ejemplo: El SMI (salario mínimo interprofesional) ha variado en España entre los años 2017 y 2022 como se muestra en la siguiente tabla:

Año	2017	2018	2019	2020	2021	2022
SMI (€)	707,70	735,90	900	950	965	1000

Obtén los números índice de la variación del SMI en base a los años 2017 y 2022.

AÑO	SMI (€)	NI (en base al año 2017)	NI (en base al año 2022)
2017	707,70	$NI^{2017}_{2017} = \frac{707,70}{707,70} \cdot 100 = 100$	$NI^{2017}_{2022} = \frac{707,7}{1000} \cdot 100 = 70,77$
2018	735,90	$NI^{2018}_{2017} = \frac{739,9}{707,70} \cdot 100 = 103,94$	$NI^{2018}_{2022} = \frac{735,9}{1000} \cdot 100 = 73,59$
2019	900	$NI^{2019}_{2017} = \frac{900}{707,70} \cdot 100 = 127,17$	$NI^{2019}_{2022} = \frac{900}{1000} \cdot 100 = 90$
2020	950	$NI^{2020}_{2017} = \frac{950}{707,70} \cdot 100 = 134,24$	$NI^{2020}_{2022} = \frac{950}{1000} \cdot 100 = 95$
2021	965	$NI^{2021}_{2017} = \frac{965}{707,70} \cdot 100 = 136,36$	$NI^{2021}_{2022} = \frac{965}{1000} \cdot 100 = 96,5$
2022	1 000	$NI^{2022}_{2017} = \frac{1000}{707,70} \cdot 100 = 141,30$	$NI^{2022}_{2022} = \frac{1000}{1000} \cdot 100 = 100$

Fíjate que los números índice, si los multiplicas por 100, son también porcentajes.