FICHA POLINOMIOS y FRACCIONES ALGEBRAICAS 1º BACH CCSS

propuesta A

1. Traduce al lenguaje algebraico el siguiente enunciado.

"Si al triple de un número natural impar le sumamos su cuadrado y le restamos diez veces dicho número, nos dará cero."

2. Dados los polinomios $P(x)$ de grado 7 y $Q(x)$ de grado 3, responde a las siguientes preguntas.

a) ¿De qué grado es el polinomio $P(x) + Q(x)$? ¿y $P(x) - Q(x)$?

b) ¿De qué grado es el polinomio $P(x) \cdot Q(x)$? ¿y $[P(x)]^3$?

c) Al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$, ¿de qué grado es el polinomio cociente resultante? ¿De qué grado como máximo puede ser el polinomio resto? ¿Y como mínimo?

3. Realiza las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible el resultado.

a) $(8xy - 4)^2$

b) $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2$

c) $(x + 2y^2)(x - 2y^2)$

d) $\left(-x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$

4. Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $Q(x) = x - 3$ y $R(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 6$. Realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) - Q(x) + R(x)$

b) $P(x) \cdot Q(x) - R(x)$

c) $[R(x) - P(x)]: Q(x)$

d) $P(x)\,[Q(x) + R(x)]$

e) $[P(x) + R(x)]: Q(x)$

f) $[R(x) + Q(x)]: P(x)$

5. Sin efectuar las divisiones, halla su resto.

a) $(2x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$

b) $(x^7 - 5x^4) : (x + 1)$

c) $(x^4 - 3x^3 + 2x - 9) : (x - 2)$

d) $(x^4 - 8x^2 + 5) : (x + 5)$

6. Hallar el valor de k para que se cumpla en cada caso la relación de divisibilidad dada.

a) El polinomio $x^3 - kx^2 + 4x - 3$ es divisible por $x - 1$

b) El polinomio $2x^3 + 4x^2 + x + k$ es divisible por $x + 1$.

7. Calcula a y b para que el polinomio $x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x + b$ sea divisible por $(x - 1)$ y por $(x + 1)$.

8. Hallar las raíces enteras de los siguientes polinomios.

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3$

b) $x^3 - 4x$

9. Factoriza el polinomio $P(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$.

10. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$ y $Q(x) = x^4 - 8x^2 + 16$, calcula estos ejemplos.

a) m.c.d. $\{P(x), Q(x)\}$

b) m.c.m. $\{P(x), Q(x)\}$

11. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 4}$

b) $\dfrac{x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2}{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x}$

12. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.

a) $\left(\dfrac{x2 - 3x + 2}{x^3 + 3x}\right) : \left(\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 9x}\right)$

b) $\left(1 - \dfrac{2x}{2x + \dfrac{2}{x}}\right) \cdot (x^2 + 1)$

propuesta B

1. La suma de las dos cifras de un número es 12. Expresa dicho número en función de las siguientes variables.

a) la cifra de las decenas.

b) la cifra de las unidades.

2. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios.

a) $(x^3 + 2x^2 - 1)(x^2 + 6x + 3)$

b) $(x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 10x + 6) : (x^2 - 5x + 1)$

3. Desarrolla las siguientes expresiones algebraicas.

a) $(x - a)^2$

b) $(3x^3 - 10)^2$

c) $(2x + 9y)^2$

d) $(x^m + a^n)^2$

e) $\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2$

f) $(x^3y^3 - 2)(2 + x^3y^3)$

g) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$

h) $(a + b + c)(a - b - c)$

4. Efectúa las siguientes divisiones utilizando el método de Ruffini.

a) $(x^3 - 4x^2 + 6) : (x - 4)$

b) $(3x^5 + 4x + 1) : (x + 1)$

5. Escribe un polinomio que tenga por raíces los valores $x = -3$, $x = 1$ y $x = 2$.

6. Calcula el valor de m para que se cumplan las relaciones de divisibilidad dadas.

a) $P(x) = 5x^4 + mx^3 + 2x - 3$ es divisible por $x + 1$.

b) $Q(x) = 3x^2 - mx + 10$ es divisible por $x - 5$.

7. Calcula a y b para que el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 10$ sea divisible por $x - 2$ y se obtenga resto -5 al dividirlo entre $(x - 1)$.

8. Averigua si los polinomios $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ y $Q(x) = x^2 + x - 2$ son primos entre sí.

9. Dados los polinomios $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$, $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $R(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ y $S(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$, calcula:

a) m.c.m. $\{P(x), Q(x), S(x)\}$

b) m.c.d. $\{P(x), Q(x), R(x), S(x)\}$

10. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{a^3 + 9a^2 + 27a + 27}{a^2 - 9}$

b) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$

c) $\dfrac{a^4 - b^4}{2a^2 + 2b^2}$

d) $\dfrac{a^3 + a^2 + a - 3}{a^3 + 3a^2 + 5a + 3}$

11. Halla la expresión del polinomio $P(x)$, sabiendo que se cumple la relación: $\dfrac{P(x)}{x^2 - 3x} = \dfrac{x + 1}{x}$

12. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado todo lo posible.

a) $\left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)(x^4 + x^3)$

b) $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x} + \dfrac{1 - x}{1 + x}\right)\left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{4} - x\right)$

c) $\left(x + \dfrac{x}{x - 1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x - 1}\right)$

d) $\left(\dfrac{x - y}{x + y} + \dfrac{x + y}{x - y}\right)\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy} + 2\right)\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

Soluciones propuesta A

1. Sea $2x + 1$ el número natural, se tiene: $3\,(2x + 1) + (2x - 1)^2 - 10\,(2x + 1)$

2. a) Tanto el grado del polinomio suma como el del polinomio diferencia, es igual al mayor de los dos grados, es decir: grado $\{P(x) + Q(x)\}$ = grado $\{P(x) - Q(x)\} = 7$

b) El grado del polinomio producto es igual a la suma de los dos grados: grado $\{P(x) \cdot Q(x)\} = 10$

El grado de $[P(x)]^3 = 3 \cdot$ grado $\{P(x)\} = 3 \cdot 7 = 21$

c) El grado del polinomio cociente $C(x)$ es igual a la diferencia de los dos grados: grado $\{P(x) : Q(x)\} = 4$

El grado del resto puede ser como máximo 2, pues en caso contrario se podría continuar dividiendo.

El resto puede ser 0 en el caso en que $Q(x)$ sea un divisor de $P(x)$, por tanto su grado es como mínimo 0.

3. a) $(8xy - 4)^2 = 64x^2y^2 - 64xy + 16$

b) $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^2 = x^6 + 2x^2 + \frac{1}{x^2}$

c) $(x + 2y^2)\,(x - 2y^2) = x^2 - 4y^4$

d) $\left(-x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - x^2 = \frac{1 - x^4}{x^2}$

4. a) $4x^3 - 3x^2 - 2x + 14$

b) $-2x^3 - 4x^2 + 12x - 21$

c) $4x^2 + 5x + 20 + \frac{61}{x - 3}$

d) $8x^5 - 22x^4 + 41x^3 - 28x^2 + 6x + 15$

e) $4x^2 + 9x + 26 + \frac{89}{x - 3}$

f) $2x + \frac{1}{2} + \frac{-\frac{11}{2}x + \frac{1}{2}}{2x^2 - 3x + 5}$

5. a) $R = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = -1$

b) $(-1)^7 - 5 \cdot (-1)^4 = -6$

c) $R = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 - 9 = -13$

d) $R = 5^4 - 8 \cdot 5^2 + 5 = 430$

6. a) $R = 1 - k + 4 - 3 = 0 \Rightarrow k = 2$

b) $R = -2 + 4 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

7. Al ser divisible por $x - 1$, $P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + 2 - 3 + b = 0 \Rightarrow a + b = 0$

Al ser divisible por $x + 1$, $P(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a + 2 + 3 + b = 0 \Rightarrow -a + b = -6$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenemos $a = 3$, $b = -3$

8. Las posibles raíces enteras del polinomio son los divisores del término independiente.

a) Posibles raíces enteras: ± 1, ± 3

$P(1) = 1 + 3 - 1 - 3 = 0$ luego 1 es una raíz

$P(-1) = -1 + 3 + 1 - 3 = 0$ luego -1 es una raíz

$P(3) = 27 + 27 - 3 - 3 \neq 0$ luego 3 no es raíz

$P(-3) = -27 + 27 + 3 - 3 = 0$ luego -3 es la tercera raíz

b) $x^3 - 4x = x\,(x^2 - 4) = x\,(x - 2)\,(x + 2) \Rightarrow$ Las raíces son 0, 2 y -2.

9. Se puede extraer factor común: $P(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x = x\,(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6)$

Para factorizar el polinomio $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ se buscan las posibles raíces enteras: ± 1, ± 2, ± 3

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\
1 & & 1 & -4 & 1 & 6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \\
-1 & & -1 & 5 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & 0 & \\
2 & & 2 & -6 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & 0 & &
\end{array}$$

$P(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x = x\,(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6) = x\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$

10. Se factorizan los polinomios: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = (x + 2)\,(x - 2)\,(2x - 3)$; $Q(x) = x^4 - 8x^2 + 16 = (x + 2)^2\,(x - 2)^2$

a) m.c.d. $\{P(x), Q(x)\} = (x + 2)\,(x - 2) = (x^2 - 4)$

b) m.c.m. $\{P(x), Q(x)\} = (x + 2)^2\,(x - 2)^2\,(2x - 3) = (x^4 - 8x^2 + 16)\,(2x - 3) = 2x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 32x - 48$

11. a) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 4} = \dfrac{x(x^2 + 2x^2 - 8)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x(x+2)}{x-2}$

b) $\dfrac{x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2}{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x^5} = \dfrac{(x+2)(x-2)(x-3)x^2}{(x+1)(x-2)(x-3)x} = \dfrac{(x+2)x}{x+1}$

12. a) $\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x}\right) : \left(\dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 9x}\right) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x^2+3)} : \dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-3)(x+3)} = \dfrac{(x-1)(x-2)x(x-3)(x+3)}{x(x^2+3)(x+2)(x-2)} = \dfrac{(x-1)(x-3)(x+3)}{(x^2+3)(x+2)}$

b) $\left(1 - \dfrac{2x}{2x + \frac{2}{x}}\right)(x^2 + 1) = \left(1 - \dfrac{2x^2}{2x^2 + 2}\right)(x^2 + 1) = \left(\dfrac{2x^2 + 2 - 2x^2}{2x^2 + 2}\right)(x^2 + 1) = \dfrac{2}{2(x^2 + 1)}\,(x^2 + 1) = 1$

Soluciones propuesta B

1. Si el número se escribe xy, su valor igual a $10x + y$. Por otro lado se tiene: $x + y = 12$.

a) $10x + y = 10x + (12 - x) = 9x + 12$ b) $10x + y = 10(12 - y) + y = 120 - 9y$

2. a) $(x^3 + 2x^2 - 1)(x^2 + 6x + 3) = x^5 + 8x^4 + 15x^3 + 5x^2 - 6x - 3$

b) $(x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 10x + 6) : (x^2 - 5x + 1) = x^2 + 3x + 4 + \dfrac{7x + 2}{x^2 - 5x + 1}$

3. a) $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

b) $(3x^3 - 10)^2 = 9x^6 - 60x^3 + 100$

c) $(2x + 9y)^2 = 4x^2 + 36xy + 81y^2$

d) $(x^m + a^n)^2 = x^{2m} + 2x^m a^n + a^{2n}$

e) $\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 - 2x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4} = x^4 - 2 + \dfrac{1}{x^4}$

f) $(x^3y^3 - 2)(2 + x^3y^3) = x^6y^6 - 4$

g) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^4 + 2x + \dfrac{1}{x^2}$

h) $(a+b+c)(a-b-c) = (a+(b+c))\cdot(a-(b+c)) = a^2-(b+c)^2 = a^2-b^2-c^2-2bc$

4. a)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 0 & 6 \\ 4 & & 4 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

$(x^3 - 4x^2 + 6) : (x - 4) = x^2 + \dfrac{6}{x - 4}$

b)

$$\begin{array}{c|cccccc} & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & & -3 & 3 & -3 & 3 & -7 \\ \hline & 3 & -3 & 3 & -3 & 7 & -6 \end{array}$$

$(3x^5 + 4x + 1) : (x + 1) = 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + \dfrac{7}{x + 1}$

5. No hay una única solución. El polinomio más sencillo que cumple las condiciones es:

$P(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2) = x^3 - 7x + 6$

6. a) $R = 0 = P(-1) \Rightarrow 5 - m - 2 - 3 = 0 \Rightarrow m = 0$ b) $R = 0 = Q(5) \Rightarrow 75 - 5m + 10 = 0 \Rightarrow m = 17$

7. $P(x)$ es divisible por $x - 2 \Rightarrow P(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4a + 2b - 10 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1$

al dividir por $x - 1$ da resto $-5 \Rightarrow P(1) = -5 \Rightarrow 1 + a + b - 10 = -5 \Rightarrow a + b = 4$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene $a = -3$, $b = 7$

8. $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$ $Q(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

m.c.d. $\{P(x), Q(x)\} = 1 \Rightarrow$ Por tanto $P(x)$ y $Q(x)$ son primos entre sí.

9. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$ $R(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)^2(x - 3)$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x + 2)(x - 1)(x - 2)$ $S(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x + 3)(x - 3)(x - 1)$

a) m.c.m. $\{P(x), Q(x), S(x)\} = (x + 3)(x + 1)(x - 1)^2(x + 2)(x - 2)(x - 3) = x^7 - x^6 - 14x^5 + 14x^4 + 49x^3 - 49x^2 - 36x + 36$

b) m.c.d. $\{P(x), Q(x), R(x), S(x)\} = (x - 1)$

10. a) $\dfrac{a^3 + 9a^2 + 27a + 27}{a^2 - 9} = \dfrac{(a + 3)^3}{(a + 3)(a - 3)} = \dfrac{(a + 3)^2}{a - 3}$

c) $\dfrac{a^4 - b^4}{2a^2 + 2b^2} = \dfrac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)} = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$

b) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \dfrac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \dfrac{a + b}{a - b}$

d) $\dfrac{a^3 + a^2 + a - 3}{a^3 + 3a^2 + 5a + 3} = \dfrac{(a - 1)(a^2 + 2a + 3)}{(a + 1)(a^2 + 2a + 3)} = \dfrac{a - 1}{a + 1}$

11. $\dfrac{P(x)}{x^2 - 3x} = \dfrac{x + 1}{x} \Rightarrow P(x) = \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x)}{x} = \dfrac{(x + 1)x(x - 3)}{x} = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$

12. a) $\left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)(x^4 + x^3) = \left(\dfrac{1 - x + x^2}{x^3}\right)(x^3(x + 1)) = (x^2 - x + 1)(x + 1) = x^3 + 1$

b) $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x} + \dfrac{1 - x}{1 + x}\right)\left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{4} - x\right) = \left(\dfrac{(1 + x)^2 + (1 - x)^2}{1 - x^2}\right)\left(\dfrac{3 + x^2 - 4x^2}{4x}\right) = \left(\dfrac{2(1 + x^2)}{1 - x^2}\right)\left(\dfrac{3(1 - x^2)}{4x}\right) = \dfrac{3(1 + x^2)}{2x}$

c) $\left(x + \dfrac{x}{x - 1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x - 1}\right) = \left(\dfrac{x^2 - x + x}{x - 1}\right) : \left(\dfrac{x^2 - x - x}{x - 1}\right) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{x}{x - 2}$

d) $\left(\dfrac{x - y}{x + y} + \dfrac{x + y}{x - y}\right)\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy} + 2\right)\dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{2(x^2 + y^2)}{(x + y)(x - y)} \cdot \dfrac{(x + y)^2}{xy} \cdot \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{2(x + y)}{x - y}$