Guión para dibujar estudiar la gráfica de una función

1. Hallar el dominio de la función.
2. Calcular los puntos de corte de la función con los ejes OX y OY.
3. Simetrías y signos de la función.(Opcional)
4. Calcular las asíntotas de la función.
   a) Asíntotas Horizontales
   b) Asíntotas Verticales
   c) Asíntotas Oblícuas
5. Estudiar la monotonía de la función y hallar sus extremos relativos.
   a) Hallar la primera derivada f'
   b) Igualar a 0 para hallar puntos críticos(máximos y mínimos)..
   c) Estudio de los signos de la f' para saber las zonas de crecimientos y decrecimiento o bien aplicar criterio de segunda derivada.
6. Estudiar la curvatura de la función y hallar sus puntos de inflexión.
   a) Estudio de la primera derivada f''
   b) Igualar a 0 para hallar posibles puntos de inflexión.
   c) Estudio de los signos de la f'' para saber las zonas de concavidad y convexidad.
7. Representar en la gráfica los puntos de corte, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión, y luego trazar la función.

Representar $f(x) = x^2 - x^4$

1. Dominio: R, es continua y derivable en R
2. Puntos de corte con los ejes
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $(0, 0)$
   b) Con el eje de las ordenadas, OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0,\ 0) \\ x = \pm 1 & (1, 0),\ (-1,\ 0) \end{cases}$
3. Simetrías: $\begin{cases} f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 \\ f(x) = x^2 - x^4 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ f es una función par y por lo tanto es simétrica respecto del eje OY.
4. Asíntotas**:** No tiene por ser una función polinómica.
5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = 2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{1/2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$

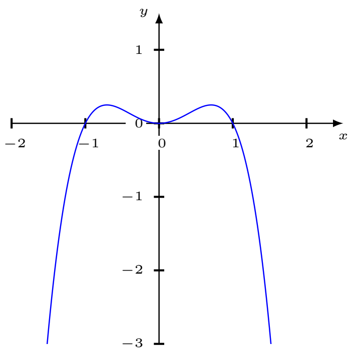
Dominio		$-\sqrt{2}/2$		0		$-\sqrt{2}/2$	
f	creciente		decreciente		creciente		creciente
f'	+	0		0		0	+
		max		min		max	

Mínimo relativo en el punto $(0, 0)$, y máximos relativos en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$

6. Concav., convex., puntos de inflexión: $f'' = 2 - 12x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$
   Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$

Dom		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-\sqrt{6}}{6}$		**0**		$\frac{\sqrt{6}}{6}$		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	
		máx				**MíN**				**MÁX**	
	convexa			**Inflex**	**cóncava**			**Inflexión**	**convexa**		
f	$\nearrow$		$\searrow$				$\nearrow$				$\searrow$
f'	+	**0**	**-**			**0**	+			**0**	**-**
f''	**-**	**-**	**-**	**0**	+	+	+	**0**	**-**	**-**	**-**

   a) Dibujo



Represntar $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

1. Dominio: $R - 0$
2. Puntos de corte con los ejes: no tiene.
3. Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x) \Rightarrow$ f es impar y por lo tanto es simétrica respecto al origen de coordenadas.
4. Asíntotas
   a) Asíntotas verticales:$x = 0$
   b) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$. No tiene
   c) Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1; n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x} - x = 0$ =>Asíntota oblicua $y = x$
5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow x = \pm 1$

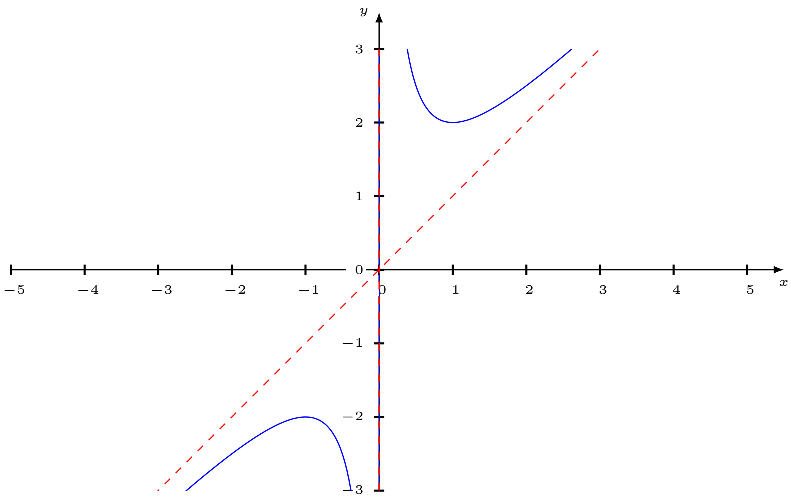
Dominio	$(-\infty, -1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1, \infty)$
f	crece		decrece	NO DEF	decrece		crece
f'	+	0	-	NO DEF	-	0	+
		max				Min	

   Tiene un máximo en el punto: $(-1, 2)$ y un mínimo en $(1, 2)$

6. Concavidad, convexidad, puntos de inflexión:
   a) $f'' = \frac{2}{x^3} \neq 0 \;\Rightarrow$ no tiene puntos de inflexión

Dominio	$(-\infty, -1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1, \infty)$
f	creciente		decreciente	NO DEF	decreciente		creciente
f'	+	0	-	NO DEF	-	0	+
f"		-		NO DEF		+	
		convexa		NO DEF		cóncava	

7. Gráfica:



Representar $f(x) = \frac{-x}{x^2-4}$

1. Dominio: R $- \{\pm 2\}$

2. Puntos de corte con los ejes:

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: Si $x = 0$ entonces $y = 0$, luego pasa por $A(0, 0)$

   b) Con el eje de abscisas, OX :
   Si $y = 0$ entonces $\frac{-2x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, Vemos que da el punto (0, 0) de nuevo, esto quiere decir que la gráfica de f(x) corta a los ejes solamente en el origen de coordenadas.

3. Simetrías: $f(-x) = \frac{x}{(-x)^2-4} = \frac{x}{x^2-4} = -f(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto del origen

4. Asíntotas

   a) Asíntotas verticales: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{-x}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{-x}{x^2-4} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow x = -2 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x}{x^2-4} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow x = 2$

   b) Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow y = 0$

   c) Asíntotas oblicuas: No tiene

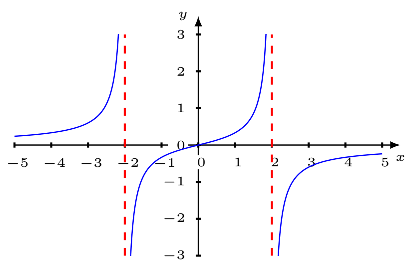
5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $y' = \frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \notin R$. No tiene

Dominio	$(-\infty, -2)$	-2	(-2,2)	2	$(2, \infty)$
f	decreciente	No def	decreciente	No def	decreciente
f'	-	No def	-	No def	-
		No def		No def	

6. Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f'' = -\dfrac{2x \cdot \left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2+12) = 0 \Rightarrow x = 0; x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-12} \notin R$

Dominio	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
f	decreciente	No def	decreciente			No def	decreciente
f'	-	No def	-			No def	-
	-	No def	+	0	-	No def	+
	convexa		conc	inflexión	conv		cóncava

7. Gráfica:



Representar $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

1. Dominio: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

2. Puntos de corte con los ejes:

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: Si $x = 0$ entonces $y = \sqrt{-1}$, luego No hay corte en eje Y

   b) Con el eje de abscisas, OX :
   Si $y = 0$ entonces $\sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = +1, x = -1, \Rightarrow (-1\ ,\ 0)\ ,\ (1\ ,\ 0)$

3. El signo es siempre positivo.Simetrías: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2-1} = f(x)$, es simétrica respecto del eje OY.

4. Asíntotas

   a) Asíntotas verticales: No tiene

   b) Asíntotas horizontales: No tiene

   c) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

      1) $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1\ ,\ n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = 0 \Rightarrow y = xm = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{-x} =$

      2) $\lim_{x\to+\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) = -1\ ,\ n = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-1} + x\right) = 0 \Rightarrow y = -x$

5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos: $f' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \text{Dom } f$.

Dominio	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
f	decreciente	No def	creciente
f'	-	No def	+

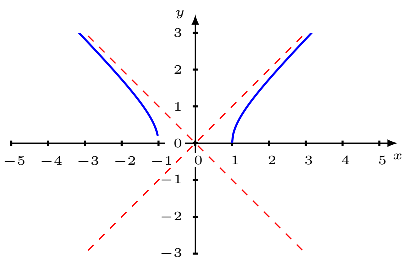
   En el intervalo $(-\infty, -1)$ $f'(x) < 0 \ \Rightarrow$ f es decreciente ;En el intervalo $(1\ ,\ +\infty)$ $f'(x) > 0 \ \Rightarrow$ f es creciente

6. Concavidad, convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \neq 0$,

Dominio	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
f	decreciente	No def	creciente
f''	-	No def	-
	$\frown$		$\frown$

   la derivada segunda es negativa en todo su dominio$\Rightarrow$ es siempre convexa

7. Gráfica:



Representar $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
Solución

1. Estudio de $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$
   a) Dominio de f :Como f es una función racional, pertenecen al dominio son todos los números reales menos los que anulan al denominador, es decir: $D = R - \{+1, -1\}$
2. Puntos de corte
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: Si $x = 0$ entonces $y = 0$, luego pasa por $A(0, 0)$
   b) Con el eje de abscisas, OX :
      1) Si $y = 0$ entonces $\frac{2x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, Vemos que da el punto (0, 0) de nuevo, esto quiere decir que la gráfica de f(x) corta a los ejes solamente en el origen de coordenadas.
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)
   a) Para estudiar el signo de f se señalan en la recta los puntos donde no hay función (es decir los q no pertenecen al dominio) y los puntos donde la función es 0, esto nos da los puntos {-1,0,1} es decir la recta queda dividida en 4 regiones $(-\infty, -1)(-1, 0)(0, 1)(1, +\infty)$ donde puede cambiar el signo, basta tomar un punto en cada una de ellas para saber el signo de toda la región

Dominio	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f		-	$\nexists$	$+$		$-$	$\nexists$	$+$	

   b) Simetrías $f(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2-1} = -f(x)$Hay simetría impar
4. Asíntotas
   a) Horizontales
      1) $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$ Hay Asíntotas horizontal
      2) $\lim\limits_{x->-\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$ Hay Asíntotas horizontal
   b) Verticales
      1) $\lim\limits_{x->-1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$; $\lim\limits_{x->-1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$ Asíntota vertical en $x = -1$
      2) $\lim\limits_{x->1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x->-1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$.Asíntota vertical en $x = +1$
   c) Oblicuas:No existen al haber Horizontales.
5. Monotonía
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2}$
   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow -2-2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -2$ =>No existe solución⇒No hay puntos singulares.Ni máximos, ni mínimos
   c) Estudio de signos de f'

Dominio	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f		decrece		decrece		decrece		decrece	
f'		$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	

6. Estudio de la concavidad y convexidad

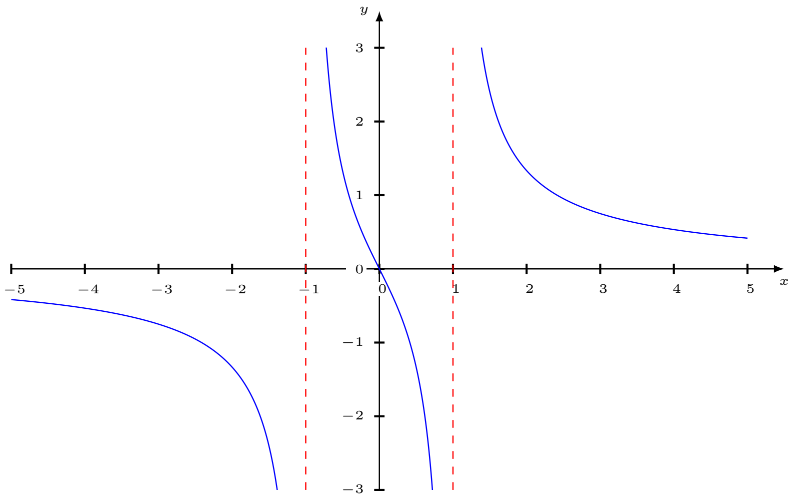
   a) $f''(x) = \dfrac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$

   b) $f''(x) = 0 => x = 0;$

Dominio	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f		decrece		decrece		decrece		decrece	
f'		$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	
f''		-		$+$	0	-		$+$	
		$\frown$		$\smile$	inflexión	$\frown$		$\smile$	

Como en el 0 cambia la concavidad f tiene (en $x = 0$) un puntode inflexión (0,0)

7. Dibujo



Represetar $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Solución

1. Dominio: La función es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que el denominador no se anula nunca.

2. Puntos de corte

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: Si $x = 0$ entonces $y = 0$, luego pasa por $A(0,0)$

   b) Con el eje de abscisas, OX :

      1) Si $y = 0$ entonces $\frac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0$, Vemos que da el punto $(0,0)$ de nuevo, esto quiere decir que la gráfica de f(x) corta a los ejes solamente en el origen de coordenadas.

3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

   a) Para estudiar el signo de f se señalan en la recta los puntos donde no hay función (es decir los que no pertenecen al dominio) y los puntos donde la función es 0, esto nos da solo el punto 0 es decir la recta queda dividida en 2 regiones $(-\infty,0)(0,+\infty)$ donde puede cambiar el signo, basta tomar un punto en cada una de ellas para saber el signo de toda la región

Dominio	$-\infty$			0		$+\infty$
f		$-$			$+$	

   $f(-1) = \frac{-1}{2} < 0$ y $f(1) = \frac{1}{2} > 0$,

4. Asíntotas

   a) Horizontales

      1) $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ Hay Asíntota horizontal;

      2) $\lim\limits_{x->-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ Hay Asíntota horizontal

   b) No hay verticales La función es continua en todo $\mathbb{R}$

   c) Oblicuas:No existen al haber Horizontales.

5. Monotonía

   a) Calculo de la derivada $f'(x) = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

   b) $f'(x) = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -1$

   c) Estudio de signos de f'

	$-\infty$		$\overset{-1}{mínimo}$		$\overset{1}{máximo}$		$+\infty$
f		$\searrow$ *decreciente*		$\nearrow$ *creciente*		$\searrow$ *decreciente*	
f'		-	0	+	0	-	

   La función tiene un mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$

   La función decrece en el $(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$ y crece en el intervalo $(-1,1)$

6. Estudio de la concavidad y convexidad

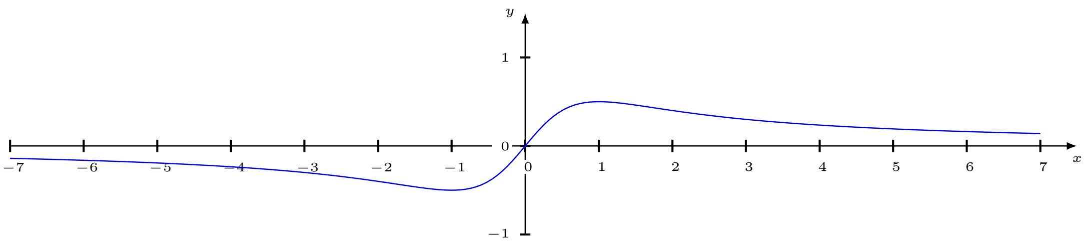
a) $f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$

b) $f''(x) = 0 => x = 0; x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}$

Dominio	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		0		1		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
f		decrece				decrece				decrece		decrece	
f'		$-$	-	-	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''		$-$	0	$+$			0	-			0	$+$	
	$\frown$		inflexión	$\smile$			inflexión	$\frown$			inflexión	$\smile$	

Como en el 0 ,$\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$cambia la concavidad f tiene 3 puntos de inflexión. B($\sqrt{3}$, 0,43);C($-\sqrt{3}$, -0,43); $D(0, 0)$

7. Dibujo



Representar $f(x)) = \frac{Lnx}{x}$
Solución

1. Estudio de $f(x)\frac{Lnx}{x}$
    a) Dominio de f :$D = R^{+} = (0, +\infty)$
2. Puntos de corte
    a) Con el eje de las ordenadas, OY: No existe valor para $x = 0$
    b) Con el eje de abscisas, OX :
        1) Si $y = 0$ entonces $\frac{Lx}{x} = 0 \Rightarrow Lx = 0 \Rightarrow x = 1$, Vemos que da el punto (1, 0) .
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)
    a) Para estudiar el signo de f se señalan en la recta los puntos donde no hay función (es decir los q no pertenecen al dominio) y los puntos donde la función es 0, esto nos da e punto $\{1\}$ es decir la recta queda dividida en 2 regiones $(0, 1)(1, +\infty)$ donde puede cambiar el signo, basta tomar un punto en cada una de ellas para saber el signo de toda la región

Dominio	0		+1		$+\infty$
f		$-$	0	+	

    b) Simetrías:No existen
4. Asíntotas
    a) Horizontales
        1) $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{Lx}{x} = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{1}{x}$=0 Hay Asíntotas horizontal
    b) Verticales
        1) $\lim\limits_{x->0^{+}} \frac{Lnx}{x} = \frac{-\infty}{0^{+}} = -\infty$;Asíntota vertical en $x = 0$
    c) Oblicuas:No existen al haber Horizontales.
5. Monotonía
    a) Calculo de la derivada $f'(x) = \frac{1-Lx}{x^2}$
    b) $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - Lx = 0 => x = e$
    c) Estudio de signos de f'

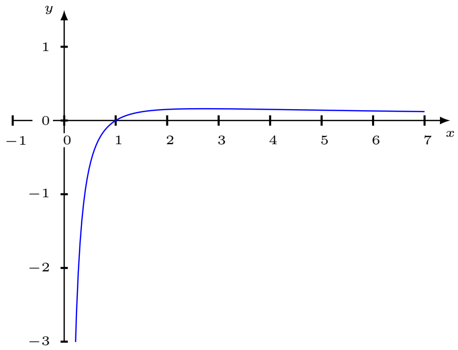
Dominio	0		e		$+\infty$
f		crece		decrece	
f'		+	0	$-$	

    En $x = e$ hay un máximo $(e, \frac{1}{e})$
6. Estudio de la concavidad y convexidad
    a) $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$
    b) $f''(x) = 0 => x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$;

Dominio	0		e		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f		decrece				decrece	
f'	$-$	$-$	0			$-$	
f''		$-$			0	$+$	
		$\frown$				$\smile$	

Como en el 0 cambia la concavidad f tiene (en $x = e^{\frac{3}{2}}$) un puntode inflexión $(e^{\frac{2}{3}}, 0{,}33)$

7. Dibujo



Representar $f(x)) = e^{\frac{1}{x}}$
Solución

1. Estudio de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
   a) Dominio de f :$D = R - \{0\}$
2. Puntos de corte
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: No existe valor para $x = 0$
   b) Con el eje de abscisas, OX :
      1) Si $y = 0$ entonces $e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$La exponencial nunca se anula.
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)
   a) $f(x)$ es siempre positiva
   b) Simetrías:No existen
4. Asíntotas
   a) Horizontales
      1) $\lim\limits_{x->+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ Hay Asíntotas horizontal $y = 1$
      2) $\lim\limits_{x->-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ Hay Asíntotas horizontal $y = 1$
   b) Verticales
      1) $\lim\limits_{x->0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$;Asíntota vertical en $x = 0^+$
      2) $\lim\limits_{x->0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$;No hay Asíntota vertical en $x = 0^-$
   c) Oblicuas:No existen al haber Horizontales.
5. Monotonía
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{1/x} = 0$ =>nunca se anula=>No hay puntos críticos
   c) Estudio de signos de f'

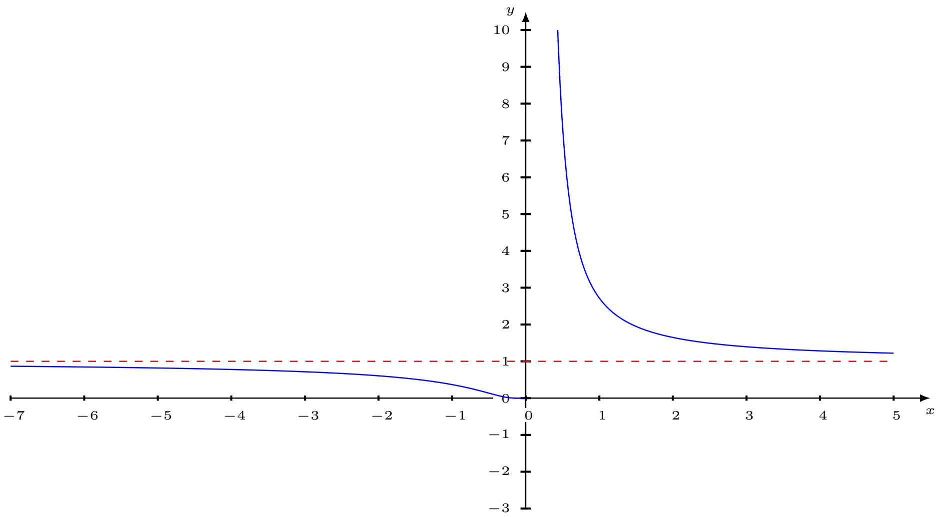
Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		decrece		decrece	
f'		$-$	$\nexists$	$-$	

   Siempre decrece
6. Estudio de la concavidad y convexidad
   a) $f''(x) = \dfrac{(2x+1)\, e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$
   b) $f''(x) = 0 => x = -\frac{1}{2}$;

Dominio	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
f		decrece			$\nexists$	decrece	
f'	$-$	$-$			$\nexists$	$-$	
f''		$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	
		$\frown$		$\smile$		$\smile$	

Como en el -1/2 cambia la concavidad f tiene un puntode inflexión $(-1/2, f(-1/2)) = (-1/2, 0{,}135335)$

7. Dibujo



Representar $f(x)) = xe^{-x}$
Solución

1. Estudio de $f(x) = xe^{-x}$
   a) Dominio de f :$D = R$
2. Puntos de corte
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: para $x = 0$ $f(0) = 0 => (0,0)$
   b) Con el eje de abscisas, OX :
      1) Si $y = 0$ entonces $xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$ Vemos que da el punto $(0,0)$ de nuevo, esto quiere decir que la gráfica de f(x) corta a los ejes solamente en el origen de coordenadas.
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

   a) Simetrías:No existen
4. Asíntotas
   a) Horizontales
      1) $\lim\limits_{x->+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{x}{e^x} = (L'Hôpital) = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ Hay Asíntotas horizontal $y = 0$
      2) $\lim\limits_{x->-\infty} xe^{-x} = +\infty$ No Hay Asíntotas horizontal
   b) Verticales :No hay
   c) Oblicuas:No existen
5. Monotonía
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = -(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$
   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow -(x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 => x = 1$
   c) Estudio de signos de f'

Dominio	$-\infty$		1		$+\infty$
f		crece		decrece	
f'		$+$	0	$-$	

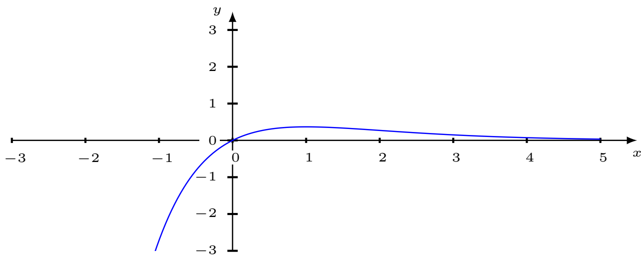
   en $A(1, e^{-1})$. Hay un máximo
6. Estudio de la concavidad y convexidad
   a) $f''(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$
   b) $f''(x) = 0 => x = 2$;

Dominio	$-\infty$	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$	$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
		$\frown$		$\smile$	

s

Como en el 2 cambia la concavidad f tiene un puntode inflexión $(2, f(2)) = (-1/2, 0{,}270671)$

7. Dibujo



Representar $f(x)) = e^{1-x^2}$
Solución

1. Estudio de $f(x) = e^{1-x^2}$
   a) Dominio de f :$D = R$
2. Puntos de corte
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: para $x = 0$ $f(0) = 0 => (0, e)$
   b) Con el eje de abscisas, OX :
      1) Si $y = 0$ entonces $e^{1-x^2} = 0 \Rightarrow$No existe soluciónNo hay corte con eje OX
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$+$	0	$+$	

   La gráfica siempre es positiva
   a) Simetrías:$f(-x) = f(x)$.Es simétrica par.
4. Asíntotas
   a) Horizontales
      1) $\lim\limits_{x->+\infty} e^{1-x^2} = e^{-\infty} = 0$ Hay Asíntotas horizontal $y = 0$
      2) $\lim\limits_{x->-\infty} e^{1-x^2} = e^{-\infty} = 0$ Hay Asíntotas horizontal
   b) Verticales :No hay
   c) Oblicuas:No existen
5. Monotonía
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{1-x^2}$
   b) $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x\mathrm{e}^{1-x^2} = 0 => x = 0$
   c) Estudio de signos de f'

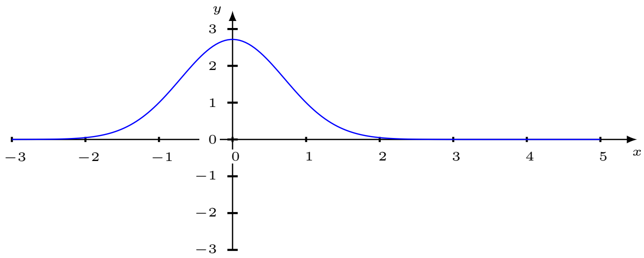
Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		crece		decrece	
f'		$+$	0	$-$	

   en $A(0, e)$. Hay un máximo
6. Estudio de la concavidad y convexidad
   a) $f''(x) = 2\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{1-x^2}$
   b) $f''(x) = 0 => x = +\frac{1}{\sqrt{2}}; x = -\frac{1}{\sqrt{2}};$

Dominio		$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$
		$\smile$		$\frown$		$\smile$

Cambia la concavidad f en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}}));(\frac{1}{\sqrt{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}}));$

7. Dibujo



Junio 2005-Representar $f(x)) = e^x + lnx$
Solución

1. Estudio de $f(x) = e^x + lnx$

   a) Dominio de f :$D = (0, +\infty)$

2. Puntos de corte

   a) Con el eje de las ordenadas, OY: $x = 0$ no está en el dominio.

   b) Seguro hay un valor de x donde $f(x) = 0$(ver apartado 4).La función pasa de $-\infty$ a $+\infty$ de forma continua=>por Bolzano existe un $c\ tal\ que\ f(c) = 0$

3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

Dominio	$-\infty$				$+\infty$
f		$+$		$+$	

   La gráfica siempre es positiva

   a) Simetrías:No hay

4. Asíntotas

   a) Horizontales

      1) $\lim\limits_{x->+\infty} e^x + lnx = +\infty$ No hay

   b) Verticales : $\lim\limits_{x->0^+} e^x + lnx = -\infty$

   c) Oblicuas: $y = mx + n$ No existen
   $m = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{e^x+lnx}{x} = (LH\hat{o}pital) = +\infty$

5. Monotonía

   a) Calculo de la derivada $f'(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$

   b) No hay raices de $f' = 0$

   c) Estudio de signos de f'

Dominio	0	$(0, +\infty)$	$+\infty$
f		crece	
f'		$+$	

   Siempre creciente

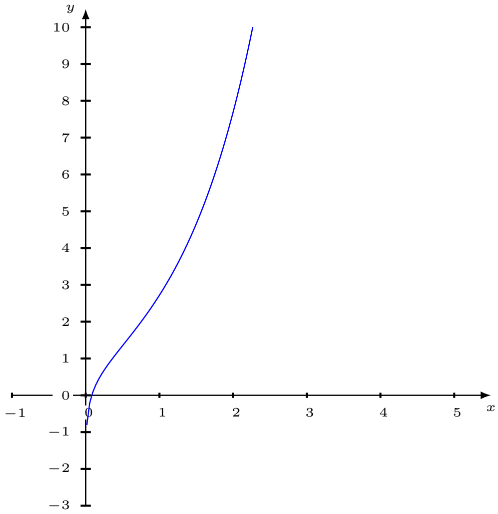
6. Estudio de la concavidad y convexidad

   a) $f''(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2}$

   b) Veamos que en el intervalo $[1/2, 1]$ se anula $f\acute{}\acute{}(x)$, para eso aplicamos Bolzano a la función $f\acute{}\acute{}(x)$:

      1) $f\acute{}\acute{}(x)$ es continua en $[1/2, 1]$, ya que 0 no pertenece a este intervalo $f\acute{}\acute{}(1/2) < 0$; $f\acute{}\acute{}(1) > 0$ Luego al cumplir Bolzano existe un punto $c \in (1/2, 1)$ tal que $f\acute{}\acute{}(c) = 0$.

7. Dibujo



Junio 2005-Representar $f(x)) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
Solución

1. Estudio de $f(x)) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
   a) Dominio de f :$D = R - \{+1\}$
2. Puntos de corte
   a) Con el eje de las ordenadas, OY: $x = 0 => (0,0)$.
   b) $f(x) = 0 => x^3 = 0 => x = 0$
3. (opcional) Signo de f (Permite ver las regiones donde existe la gráfica y ayuda a posicionar las asíntotas)

Dominio	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

La gráfica es positiva en $(0,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,0)$

   a) Simetrías:No hay
4. Asíntotas
   a) Horizontales
      1) $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$ No hay
      2) $\lim\limits_{x->-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$ No hay
   b) Verticales :
      1) $\lim\limits_{x->1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$
      2) $\lim\limits_{x->1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$
   c) Oblicuas: $y = mx + n$
      1) $m = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = 1; n = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - 1 \cdot x = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{x^3-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2$. La asíntota oblicua es $y = x+2$ en $+\infty$
      2) $m = \lim\limits_{x->-\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x->+\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = 1; n = \lim\limits_{x->-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - 1 \cdot x = \lim\limits_{x->-\infty} \frac{x^3-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2$.La asíntota oblicua es $y = x+2$ en $-\infty$
5. Monotonía
   a) Calculo de la derivada $f'(x) = \dfrac{(x-3)\,x^2}{(x-1)^3}$
   b) Raices de $f' = 0 => x = 0; x = 3$
   c) Estudio de signos de f'

Dominio	$(-\infty$,0)	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
f							
f'	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Hay un mínimo en $x = 3 \Rightarrow (3, 6{,}75)$

6. Estudio de la concavidad y convexidad

   a) $f''(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^3} - \dfrac{3\,(x-3)\,x^2}{(x-1)^4} + \dfrac{2\,(x-3)\,x}{(x-1)^3} = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$

   b) $f''(x) = 0 => x = 0$

Dominio	$(-\infty$,0)	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
f							
f'	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f''	-	0	$+$		$+$	$+$	$+$
	$\frown$		$\smile$	$\nexists$	$\smile$		

7. Dibujo