1 - Lenguaje algebraico

1.1) Reglas generales para el uso de variables e incógnitas

- Los números ó cantidades desconocidas se llaman **incógnitas** ó **variables**. Se representan con una letra minúscula ó mayúscula. En general la letra minúscula y la mayúscula no representan el mismo valor: $a \neq A$ $\quad p \neq P$
- En un mismo cálculo o ejercicio, **una incógnita representa a un único número** que no cambia a lo largo del ejercicio, aunque letras distintas pueden representar al mismo número: $x=y$. Las variables sí pueden tener un valor que cambia en el ejercicio.
- **Las propiedades de las incógnitas y variables son las mismas que las de los números** (conmutativa, asociativa, distributiva, etc) , pero con la dificultad de que no conocemos el valor de esos números.
- El símbolo de multiplicación se puede omitir si afecta a una variable ó incógnita: $11 \cdot x = 11x$ $\quad -8 \cdot P \cdot Q = -8PQ$

1.2) Operaciones con números desconocidos

- La mayor parte de las operaciones **no se pueden realizar** y las dejaremos indicadas. Por ejemplo:
  - *Sumar un número desconocido con otros números (conocidos o desconocidos):* $A+3$; $\quad X-Y$; $\quad a+b-c$
  - *Multiplicar o dividir un número desconocido con otros números (conocidos o desconocidos):*

$V=a \cdot b \cdot c \qquad P=3{,}14 \cdot R \qquad \frac{A}{B} \qquad \frac{12}{P} \qquad \frac{a+3}{b}$

- **Algunas operaciones sí se pueden reducir ó realizar** completamente, por ejemplo:
  - *Sumar varias veces el mismo número desconocido:*

$A+A+A=$ $\qquad A+3A=$ $\qquad x+y+2y+3y=$ $\qquad x+x-(x+y)=$

  - *Multiplicar varias veces el mismo número desconocido ó con otros números:*

$a \cdot a \cdot a=$ $\qquad a \cdot 5a \cdot a^2=$ $\qquad -5a \cdot (-2a)=$ $\qquad 2 \cdot x \cdot (-2y) \cdot (-3x) \cdot (-1y)=$

  - *Simplificar factores comunes en una fracción:*

$\frac{12T^2}{6T}=$ $\qquad \frac{6T}{12T^2}=$ $\qquad \frac{-5 \cdot a}{-2 \cdot a}=$ $\qquad \frac{-5 \cdot (a+b)}{a \cdot (a+b)}=$

  - *Reducir potencias y raíces*

$\sqrt{P^2}=$ $\qquad (\sqrt{P})^2=$ $\qquad \sqrt[3]{P^3}=$ $\qquad (\sqrt[3]{P})^3=$

1.3) Elementos del lenguaje algebraico

Monomio: es el producto de una o más letras por un número(s): $5a^2b$; $\frac{3m^3}{4}$; $\quad -13x^5$; $\quad -11=-11 \cdot x^0$

- **Parte literal**: letras (y sus exponentes) de un monomio: $5a^2b$; $\frac{3m^3}{4}$; $\quad -13x^5$; $\quad -11 \cdot 1 = -11 \cdot x^0$
- **Coeficiente**: número que multiplica a la parte literal: $5a^2b$; $\frac{3}{4} \cdot m^3$; $\quad -13x^5$; $\quad -11$
- **Grado del monomio**: suma de exponentes de las letras de la parte literal: $5a^2b^1 \rightarrow G=3$; $\quad -13x^5 \rightarrow G=5$; $-11 \cdot x^0 \rightarrow G=0$
- **Monomios semejantes**: aquellos con la misma parte literal. Son los únicos que se pueden sumar

Semejantes a $-13x^5 \rightarrow$ $\quad x^5$; $\quad 1{,}4x^5$; $\quad 8x^5$ $\qquad$ *Semejantes a* $5a^2b \rightarrow$ $\quad a^2b$; $\quad 5a^2b$; $\quad \frac{-3}{4}a^2b$

NO semejantes a $-13x^5 \rightarrow$ $\quad x^4$; $\quad 1{,}4x$; $\quad 8x^6$ $\qquad$ *NO semejantes a* $5a^2b \rightarrow$ $\quad ab$; $\quad 5ab^2$; $\quad a^2b^2$; $\quad 5x^2b$

Polinomio: suma de uno ó más monomios (semejantes ó no). Es habitual asignarle un nombre: P ó P(a) ó P(x): $P(a)=-5-a^2-a-2a+2a^2+1$. A cada sumando de un polinomio ó expresión algebraica se le llama **término**.

- **Polinomio reducido**: suma de uno ó más monomios no semejantes. $P(a)=a^2-3a-4$. El polinomio de dos términos se llama **binomio.**
- **Grado de un polinomio:** es el mayor grado de todos los monomios del polinomio (una vez reducido).

1.4) Operaciones del lenguaje algebraico

Valor numérico: Es el número que resulta de substituir la variable por un número y hacer las operaciones combinadas

Si $x=2$ y $A(x)=3x+2$, entonces $A(2)=3\cdot 2+2=8$.

Suma y resta de polinomios:

- se suman los monomios semejantes: se **deja la misma parte literal** y se suman los coeficientes:
- los **monomios NO semejantes NO se pueden sumar:**

Si $A(x)=3x+2$ y $B(x)=x^2-2x-5$, entonces $A+B=x^2-x-3$

Opuesto de un polinomio: se cambian de signo sus coeficientes Si $B(x)=x^2-2x-5$ entonces $-B(x)=-x^2+2x+5$

Producto y cociente de monomios (semejantes ó no): operamos por separado signos, números y partes literales.

$3a\cdot a^3=3a^4$ $\qquad -5a\cdot(-2a)=+10a^2$ $\qquad \frac{3z^2}{6\cdot z}=\frac{1z}{2}=\frac{z}{2}$ $\qquad \frac{6T}{12T^2}=\frac{1}{2T}$

Monomio por Polinomio (semejantes ó no): se aplica la propiedad distributiva entre los monomios.

Si $P(x)=-8x^3+7x^2-2$ entonces $-3x\cdot P(x)=-3x\cdot(-8x^3+7x^2-2)=24x^4-21x^3+6x$

Polinomio por Polinomio: se aplica la propiedad distributiva de forma repetida y luego se reduce:

$A(x)\cdot B(x)\rightarrow$ Cada monomio de $A(x)$ se multiplica por cada monomio de $B(x)$.

Si $A(x)=3x+2$ y $B(x)=x^2-2x-5$ $\Rightarrow$ $A(x)\cdot B(x) = (3x+2)\cdot(x^2-2x-5) = 3x\cdot(x^2-2x-5)+2\cdot(x^2-2x-5) = \cdots$

Operaciones combinadas: se realizan respetando las prioridades habituales.

1.5) Propiedad distributiva y factor común

Sacar factor común es el proceso inverso a aplicar la propiedad distributiva. Para ello debemos observar si se repite el mismo factor o factores en todos los términos de un polinomio (coeficientes y parte literal). Siempre se puede sacar el factor común trivial que es 1: $-8x^3+4x^2-6x = -2x\cdot 4x^2+2x\cdot 2x-2x\cdot 3 = 2x\cdot(-4x^2+2x-3)$

1.6) Productos notables

Los **productos notables** ó **identidades notables** permiten multiplicar binomios iguales ó *conjugados*. También permiten calcular el cuadrado de sumas y restas. Aquí las letras A y B representan a un número, monomio ó expresión algebraica:

	Potencia	*Producto notable*	*Resultado*
Cuadrado de suma	$(A+B)^2 =$	$(A+B)\cdot(A+B)=$	$A^2+B^2+2AB \overset{\text{ó también}}{=} A^2+2AB+B^2$
Cuadrado de diferencia	$(A-B)^2 =$	$(A-B)\cdot(A-B)=$	$A^2+B^2-2AB \overset{\text{ó también}}{=} A^2-2AB+B^2$
Suma por diferencia		$(A+B)\cdot(A-B)=$	A^2-B^2 *(diferencia de cuadrados)*

Debemos aplicar los productos notables SIEMPRE que hagamos el **cuadrado de una suma ó resta** de dos expresiones:

$(\underset{A}{2a}+\underset{B}{5})^2 = \underset{A^2}{(2a)^2}+\underset{2\cdot A\cdot B}{2\cdot 2a\cdot 5}+\underset{B^2}{5^2} = 4a^2+20a+25$; $\quad (3x^2-7)^2 = (3x^2)^2-2\cdot 3x^2\cdot 7+7^2 = 9x^4-42x^2+49$

Ó si multiplicamos la **suma por la diferencia** de dos expresiones: $\underbrace{(2t+5)\cdot(2t-5)}_{\text{suma por diferencia}} = \underbrace{(2t)^2-5^2}_{\text{diferencia de cuadrados}} = 4t^2-25$