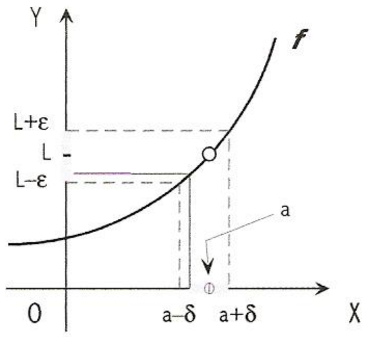
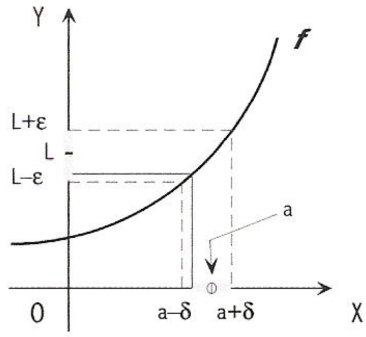
LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función f tiene por límite L cuando x tiende a a si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$





Si una función $f(x)$ cumple esta definición, decimos que es **convergente** en a.

2. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Unicidad de límite.

Si una función es convergente o tiene límite en un punto, este es único.

Acotación.

Una función que tiene límite en un punto está acotada en un entorno de ese punto.

Operaciones con las funciones convergentes.

Si f y g son dos funciones convergentes en a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

se verifican las siguientes propiedades:

- $\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = L \pm M$
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{L}{M}$; $si\ M \neq 0$
- $\lim_{x \to a} (\alpha\ f)(x) = \alpha\ L \quad \forall \alpha \in \Re$
- $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = L^M$; $L > 0$
- $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$

3. CÁLCULO DE LÍMITES EN LAS FUNCIONES ELEMENTALES.

Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son convergentes cuando x tiende a a, siendo a un número real, y su límite coincide con el valor numérico del polinomio en a:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

Las funciones polinómicas, cuando x tiende a $\pm\infty$, se comportan del mismo modo que su término de mayor grado, siendo su límite $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Funciones racionales

Las funciones racionales son convergentes cuando x tiende a a, para todo valor de a perteneciente al dominio de la función:

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad \forall a \in Dom\ f$$

Para los valores de a que no pertenecen al dominio de la función y que se corresponden con las raíces del denominador aparecen las indeterminaciones de tipo $\frac{K}{0}$ y $\frac{0}{0}$ que se resuelven estudiando los límites laterales y simplificando los factores comunes del numerador y denominador, respectivamente.

Al calcular los límites en el infinito de este tipo de funciones aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que se resuelve dividiendo numerador y denominador por la máxima potencia o utilizando la siguiente expresión:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

El resultado depende de los grados de los polinomios numerador y denominador y denominador, de forma que:

- Si $n > m$, el límite es infinito.
- Si $n = m$, el límite es $\frac{a_n}{b_m}$.
- Si $n < m$, el límite es cero.

Funciones potencial- exponenciales

Los límites de este tipo de funciones se resuelven aplicando la propiedad:

$$\lim\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

⇨ **Límite de la composición de funciones**

Sea la función compuesta $g \circ f$, donde g es una función potencial (de exponente entero o fraccionario), logarítmica o trigonométrica (seno, coseno y tangente) y $\lim f(x)=L$. Entonces:

$$\lim(g \circ f)(x)=\lim g(f(x))=g(\lim f(x))=g(L)$$

4. RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones polinómicas.

Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Las indeterminaciones de cocientes de funciones polinómicas se resuelven factorizando los polinomios numerador y denominador mediante la regla de Ruffini.

Las indeterminaciones de cocientes de funciones irracionales se resuelven multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada de la función que lleve raíz.

Indeterminaciones del tipo $\frac{K}{0}$

Estas indeterminaciones se resuelven estudiando los límites laterales de los cocientes de funciones que los generan.

Indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$

Estas indeterminaciones se resuelven transformándolas en las del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, o en las des del tipo $\frac{0}{0}$.

Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

Las indeterminaciones con funciones racionales se resuelven operando convenientemente.

Las indeterminaciones con funciones irracionales se resuelven multiplicando el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la función que lleve raíz.

Indeterminaciones del tipo 1^{∞}

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

5. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función f(x) es continua en un punto x_0 si cumple las tres condiciones siguientes:

$$1.- \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$$
$$2.- \exists f(x_0)$$
$$3.- \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una función f(x) es continua en un punto "a" si:

1. Existe el límite de la función *f(x)* en *x* = *a*.
2. La función está definida en *x* = *a*; es decir, existe *f(a)*
3. Los dos valores anteriores coinciden.

O también, Si tenemos en cuenta la definición métrica de límite podemos escribir:

$$f \quad \text{es continua en } x = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ejemplos:

La función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ ¿es continua en el punto *x* = 3?

Veamos si se cumplen las tres condiciones anteriores:

1. $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{3+2}{3-2} = 5$
2. $f(3) = \dfrac{3+2}{3-2} = 5$
3. $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

Por tanto, *f(x)* es continua en el punto *x* = 3.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, estudiar la continuidad de dicha función en *x* = 1.

Veamos si se cumplen las condiciones necesarias:

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1+1}{1} = 2$
2. $f(1) = \dfrac{1^2-1}{1^2-1} \Rightarrow$ no existe, pues se anula el denominador.
3. El $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $f(1)$ no son iguales porque *f*(1) no existe y, en consecuencia, no se pueden comparar.

Por tanto, al no estar definida la función en el punto *x* = 1 no podemos hablar de la continuidad en dicho punto.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & si\ \ x<-1 \\ -2 & si\ \ x=-1 \\ 3+x & si\ \ x>-1 \end{cases}$, estudiar la continuidad de dicha función en $x = -1$

1. Estudiamos la existencia del $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Como en el punto $x = -1$ la función experimenta un cambio de definición, para estudiar la existencia de dicho límite, tendremos que calcular los límites laterales de la función en el punto. Por tanto:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(3x+5) = 2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(3+x) = 2$$

En consecuencia, existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$ pues los límites laterales son iguales.

2. $f(-1) = -2$
3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \neq f(-1)$

Luego la función es discontinua en el punto $x = -1$.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si\ \ x<2 \\ 5 & si\ \ x=2 \\ 3-x & si\ \ x>2 \end{cases}$, estudiar la continuidad de dicha función en $x = 2$.

1. Estudiamos la existencia del $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Como en el punto $x = 2$ la función experimenta un cambio de definición, para estudiar la existencia de dicho límite, tendremos que calcular los límites laterales de la función en el punto. Por tanto:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3-x) = 1$$

En consecuencia, no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ pues los límites laterales son distintos.

Luego la función es discontinua en el punto $x = 2$.

Continuidad lateral

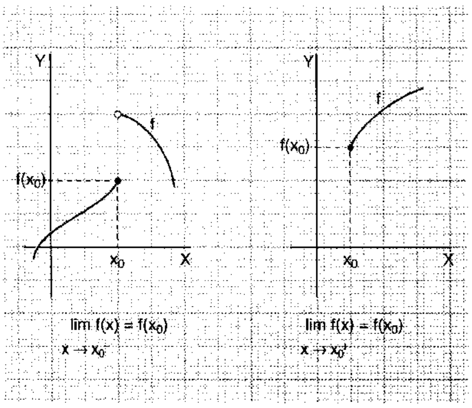
Cuando una función no es continua en un punto podemos preguntarnos si lo es lateralmente; es decir, si desde algún lado llegamos a $f(x_0)$. En concreto:

Una función f(x) es ***continua por la izquierda*** en un punto x_0 si y sólo si

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Una función f(x) es ***continua por la derecha*** en un punto x_0 si y sólo si

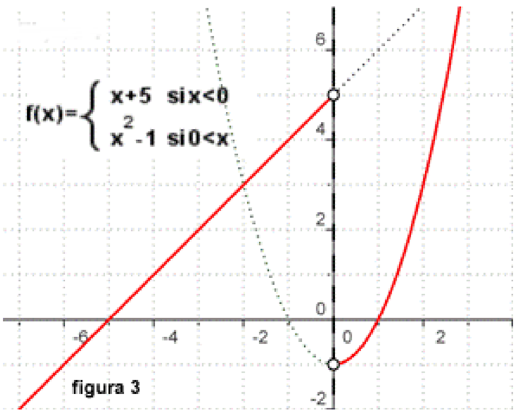
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$



Continuidad en un intervalo.

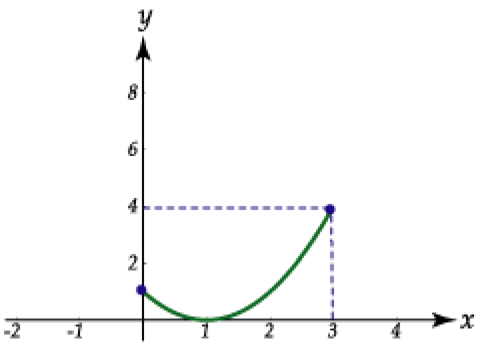
El concepto de continuidad no tiene excesivo interés y aplicación práctica mientras no se extienda a un intervalo para poder tener propiedades en un "trozo" más amplio que un entorno, a veces muy pequeño, alrededor de un punto.

Una función es continua en un intervalo si lo es en todos los puntos del intervalo.



Así, en la función adjunta, podemos apreciar que hay continuidad en el intervalo [-4, -1], pero no en el intervalo [-1,1]

En caso de que el intervalo sea cerrado, [a, b], es necesario que la función también sea continua lateralmente en los extremos.



Estas apreciaciones serán de vital importancia para aplicarlas posteriormente a los teoremas sobre funciones continuas.

Propiedades de las funciones continuas.

Si una función es continua en un punto, entonces tiene límite en dicho punto.

Esta propiedad es consecuencia directa de la definición de la continuidad.

Teorema de acotación.

Si una función es continua en un punto *x* = *a*, entonces está acotada en ese punto, es decir, existe un entorno simétrico de *x* = *a* en el que la función está acotada.

Teorema del signo.

Si *f(x)* es continua en un punto *x* = *a* y *f*(*a*) ≠ 0, entonces existe un entorno de *x* = *a* en el que *f(x)* tiene el mismo signo que *f*(*a*).

6. TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Cuando una función no es continua en un punto x_0 decimos que tiene o que presenta una discontinuidad en ese punto.

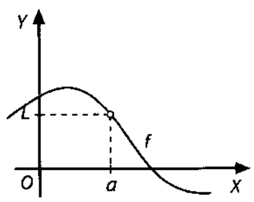
Teniendo en cuenta que una función es continua en un punto *x* = *a* si, y solo si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$., en caso de que esta condición no se cumpla por algún motivo, tendremos uno de los siguientes **tipos de discontinuidades**.

$$Discontinuidades \begin{cases} Evitables \\ Inevitables \begin{cases} De\ salto\ (1^a\ especie) \begin{cases} Salto\ finito \\ Salto\ infinito \end{cases} \\ Esencial\ (2^a\ especie \end{cases} \end{cases}$$

Discontinuidad evitable.

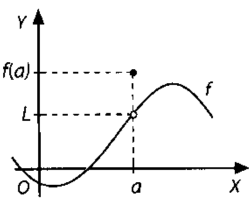
Una función presenta una discontinuidad evitable en un punto x_0 cuando:

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ pero o bien no coincide con $f(x_0)$ o bien no existe $f(x_0)$.



∄ f(a)

Discontinuidad evitable



f(a) ≠ L

Discontinuidad evitable

Este tipo de discontinuidad se llama **evitable** porque se resolvería o evitaría definiendo una nueva función a partir de la que tenemos, de la siguiente manera:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$$

es decir, definimos la nueva función igual que la función que tenemos en todos los puntos donde no hay problema y en el punto donde presenta la discontinuidad le asignamos el valor del límite.

Ejemplo:

Explica como harías para que la siguiente función sea continua: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ en el punto x = 3.

Si observamos la función, resulta que no está definida en el punto x = 3 pero, si calculamos el límite de la función en ese punto, obtenemos:

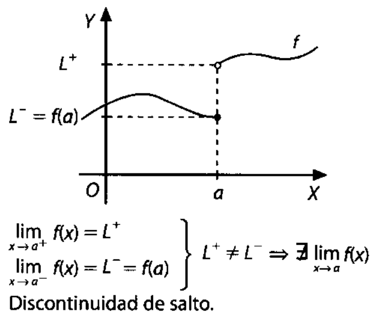
$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\cdot(x-2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=3-2=1$ que sería el verdadero valor de la función en ese punto.

La nueva función $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & si\ \ x\neq 3 \\ 1 & si\ \ x=3 \end{cases}$ sería continua en el punto x = 3.

Discontinuidad de salto finito.

Cuando, no existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ***pero si existen los límites laterales, que son finitos aunque distintos.***

En este caso, puede existir o no f(a)

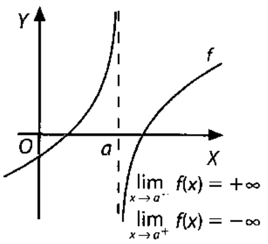


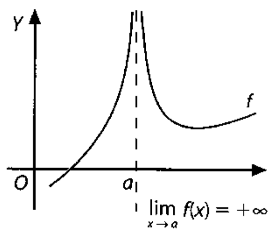
Además, llamamos **salto** a la diferencia entre los límites laterales de la función en el punto.

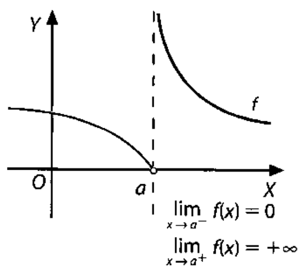
Salto = $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)-\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

Discontinuidad de salto infinito.

Cuando no existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y ***alguno de los límites laterales (o los dos) es infinito***







Ejemplos:

Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & si \;\; x\leq 1 \\ 3-2x & si \;\; x>1 \end{cases}$ en el punto *x* = 1.

Para estudiar la continuidad en el punto *x* = 1, analizamos si se verifican los tres puntos de los que hablamos con anterioridad:

1º.- La función está definida en el punto *x* = 1: $f(1)=4$

2º.- Estudiamos la existencia del límite en *x* = 1, para lo cual tenemos que recurrir a calcular los límites laterales en él puesto que en dicho punto existe un cambio de definición de la función

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+1)=4 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-2x)=1$$

Al ser los límites laterales distintos, <u>la función no tiene límite en dicho punto</u>.

En consecuencia, en *x* = 1, la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito:

$$\textbf{Salto} = \lim_{x\to 1^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)=4-1=3$$

Si observamos los valores de los límites laterales, vemos que el límite a la izquierda coincide con el valor que toma la función en el punto, por lo que la función tiene una continuidad lateral a la izquierda en el punto *x* = 1.

Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & si \;\; x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & si \;\; x>1 \end{cases}$ en el punto *x* = 1.

Para estudiar la continuidad en el punto *x* = 1, analizamos si se verifican los tres puntos de los que hablamos con anterioridad:

1º.- La función está definida en el punto *x* = 1: $f(1)=4$

2º.- Estudiamos la existencia del límite en *x* = 1, para lo cual tenemos que recurrir a calcular los límites laterales en él puesto que en dicho punto existe un cambio de definición de la función

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+1)=4 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

En consecuencia, en *x* = 1, la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito:

<u>Nota:</u> Si observamos los valores de los límites laterales, vemos que el límite a la izquierda coincide con el valor que toma la función en el punto, por lo que podemos decir que la <u>función es continua por la izquierda</u> en el punto *x* = 1.

7. ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS

Tipos de asíntotas

Asíntotas verticales:

Decimos que la recta $x = x_0$ es una **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ cuando se verifica que:

$\underset{x\to x_0^-}{Lím}\ f(x) = \pm\infty$ y/o $\underset{x\to x_0^+}{Lím}\ f(x) = \pm\infty$

Asíntotas horizontales:

Decimos que la recta $y = n$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ cuando se verifica que:

$\underset{x\to\pm\infty}{Lím}\ f(x) = n$

Las asíntotas horizontales son un caso particular de asíntotas oblicuas.

Asíntotas oblicuas:

Son rectas de la forma: $y = mx + n$ donde:

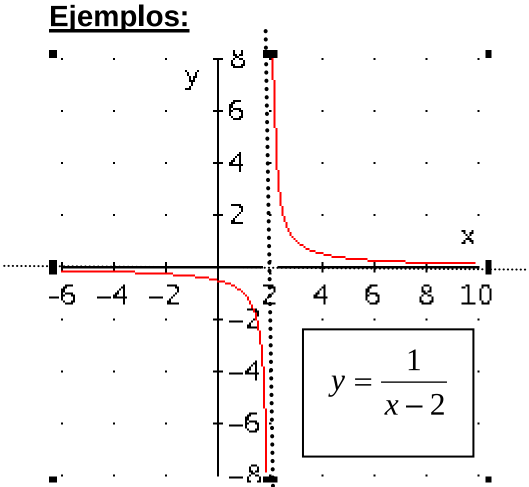
$$m = \underset{x\to\pm\infty}{Lím} \frac{f(x)}{x} \qquad ; \qquad n = \underset{x\to\pm\infty}{Lím} \left[f(x) - mx \right]$$

⇨ Si hay horizontal, no hay oblicua.

Ramas parabólicas:

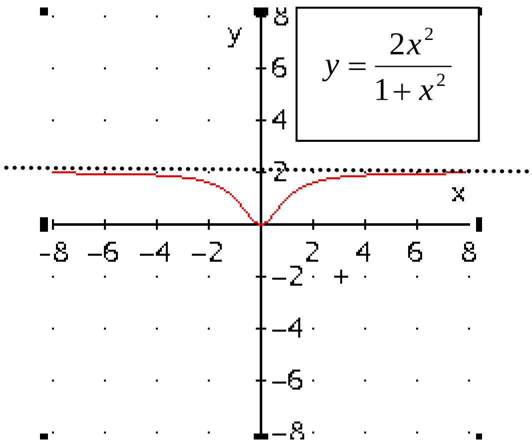
Cuando $\underset{x\to\pm\infty}{Lím}\ f(x) = \pm\infty$ diremos que la función presenta **ramas parabólicas.**

Ejemplos:



$Asíntota\ vertical: x = 2$

$Asíntota\ horizontal: y = 0$



$Asíntota\ horizontal: y = 2$

⇨ **Asíntotas en funciones logarítmicas**

Las funciones logarítmicas tienen una asíntota vertical en los puntos en que se anula el argumento.

⇨ **Asíntotas en funciones exponenciales**

Las funciones exponenciales tienen una asíntota horizontal en menos infinito o en infinito según su base sea mayor que uno o esté entre 0 y 1.

8.- TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS

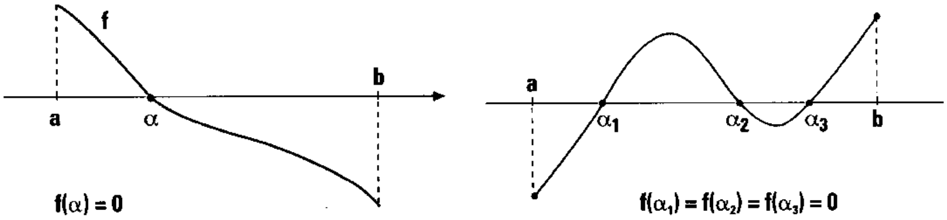
Teorema de Bolzano:

Si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto interior c del intervalo en el que f(c) = 0.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \ / \ f(c)=0$$

Interpretación geométrica:

Geométricamente este teorema significa que una función continua no puede pasar de un lado a otro del eje X sin cortarlo (lo que, evidentemente, corresponde a la idea intuitiva de continuidad).



Observaciones:

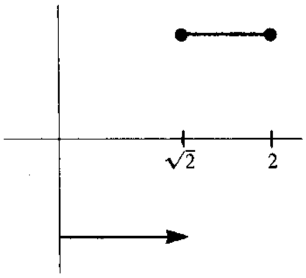
1.- El teorema afirma que existe un punto c en (a, b) tal que f(c) = 0, pero no afirma que ese punto sea único. Puede haber varios como en la segunda figura.

2.- El teorema establece una condición suficiente pero no necesaria, para que una función se anule en un punto. Una función puede ser continua en [a, b], no cambiar de signo y sin embargo anularse en algún punto c de (a, b).

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ en [-1, 1].

3.- La hipótesis de continuidad es fundamental. Si la función no es continua la conclusión puede no ser cierta. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$



⇨ La principal utilidad de dicho teorema está en que sirve para determinar ceros de funciones y soluciones de ecuaciones.

Teorema de Darboux o de los valores intermedios

Si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces, para cualquier valor k comprendido entre f(a) y f(b) existe al menos un c en (a, b) tal que f(c)=k.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a) < k < f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \;/\; f(c) = k$$

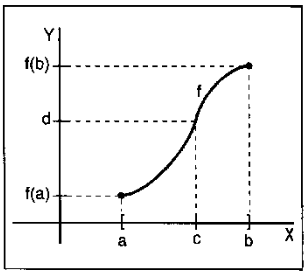
Es decir, f(x) toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b).

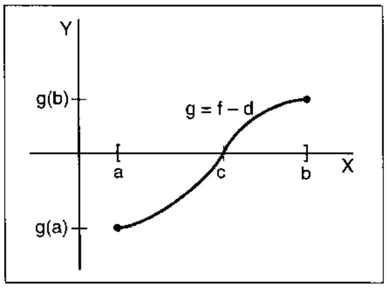
Este teorema es consecuencia del anterior y lo podríamos demostrar sin más que considerar una nueva función $g(x) = f(x) - k$ que cumpliría las condiciones del teorema de Bolzano:

- *g*(*x*) es continua en $[a,b]$ por ser diferencia de dos funciones continuas
- Supuesto que *f*(*a*) < *f*(*b*), entonces: $g(a) = f(a) - k < 0 \quad g(b) = f(b) - k > 0$

Se verifican, por tanto, las hipótesis del teorema de Bolzano y, en consecuencia, también se verificará la tesis, es decir:

$$\exists\, c \in (a,b) \,/\, g(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(c) = f(c) - k = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = k$$

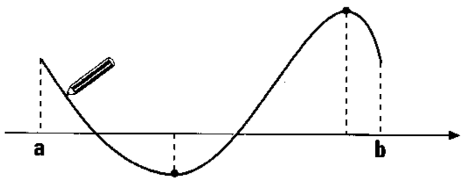




Teorema de Weierstrass:

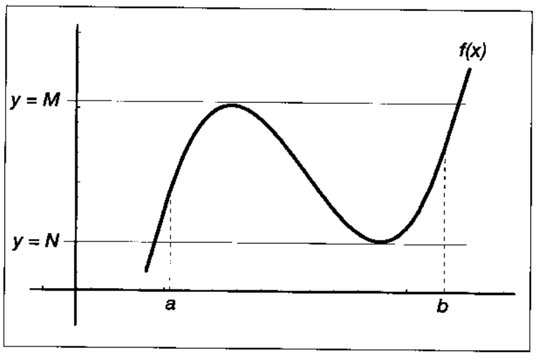
Si una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b] existen en ese intervalo dos puntos en los que la función alcanza, respectivamente, sus valores máximo y mínimo.

Es evidente que si la gráfica comienza en (a,f(a)) y termina en (b,f(b)), sin levantar el lápiz del papel por ser f continua, no puede dispararse al infinito, luego ha de tener un punto de máxima altura y otro de mínima altura.



Interpretación geométrica:

Geométricamente este teorema significa que dada una función continua en un intervalo cerrado [a, b], su gráfica queda comprendida entre las rectas y = M e y = N, siendo M y N los valores máximo y mínimo que alcanza la función en el intervalo.



Aplicaciones de los teoremas sobre funciones continuas

Los teoremas sobre funciones continuas nos sirven para saber si una ecuación tiene o no solución en un intervalo e, incluso, para aproximar dicha solución hasta un determinado orden.

Ejemplos:

Demostrar que la ecuación $x^3 - 5x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $\left[1, 2\right]$.

La función $f(x) = x^3 - 5x + 3$ es una función continua en todo R por ser polinómica y, por tanto, también es continua en el intervalo $\left[1, 2\right]$, .

Además, se verifica que: $f(1) = -1 < 0 \quad \text{y} \quad f(2) = +1$ >0

En consecuencia, se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano (tenemos una función continua en un cerrado que toma valores de signo opuesto en los extremos del mismo) y, por tanto, también se cumplirá la tesis:

$$\exists\ c \in \left[1, 2\right] \ / \ f(c) = 0$$

y nuestra ecuación tiene una solución en el intervalo $\left[1, 2\right]$.

La función $f(x) = tgx$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

La función $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es continua en todo R menos en los puntos en los que se anula la función coseno y, dentro del intervalo dado, existe un punto en el que se anula $x = \dfrac{\pi}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

En consecuencia, la función tangente no es continua en el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

Se verifica que: $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1 \quad \text{y} \quad f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4} = -1$

No se cumplen las hipótesis de Bolzano y, por tanto, tampoco se cumplirá la tesis.

En consecuencia, no se contradice el teorema ya que si no se cumplen las hipótesis, no se cumplirá la tesis.