

Discutir, según los valores del parámetro “m”, el siguiente sistema:

1. Xuño 2020

$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$$

Solución:

A notación F_i indicará “fila i ”. Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quere dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - mF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & m & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - mF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & 0 & -1 + m^2 & -2m^2 \end{array}\right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y - mz = 2m, \\ (-1 + m^2)z = -2m^2, \end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión, que queda como segue:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é

$$z = \frac{-2m^2}{-1 + m^2}, \quad y = 2m + mz, \quad x = -z.$$

- Se $m \in \{-1, 1\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación queda $0 = -2$.

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, cúmprese que $2 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3$ e tamén, conseguintemente, que $\text{rank } A = 2$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 1\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m \in \{-1, 1\}$: $\text{rank } A = 2$. Por outra banda, ao ser $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & \pm 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mp 2 \neq 0$, sábese que $\text{rank } A^* = 3 > \text{rank } A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).

2. Xullo 2020

$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6. \end{cases}$$

3. Xuño 2021

$$\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$$

4. Xullo 2021

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$$

5. Xuño 2022

$$\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$$

6. Xullo 2022

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0, \\ y + (m-2)z = -2, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3. \end{cases}$$

7. Xuño 2023

$$\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$$

8. Xullo 2023

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ (m+1)x + y + z = m+1, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m. \end{cases}$$

9. Xuño 2024

$$\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3, \\ 2mx + 3my + 2z = 5, \\ (m-4)y + mz = m. \end{cases}$$

10. Xullo 2024

$$\begin{cases} 2x + y + z = m, \\ x - y + 2z = 2m, \\ mx + 3z = m. \end{cases}$$