EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO DE ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS

Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

$$a)\ y=\frac{x^2+1}{x-3}$$

Asíntotas verticales:

Si $\underset{x\to x_0^-}{Lím}\ f(x)=\pm\infty$ y/o $\underset{x\to x_0^+}{Lím}\ f(x)=\pm\infty$ la recta $x=x_0$ es una asíntota vertical.

Una función racional tiende a más o menos infinito cuando el denominador es igual a cero y el numerador es distinto de cero. Por tanto, para hallar las asíntotas verticales de una función racional lo primero que hay que hacer es hallar los valores de x que anulan el denominador, es decir, los polos de la función.

$$x-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=3$$

Después, se estudia el límite de la función para esos valores de x que anulan el denominador.

$$\underset{x\to 3}{Lím}\ \frac{x^2+1}{x-3}=\boxed{\frac{K}{0}} \qquad \underset{x\to 3^-}{Lím}\ \frac{x^2+1}{x-3}=\frac{10}{0^-}=-\infty \quad \text{y} \quad \underset{x\to 3^+}{Lím}\ \frac{x^2+1}{x-3}=\frac{10}{0^+}=+\infty$$

Por tanto, la recta $x=3$ es una asíntota vertical.

Nota: Una función racional puede tener como máximo tantas asíntotas verticales como raíces tenga el denominador. Y, la curva no puede cortar a una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

Si $\underset{x\to\pm\infty}{Lím}\ f(x)=n$ entonces la recta $y=n$ es una asíntota horizontal.

Una función racional tiene una asíntota horizontal si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.

$$\underset{x\to\infty}{Lím}\ \frac{x^2+1}{x-3}=\frac{\infty}{\infty}=\underset{x\to\infty}{Lím}\ \frac{x^2}{x}=\underset{x\to\infty}{Lím}\ x=+\infty \ \Rightarrow$$ la curva no tiene asíntotas horizontales.

En este caso conviene estudiar $\underset{x\to-\infty}{Lím}$ y $\underset{x\to+\infty}{Lím}$ para ver la tendencia de la función cuando x tiende a más y menos infinito (y poder así dibujar las ramas infinitas cuando x tiende a más y menos infinito).

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\ \frac{x^2+1}{x-3}=\frac{\infty}{\infty}=\underset{x\to-\infty}{Lím}\ \frac{x^2}{x}=\underset{x\to-\infty}{Lím}\ x=-\infty$$

➔ Si la curva tiene una asíntota horizontal, es conveniente estudiar el $\underset{x\to-\infty}{Lím}\ f(x)$ y el $\underset{x\to+\infty}{Lím}\ f(x)$ y determinar si la curva va por encima o por debajo de la asíntota.

➔ Una función racional puede tener como máximo una asíntota horizontal. Y, la curva puede cortar a la asíntota. Pero, en general, una función cualquiera puede tener como máximo dos asíntotas horizontales; una cuando $x \to +\infty$ y otra cuando $x \to -\infty$.

Asíntotas oblicuas:

Las asíntotas oblicuas son rectas de la forma: $y = mx + n$ donde:

$$m = \underset{x\to\pm\infty}{Lím} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad n = \underset{x\to\pm\infty}{Lím} \left[f(x) - mx \right]$$

Si $m = \pm\infty$ quiere decir que la curva no tiene asíntotas oblicuas.

Si $m = 0$ se obtiene una asíntota horizontal, ya que las asíntotas horizontales se pueden considerar como un caso particular de las asíntotas oblicuas.

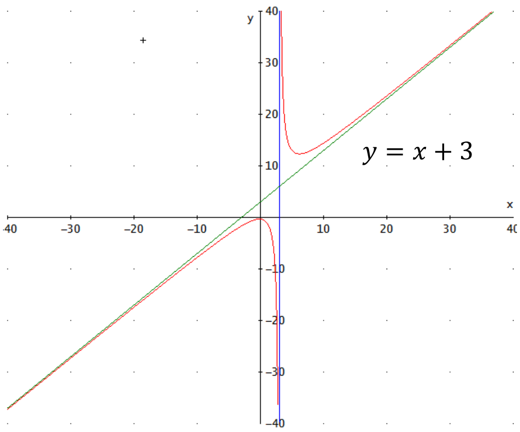
Una función racional tiene una asíntota oblicua solamente en el caso en el que el numerador sea de un grado más que el denominador.

➔ Una función racional puede tener como máximo una asíntota oblicua. Y, la curva puede cortar a la asíntota. Pero, en general, una función cualquiera puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas, una cuando $x \to +\infty$ y otra cuando $x \to -\infty$.

$$m = \underset{x\to\infty}{Lím} \frac{\frac{x^2+1}{x-3}}{x} = \underset{x\to\infty}{Lím} \frac{x^2+1}{x\cdot(x-3)} = \underset{x\to\infty}{Lím} \frac{x^2+1}{x^2-3x} = \frac{\infty}{\infty} = \underset{x\to\infty}{Lím} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \underset{x\to\infty}{Lím} \left[\frac{x^2+1}{x-3} - 1\cdot x \right] = \underset{x\to\infty}{Lím} \left[\frac{x^2+1-x\cdot(x-3)}{x-3} \right] = \underset{x\to\infty}{Lím} \left(\frac{x^2+1-x^2+3x}{x-3} \right) = \underset{x\to\infty}{Lím} \left(\frac{3x+1}{x-3} \right) \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \underset{x\to\infty}{Lím} \left(\frac{3x}{x} \right) = 3$$

Por tanto, la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua.



b) $y = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

Asíntotas verticales:

Hallamos los valores de x que anulan el denominador:

$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^+} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

Cuando me acerco a -2 por la izquierda la curva tiende a $+\infty$ y cuando me acerco a -2 por la derecha la curva tiende a $-\infty$. Por tanto, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical y hay dos ramas infinitas.

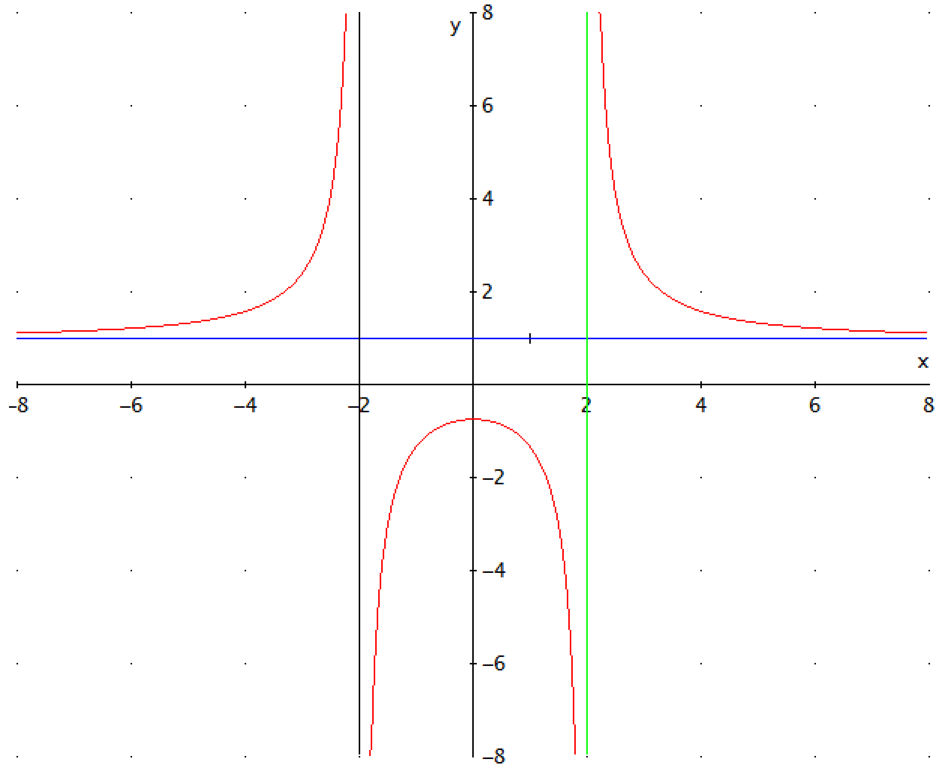
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow$$ La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas:

No tiene. (La asíntota horizontal es un caso particular de asíntota oblicua).

➔ Una función racional tiene una asíntota oblicua solamente en el caso en el que el numerador es de un grado más que el denominador.



$c)\ y = \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$

Asíntotas verticales:

Hallamos los valores de x que anulan el denominador:

$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}$ (no tiene solución)

No existe ningún valor x_0 tal que $\underset{x \to x_0^-}{Lím} f(x) = \pm\infty$ y/o $\underset{x \to x_0^+}{Lím} f(x) = \pm\infty$ por lo tanto, la curva no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$\underset{x \to \infty}{Lím} \dfrac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \underset{x \to \infty}{Lím} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3 \quad \Rightarrow$ La recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas:

No tiene. (La asíntota horizontal es un caso particular de asíntota oblicua).