Sistemas de ecuaciones con matrices

1. Sea "γ" un número real y considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & \gamma \\ 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix}$.

Para $\gamma = 1$, discutir el sistema $(A^t \cdot A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$ según los valores de "a".

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y sea M = A + $(\gamma - 1) \cdot B$

Para $\gamma = -1$, resolver el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M.

3. Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 5x & 2 \\ 2x & 2 \\ x & -2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 3z \\ z \\ 2z \end{pmatrix}$ y D = $\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

Sabiendo que $(A \cdot B) + C = 2D$, formular un sistema de ecuaciones y encuentra los valores de *x, y, z*.

4. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Calcular los valores de *a*, *b y c* para que se verifique la ecuación matricial $A \cdot B^t = C$.

5. Consideramos las matrices A = $\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular a, b y c si se cumple A + B = 3C - B.

6. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} x & 1 & z \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} -1 - 8y \\ 3 - y + z \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Si $(A \cdot B)(2C - D) = E$, formula un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

b) Resolver por el método de Gauss.

7. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolver el sistema B·A = C para a = 1.

8. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$.

Calcular los valores de a, b y c que verifican B - C = A·B

Problemas con sistemas de ecuaciones

9. En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al del resto. Escribe y resuelve un sistema de ecuaciones que represente el problema.

10. Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20% más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formular el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

11. Tres socios reúnen 6000 euros para invertir en un producto financiero. Se sabe que el primero invierte el doble que el segundo y que el tercero invierte tanto como el primero y el segundo juntos.

a) Formular el sistema de ecuaciones lineales asociado al enunciado y expresar en forma matricial.

b) Resolver el sistema anterior. ¿Cuánto dinero invierten cada uno de los socios para realizar la inversión?

12. Decidimos invertir una cantidad de 15000 euros en bolsa, comprando acciones de tres entidades *A*, *B y C*. Invertimos en *A el* doble que en *B y* en *C* juntas. Transcurrido un año, las acciones de la entidad *A se revalorizaron* un 3%, las de *B* un 4% y las de *C* perdieron un 2% y, como consecuencia, obtuvimos un beneficio de 380 euros. Determina cuanto invertimos en cada una de las entidades.

13. Un autobús transporta en cierto viaje 60 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero que cuesta 1 €; estudiantes que tienen un 25% de descuento y jubilados con un descuento del 50% del precio del billete. La recaudación del autobús en este viaje fue de 48 euros. Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes era el doble que el número del resto de viajeros.

14. Con 450 gramos de medicamento se fabricaron 60 pastillas de tres tipos: grandes, medianas y pequeñas. Las pastillas grandes pesan 20 gramos, las medianas 10 gramos y las pequeñas 5 gramos. Si el total de pastillas grandes y medianas es la mitad del número de pastillas pequeñas. ¿Cuántas se fabricaron de cada tipo?

Sistemas de ecuaciones con un parámetro

15. Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ (1+a)y+z=4 \\ x+2y+az=4 \end{cases}$.

a) Enuncia el Teorema de Rouché Frobenius.

b) Discutir el sistema según el valor del parámetro real "*a*".

c) Resolver el sistema para *a*=2.

16. Sea el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y un parámetro "a":

$$\begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+(a+1)y-z=a-1 \end{cases}$$

a) Discutir según los valores del parámetro "a".

b) Resolver el sistema por Cramer para a = 2.

17. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y+z=1 \\ (a-1)x+y+z=a \\ x+(a-1)y-z=0 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) Resolverlo para a = 0.

c) Resolverlo para a = 3.

18. ¿Para qué valor de "a" el sistema $\begin{cases} ax+ay=-1 \\ x-ay\ =1 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.

19. a) Discutir por el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones según el valor de "m":

$$\left.\begin{matrix} mx+2y+z=1 \\ 2x+my+z=m \\ 5x+2y+z=1 \end{matrix}\right\}$$

b) Resolver en el caso que sea compatible indeterminado.

20. a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según el valor de “m”:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de “m”.

b) Resuelve el sistema, si es posible, para m = 0.

21. Discutir los siguientes sistemas según el valor de “a”.

a) $$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x - y = a \\ y + 3z = a \\ x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Sistemas de ecuaciones con dos parámetros

22. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales según los valores de los parámetros a y b:

$a)$ $$\left.\begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{array}\right\}$$

$c)$ $$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = \mathrm{b} \\ x + y + az = 2 \\ 2x + y + az = b \end{array}\right\}$$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + \mathrm{a}\, z = -2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \end{array}\right\}$$