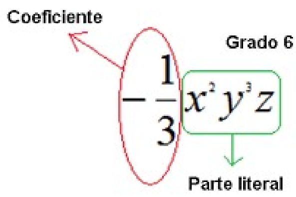
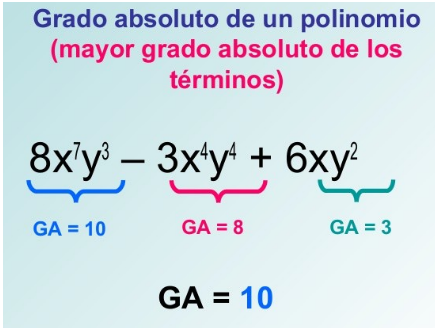
UNIDAD 3: ECUACIONES Y SISTEMAS

1. POLINOMIOS

Un **monomio** es una expresión algebraica que consta de una parte numérica llamada coeficiente y una parte con letras y exponentes naturales llamada parte literal. Las letras de la parte literal reciben el nombre de variables.
El **grado** del monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.
Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.



Un **polinomio** es la suma de varios monomios no semejantes su grado es el del monomio de mayor grado que contenga. Cada monomio del polinomio se llama término. Si hay un término formado solo por un número se llama término independiente.

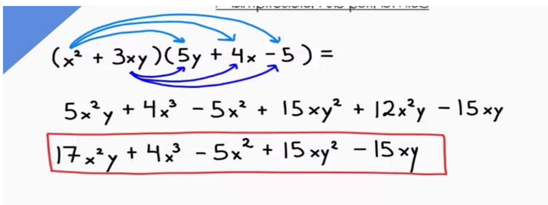


2.- OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma y resta: para sumar o restar dos polinomios, tenemos que ir sumando o restando los monomios que sean semejantes y dejamos indicada la operación de los monomios no semejantes. Por ejemplo: $P(x)=2x^3-5x^2+3x-2$ y $Q(x)=x^3-7x^2-2x+7$

$$P(x)-Q(x)=2x^3-5x^2+3x-2-x^3+7x^2+2x-7=x^3+2x^2-5x-9$$

Producto:
Para multiplicar dos polinomios tenemos que multiplicar cada monomio del primero por cada monomio del segundo y operar los semejantes. Por ejemplo:



Identidades notables:

I. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$	CUADRADO DE UNA SUMA
II. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$	CUADRADO DE UNA DIFERENCIA
III. $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$	SUMA POR DIFERENCIA

Ejemplo:

$$(2x+5)^2=4x^2+20x+25$$

$$(2x-5)^2=4x^2-20x+25$$

$$(2x+5)(2x-5)=4x^2-25$$

3. REGLA DE RUFFINI Y TEOREMAS

La **regla de Ruffini** es un método que nos permite dividir un polinomio entre un binomio del tipo o (x – a). Tendremos que realizar los siguientes pasos:

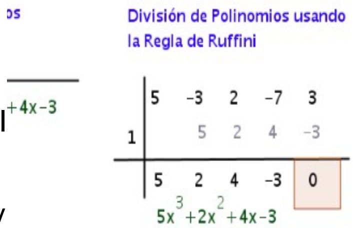
1) Escribimos los coeficientes del dividendo en orden decreciente. Si falta algún término completamos con ceros.

2) En la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor (a).

3) Bajamos el primer coeficiente.

4) Multiplicamos el valor de a por el primer coeficiente bajado y el resultado lo escribimos debajo del segundo coeficiente.

5) Sumamos el segundo coeficiente con el valor anotado debajo y escribimos el resultado en la línea inferior.



6) Repetimos el proceso hasta completar la fila inferior. El valor de la derecha es el del resto y los valores a su izquierda los coeficientes del cociente.

3.1 Teorema del resto

El **teorema del resto** nos permite conocer el resto de la división de un polinomio entre $(x-a)$ sin realizarla: **El resto R de la división de un polinomio** $P(x)$ **entre** $(x-a)$ **es igual al valor numérico del polinomio en** $x=a$ **.**

Ejemplo, calcula el resto de dividir el polinomio $P(x)=x^3+7x^2+12x+10$ entre $x+5$

$R=P(-5)=(-5)^3+7\cdot(-5)^2+12\cdot(-5)+10=0$

4. RAÍCES DE UN POLINOMIO. FACTORIZACIÓN.

Las **raíces** de un polinomio $P(x)$ son los valores de x que lo hacen 0, es decir, las soluciones de la ecuación $P(x)=0$.

- Un polinomio de grado n tiene, como máximo, n raíces reales.
- Si un polinomio de coeficientes enteros tiene raíces enteras, estas son divisores del término independiente.

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de dos o más polinomios del menor grado posible. Hay polinomios que no se pueden factorizar, por ejemplo los de grado 1 y los que no tienen raíces reales. Estos polinomios se llaman **irreducibles**.

Para factorizar polinomios podemos utilizar las siguientes técnicas:

1. **Extraer factor común**: se utiliza cuando falta el término independiente.

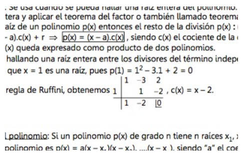
Por ejemplo : $x^4+2x^3=x^3(x+2)$ $3x^2-15x=3x(x-5)$

2. **Identidades notables**: se usa cuando un polinomio se puede expresar como una identidad notable.

Ejemplo, $x^2+8x+16=(x+4)^2$ $x^2-36=(x+6)(x-6)$

3. **Teorema del factor y Ruffini:** se usa cuando se puede calcular una raíz entera.

Por ejemplo, x^2-3x+2
Calculamos una raíz entera entre los divisores del término independiente que son 1, -1, 2 y -2.
$x=1$ $P(1)=1^2-3\cdot1+2=0$ por lo tanto diviso al polinomio entre $x-1$


tera y aplicar el teorema del factor o también llamado teorema
aíz de un polinomio p(x) entonces el resto de la división p(x) :
- a).c(x) + r $\Rightarrow$ $\boxed{p(x) = (x - a).c(x)}$, siendo c(x) el cociente de la
(x) queda expresado como producto de dos polinomios.
hallando una raíz entera entre los divisores del término indep
que x = 1 es una raíz, pues $p(1) = 1^2 - 3.1 + 2 = 0$
regla de Ruffini, obtenemos $\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array}$, c(x) = x – 2.

polinomio: Si un polinomio p(x) de grado n tiene n raíces x_1,

Por lo tanto, la factorización del polinomio será: $x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2)$

NOTA.- Si un polinomio de grado n tiene n raíces x_1, x_2, …, x_n entonces su factorización es $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ siendo a el coeficiente del término de grado n.

Ejemplo, si tenemos un polinomio de segundo grado cuyo coeficiente de x^2 es 7 y tiene como raíces 1 y -3, su factorización será: $P(x)=7(x-1)(x+3)$

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.
Las **ecuaciones polinómicas** son aquellas que se pueden escribir como $P(x)=0$, donde $P(x)$ es un polinomio.
Las **soluciones** de una ecuación polinómica son las raíces del polinomio.

1.- ECUACIONES DE 1ºGRADO

Son las formadas por un polinomio de primer grado. Su forma general es $ax+b=0$ con $a\neq 0$. Su única solución es $x=-\frac{b}{a}$.

- Si al resolver una ecuación se llega a una identidad, por ejemplo 0=0, entonces la ecuación es una identidad y cualquier número es solución.
- Si llegamos a una contradicción, por ejemplo 0=3, entonces la ecuación es incompatible, es decir, no tiene solución.

Ejemplo, $\frac{1-x}{3}=\frac{x}{2}\Rightarrow 2-2x=3x\Rightarrow 2=5x\Rightarrow x=\frac{2}{5}$

2.- ECUACIONES DE 2º GRADO

Son las formadas por un polinomio de segundo grado. Su forma general es $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$. Las soluciones vienen dadas por:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El número de soluciones viene dado por el discriminante:

- Si $b^2-4ac=0$ una solución real
- Si $b^2-4ac<0$ ninguna solución real
- Si $b^2-4ac>0$ dos soluciones reales

Cuando la ecuación de segundo grado es incompleta conviene resolverla sin usar la fórmula:

- Si falta el término de primer grado se despeja x^2 y se halla la raíz cuadrada:
  $ax^2+c=0\Rightarrow x^2=\frac{-c}{a}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
- Si falta el término independiente se extrae factor común x:
  $ax^2+bx=0\Rightarrow x(ax+b)=0\Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ ax+b=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-b}{a} \end{cases}$

NOTA.- A veces tendremos que aplicar propiedades, realizar operaciones o reducir a común denominador para llegar a una ecuación de primer o segundo grado.

Ejemplo,

- Ecuación completa : $x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2\end{cases}$
- Ecuación incompleta (c=0): $5x^2-20x=0 \Rightarrow x(5x+20)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ 5x-20=0 \Rightarrow x=4\end{matrix}$
- Ecuación incompleta (b=0): $9x^2-36=0 \Rightarrow x^4=4 \Rightarrow x=\pm 2$

3.- ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A 2

Las **ecuaciones polinómicas de grado superior** a dos son aquellas de la forma $p(x)=0$, siendo $p(x)$ un polinomio de grado mayor que dos. Para resolverlas se factoriza el polinomio hasta obtener al menos factores de grado menor o igual que dos, quedando entonces una ecuación factorizada.

Ejemplo, $x^4-2x^3-3x^2+6x=0$

1. Extraemos factor común: $x(x^3-2x^2-3x+6)=0$
2. Buscamos las raíces enteras de $x^3-2x^2-3x+6=0$ mediante Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

3. Buscamos las raíces del cociente obtenido en Ruffini $x^2-3=0$:
$$x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$
4. La ecuación factorizada es: $x(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$
5. Las soluciones de la ecuación son las raíces del polinomio:
$x=0, x=2, x=-\sqrt{3}\ y\ x=\sqrt{3}$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES

Un **sistema de** dos **ecuaciones** lineales con dos incógnitas tiene la expresión:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Donde x e y son las incógnitas, $a, b, a'\ y\ b'$ son los coeficientes de las incógnitas y $c\ y\ c'$ son los términos independientes.
Cada solución está formada por un par de valores, correspondientes a las dos incógnitas, x e y . Según el número de soluciones, un sistema de ecuaciones puede ser:

- **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución. $\frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$
- **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones. $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$
- **Incompatible**: el sistema no tiene solución. $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$

4.1. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Método de **reducción**. Consiste en multiplicar las ecuaciones por los números adecuados ara que al sumarlas se elimine una incógnita.

Ejemplo, $\begin{cases} x-2y=8 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

Multiplicamos por -5 la primera ecuación y las sumamos :

$\begin{cases} -5x+10y=-40 \\ 5x+3y=1 \end{cases} \rightarrow 13y=-39 \Rightarrow y=-3$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$x-2\cdot(-3)=8 \Rightarrow x=2$

Este sistema es compatible determinado con su solución ($(x=2, y=-3)$)

2. Método de **sustitución**. Consiste en dejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Ejemplo, $\begin{cases} x-2y=8 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda

$\begin{cases} x=8+2y \\ 5x+3y=1 \end{cases} \Rightarrow 5\cdot(8+2y)+3y=1 \Rightarrow 40+10y+3y=1 \Rightarrow 13y=-39 \Rightarrow y=-3$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$x-2\cdot(-3)=8 \Rightarrow x=2$

Este sistema es compatible determinado con su solución ($(x=2, y=-3)$)

3. Método de **igualación**. Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

Ejemplo, $\begin{cases} x-2y=8 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

Despejamos x en las dos ecuaciones e igualamos las expresiones obtenidas:

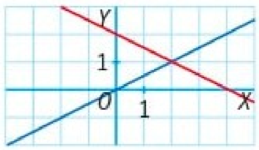
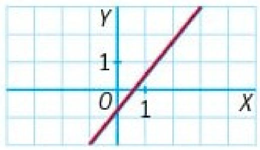
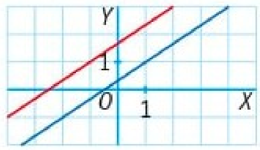
$\begin{cases} x=8+2y \\ x=\frac{1-3y}{5} \end{cases} \Rightarrow 8+2y=\frac{1-3y}{5} \Rightarrow 40+10y=1-3y \Rightarrow 13y=-39 \Rightarrow y=-3$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$x-2\cdot(-3)=8 \Rightarrow x=2$

Este sistema es compatible determinado con su solución ($(x=2, y=-3)$)

4. Método **gráfico**. Consiste en representar gráficamente sobre unos ejes cartesianos las ecuaciones del sistema. La intersección entre las dos gráficas indica la solución.
   Por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales se puede interpretar gráficamente como un par de rectas. La relación entre la posición relativa de las rectas y el número de soluciones del sistema viene dada en la siguiente tabla:

Rectas secantes	Rectas coincidentes	Rectas paralelas
 Un punto de corte. Solución única.	 Infinitos puntos de corte. Infinitas soluciones.	 Sin puntos de corte. No hay solución.
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible

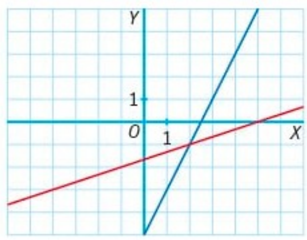
Ejemplo, $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Construimos las tablas de valores para las dos rectas:

$2x - y = 5$		
x	y	Punto
0	–5	(0, –5)
3	1	(3, 1)

$-x + 3y = -5$		
x	y	Punto
5	0	(5, 0)
–4	–3	(–4, –3)

Dibujamos las rectas y estudiamos su intersección. Vemos que las dos rectas tienen un único punto de intersección, el (2, -1). Por lo tanto, el sistema tiene una única solución: $(x=2, y=-1)$



5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Un **sistema de ecuaciones es no lineal** cuando alguna de las ecuaciones no es de primer grado. Estos sistemas se suelen resolver por el método de sustitución.

Ejemplo, $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$

Despejamos x en la ecuación lineal y la sustituimos en la ecuación de segundo grado.

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases} \Rightarrow (y+4)^2 + y^2 = 58 \Rightarrow y^2 + 8y + 16 + y^2 = 58 \Rightarrow 2y^2 + 8y - 42 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y - 21 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -7 \Rightarrow x = 4 - 7 = \Rightarrow x = -3 \\ y = 3 \Rightarrow x = 4 + 3 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

Las soluciones son $(x=-3, y=-7)\, y\, (x=7, y=3)$