

1 - Variables aleatorias

1.1.- Definición e tipos de variable aleatoria

Sexa E o espazo mostral asociado a un experimento aleatorio. Chámase **variable aleatoria** (VA) a calquera función X que asocia a cada suceso S do espazo mostral un número real $x \in \mathbb{R}$:

$$X : S \in E \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

Normalmente, as variables aleatorias adoitan designarse coas letras maiúsculas X, Y, Z , etc. Os valores que toma a variable adoitan denotarse coa mesma letra minúscula e algún subíndice se é necesario: x, x_1, x_2, x_i, z_0 .

1.2.- Variables aleatorias discretas:

Unha **variable aleatoria** é **discreta** se toma só un **número finito** ou **contable** de valores. É dicir, os valores poden poñerse nunha lista, finita ou infinita: $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$

Se a variable aleatoria é discreta, sempre é posible asociar a cada un dos seus valores a probabilidade de que se produza este valor, sen que sexan todas nulas e ademais que a suma de todas elas sexa 1

Exemplos de variables aleatorias discretas:

- 1.- No experimento aleatorio de **lanzar unha moeda tres veces**, a variable aleatoria X = "Nº número de caras" só pode tomar os valores 0, 1, 2 ou 3.
- 2.- No experimento aleatorio de **lanzar unha moeda ata que saia cara**, a variable aleatoria X = "Nº de lanzamentos ata obter cara" pode tomar os valores $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- 3.- Nun **exame tipo test de 20 preguntas**, podemos definir X como a variable que mide o número de respostas acertadas. X poderá tomar os valores $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$.
- 4.- Sobre o experimento de **lanzar dous dados**, podemos definir diferentes variables aleatorias:
 - a) X = "Suma de ambos resultados", que pode tomar os valores $\{2, 3, \dots, 12\}$.
 - b) Y = "Diferencia entre o maior valor e o menor resultado", que pode tomar os valores $\{0, 1, \dots, 5\}$.
 - c) Z = "Máximo de ambos resultados", que pode tomar os valores $\{1, \dots, 6\}$.
- 5.- Se X é o **número de pezas defectuosas atopadas nun lote de 100**, X poderá tomar os valores $\{0, 1, 2, \dots, 100\}$.

1.3.- Variables aleatorias continuas:

Diremos que é **a variable aleatoria é continua** se pode tomar calquera valor dentro dun intervalo ou número real.

Exemplos de variables aleatorias continuas:

- 6.- Considera agora o experimento aleatorio que consiste en **escoller ao azar un estudante da aula** e a variable aleatoria X que asigna a cada un deles a súa estatura (en m). Esta variable aleatoria pode tomar calquera valor dentro do intervalo $[0, 3]$ de números reais.
 - 7.- Sabemos que un semáforo está en vermello durante 150 s e logo en verde durante 30 s. O tempo de espera (en s) é unha variable aleatoria T que toma valores entre 0 e 150.
 - 8.- Se medimos o tempo de consulta dun paciente no centro de saúde (en min) podemos dicir que está entre 0 e 60 min.
 - 9.- As medidas tales como pesos, tallas, tempos, etc tomadas nunha poboación de individuos son VA contínuas.
- É imposible asignar probabilidades aos valores dunha variable continua co mesmo método que nas variables discretas, pois P sería nula para todos os sucesos.

2 - Variables aleatorias discretas

2.1.- Función de probabilidade (para VA discretas)

Chámase función de probabilidade (ou distribución de probabilidade) dunha variable aleatoria discreta X á función que asigna a cada valor x_i da variable a probabilidade de que a variable tome dito valor:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$$

A función de probabilidade pode expresarse con unha expresión analítica, cunha gráfica ou cunha táboa de valores.

Exemplos:

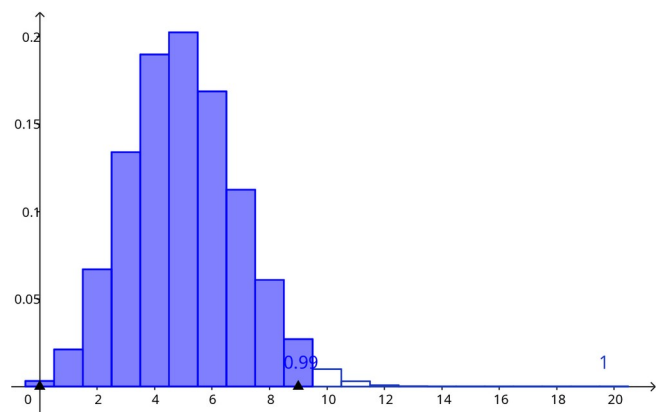
10.- No experimento aleatorio de **lanzar unha moeda tres veces**, a variable aleatoria $X = \text{"Nº número de caras"}$ ten a seguinte distribución de probabilidade:

x_i	0	1	2	3	outro caso
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	0

11.- No experimento aleatorio de **lanzar unha moeda ata que saia cara**, a variable aleatoria $X = \text{"Nº de lanzamentos ata obter cara"}$ ten a seguinte distribución de probabilidade:

x_i	0	1	2	3	4	...	k	...
$P(X = x_i)$	0	1/2	1/4	1/8		...	¿?	...

12.- Sexa un **exame tipo test de 20 preguntas**, onde cada pregunta ten 4 opcións e só unha é correcta. Sexa $X = \text{"número de respostas acertadas"}$ (*). A función de probabilidade é:



1 No experimento que consiste en tirar tres veces a unha diana, a variable aleatoria que asocia a cada realización deste experimento o número de acertos no branco pode tomar os valores 0, 1, 2 ou 3. Se sabemos que a persoa que lanza a frecha ten unha probabilidade de 0,4 de acertar no branco, calcula a a función de probabilidade desta variable utilizando a teoría de probabilidades (diagrama de árbore).

x_i	0	1	2	3	outro caso
$P(X = x_i)$					

2.2.- Función de distribución dunha variable aleatoria discreta

A **función de distribución F** permite obter as probabilidades acumuladas dunha distribución de probabilidade.

Esta función F asigna a cada número real x a probabilidade de que a variable aleatoria X tome un valor menor ou igual

que x :
$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{j=1}^i P(X = x_j)$$

A función $F(X)$ acumula a probabilidade. Se coñecemos a función de distribución dunha variable aleatoria, é posible determinar a probabilidade que toma un dos valores, xa que:

$$F(X_{i-1}) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{i-1}) \quad F(X_i) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{i-1}) + f(x_i) \quad F(X_i) - F(X_{i-1}) = f(x_i) = P(X = x_i)$$

Exemplo

Consideramos o experimento aleatorio “lanzar dous dados”. Queremos estudar a variable $X =$ “suma dos resultados obtidos”. É unha variable discreta, toma valores enteiros. A función de densidade é:

$$F(0) = P(X=0) = 0 \quad e \quad F(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0 + 0 = 0$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{36}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

$$F(12) = P(X \leq 12) = 1$$

2 A función de probabilidade dunha variable aleatoria X ven dada pola táboa:

x_i	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,18	0,25	0,3	0,12	0,15

Calcula as seguintes probabilidades: $P(X \leq 1)$; $P(X \leq 2)$; $P(X \leq 3)$; $P(X \leq 4)$; $P(X \leq 5)$

2.3.- Parámetros dunha variable aleatoria discreta.

A **media** é un valor central que indica as cantidades que corresponderían a cada suceso en caso dunha repetición igualitaria. Denótase por μ . Se a variable aleatoria toma os valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$, a

media se calcula da forma: $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$

A media dunha variable aleatoria tamén se chama **valor esperado** ou **esperanza matemática** e se pode escribir $\mu = E(X)$. Unha aplicación da esperanza matemática é determinar a equidade en xogos de azar. Se a esperanza matemática da variable “Ganancia do xogo” é 0, o xogo é equitativo. Se é maior que cero, ten vantaxe o xogador, e se é menor que 0, ten vantaxe o opoñente ou a banca.

Para unha variable aleatoria discreta X que toma valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ defínense:

◦ **Media aritmética** ou **esperanza matemática** da variable X : $\mu = \sum_i x_i \cdot f(x_i) = \sum_i x_i \cdot P(X=x_i) = \sum_i x_i \cdot p_i$

◦ **Varianza** da variable X : $\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) = \sum_i x_i^2 \cdot P(X=x_i) - \mu^2 = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$

◦ **Desviación típica** da variable X : $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

3 Completa a seguinte función de probabilidade e calcula os seus parámetros

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	p_2	0,1

4 Calcula a media, a varianza e a desviación típica da variable aleatoria que conta o número de caras que se obteñen ao lanzar simultaneamente tres moedas.

5 Calcula a media, a varianza e a desviación típica da variable aleatoria que indica a suma das puntuacións obtidas ao lanzar dous dados.

3 - Distribución binomial

3.1.- Distribución de probabilidade de variable discreta: a distribución binomial

Unha **experiencia dicotómica** é un experimento aleatorio no que só son posibles dous resultados, A e $\bar{A}$.

Habitualmente ao suceso A se lle chama **éxito** e a súa probabilidade denotase por **p**: $P(A)=p$ e $P(\bar{A})=1-p=q$

Experiencias dicotómicas	Repetir n veces a experiencia dicotómica e contar os éxitos
Sacar unha carta dunha baralla e mirar se é figura ou non.	Sacar n veces unha carta dunha baralla, mirar se é figura ou non, devolvela ao mazo e barallar. Contar o nº de figuras.
Mirar se un obxecto fabricado por unha máquina é defectuoso ou non.	Escoller aleatoriamente n obxectos fabricados por unha máquina e contar cantos son defectuosos.
Nun control de alcoholemia observar se unha persoa dá negativo.	Escoller aleatoriamente n persoas, facerlles o control de alcoholemia e contar cantas dan negativo.
Observar se nun lanzamento a canastra se encesta ou non.	En n lanzamentos a canastra, contar cantos se encesta.

- Supoñamos que repetimos **n** veces unha mesma experiencia dicotómica.
- Supoñamos tamén que os resultados de cada repetición do experimento NON dependen dos resultados anteriores (os valores de **p** e **q** non cambian por repetir o experimento).
- Consideramos a variable aleatoria **X="nº de éxitos ocorridos en n experimentos"**.

X é unha variable aleatoria discreta que pode tomar os valores $X=\{0, 1, 2, \dots, n\}$ e a súa distribución de probabilidade chámase **distribución binomial**.

Denotamos isto con **$X \sim B(n,p)$** , que significa que “a variable **X** segue unha distribución binomial de tipo **(n,p)**”, onde **n** é o nº de veces que se repite o experimento dicotómico e **p** é a probabilidade de éxito.

Experimento dicotómico E	Repetimos 5 veces o experimento	Contamos cantas veces sucede A	X= “nº de goles marcados en 5 lanzamentos de penaltis”
Lanzamento de penalti $E=\{G, \bar{G}\}$ $P(G)=0,82$ $P(\bar{G})=0,18$	T1: $G, \bar{G}, G, G, \bar{G}$ T2: $G, G, G, G, \bar{G}$ T3: $\bar{G}, \bar{G}, G, G, \bar{G}$ T4: G, G, G, G, G	$X=3$ $X=1$ $X=2$ $X=5$	X segue unha distribución binomial de parámetros $n=5$ e $p=0,82$ $X \sim B(5;0,82)$

Exemplo: Lanzamos 5 veces un dado e contamos o número de catros que saen. A variable aleatoria **X="nº de veces que sae o 4"** segue unha distribución binomial $B\left(5, \frac{1}{6}\right)$, pois:

- só nos interesan dous resultados: $A=$ “sacar 4” e $\bar{A}=$ “non sacar 4”
- a probabilidade de éxito (“sacar un 4”) é $P(A)=p=\frac{1}{6}$ e non varía ao repetir o experimento.
- estamos repetindo 5 veces o mesmo experimento e contamos o número de éxitos

A probabilidade de que una variable aleatoria X que segue unha distribución binomial $B(n,p)$ tome o valor k é:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ é o **número combinatorio** “n sobre k”
e $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é “**n factorial**” ou “**factorial de n**”.

Os parámetros dunha distribución binomial son a media μ e a desviación típica σ que se calculan facilmente coas expresións $\mu=np$ e $\sigma=\sqrt{npq}$

Exemplo: Calcular a probabilidade de obter exactamente 3 veces o nº 4 al lanzar 10 veces un dado.

Definimos claramente a nosa variable aleatoria: $X=$ "número de veces que sae o 4 en 10 lanzamentos"

Pode tomar os valores $X=\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$

Entón temos que $n=10$, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$ polo que a variable aleatoria X segue unha distribución $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$, que se escribe

$$X \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right). \text{ Entón } P(X=3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0,155$$

Recordade que $10!$ é o factorial de 10 e o seu valor é $10!=10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

Vídeo sobre a distribución binomial: <https://youtu.be/f0h4ldtbgiw>

Exercicios sobre a distribución binomial

6 Recoñece en cada un dos seguintes apartados unha distribución binomial e dei os valores de n , p , μ e σ :

a) Un exame tipo test consta de 50 preguntas, cada unha con tres posibles respostas das cales só unha é correcta. Respóndese o azar. Cal é o número esperado de preguntas acertadas?

b) No exame descrito no apartado anterior, un alumno coñece a resposta a 20 preguntas e contesta os restantes ao azar. Preguntámonos cantas acertará.

c) Unha moeda lánzase 400 veces. Número de caras.

d) O 1% de certas soldaduras son defectuosas e revisamos 1000 delas. Número de soldaduras defectuosas que haberá.

7 Nunha distribución binomial $B(9;0,2)$ calcula:

- a) $P(X < 3)$ b) $P(X \geq 7)$ c) $P(X \neq 0)$ d) $P(X \leq 9)$

8 Un exame tipo test consta de 10 preguntas, cada unha con 4 respostas das cales só 1 é correcta. Un alumno contesta o azar.

- a) Cal é a probabilidade de que conteste correctamente 4 preguntas? b) E a de que conteste ben máis de 2 preguntas?
c) E de que conteste mal todas as preguntas?

9 Unha urna contén 3 bolas vermellas e 7 verdes. Sácase unha ao azar, anótase a súa cor e devólvese á urna. Repítese esta experiencia 5 veces. Calcula a probabilidade de obter:

- a) Tres bolas vermellas. c) Máis de tres vermellas.
b) Menos de tres bolas vermellas. d) Algunha vermella.

10 A probabilidade de que un televisor sexa defectuoso é de 0,2. Si revísanse 7 televisores, calcula:

- a) P (ningún defectuoso) b) P (algún defectuoso)

11 Un sistema eléctrico está formado por 6 compoñentes independentes. A probabilidade de que falle un calquera dos compoñentes é 0,15. Acha a probabilidade de que:

- a) Non falle ningún. c) Fallen como moito 2 compoñentes.
b) Fallen exactamente 3 compoñentes. d) Fallen polo menos dous compoñentes se se sabe que polo menos fallou un.

12 O 10% das botellas de 1 litro de aceite de oliva enchidas por unha máquina envasadora conteñen, realmente, unha cantidade inferior a un litro. Un cliente compra unha caixa de 12 botellas envasadas nesa máquina.

- a) Determina a distribución da variable X = “número de botellas da caixa cunha cantidade inferior ao litro de aceite”.
- b) Cal é o número esperado de botellas na caixa que conteñen unha cantidade inferior a un litro? E a desviación típica?
- c) Calcula a probabilidade de que a caixa conteña polo menos 3 botellas con menos dun litro de aceite.
- d) Calcula a probabilidade de que na caixa haxa polo menos 3 botellas con menos dun litro de aceite se se sabe que hai polo menos unha.

13 No control de calidade do proceso de fabricación de baterías de litio, o 15% das unidades é rexeitado. Da produción dun determinado día elíxense ao azar 8 baterías. Calcula a probabilidade de que:

- a) Polo menos unha das baterías sexa rexeitada.
- b) O oito pasen o control de calidade.
- c) Cal é o número mínimo de baterías que deben ser inspeccionadas para que se rexeite polo menos unha das baterías con probabilidade maior de 0,9?

14 A probabilidade de que certo antibiótico presente unha reacción negativa ao administrarse a un paciente é de 0,15. Se se lles administrou este antibiótico a 10 pacientes, calcula as probabilidades de que haxa reacción negativa:

- a) En dous pacientes.
- b) En ningún paciente.
- c) En menos de tres pacientes.
- d) En tres ou máis pacientes.

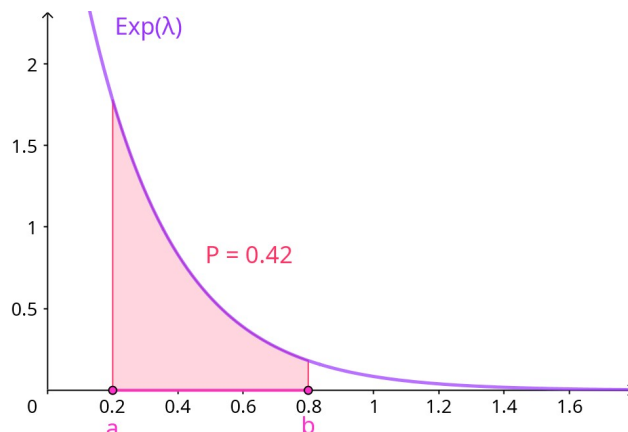
15 Sábese que un determinado fármaco produce efectos secundarios no 20% dos enfermos que se tratan con el. Tómasse unha mostra de 50 enfermos aos que se lles administra o fármaco. Cal é a probabilidade de que haxa como máximo 8 enfermos que sufran os efectos secundarios do fármaco?

4 - Distribución de probabilidade de variable continua

4.1.- Distribución de probabilidade de variable continua.

As distribucións de probabilidade de variable continua defínense por medio dunha función, $y=f(x)$, que se llama **función de densidade** e que cumpre:

- $f(x)$ é non negativa, é dicir, $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
- A área baixo a curva $y=f(x)$ é igual a 1, que se pode escribir como $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- A probabilidade de que a variable aleatoria tome un valor situado entre dous números a e b é igual á **área que hai baixo a curva no intervalo** (a,b) é dicir, $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- As probabilidades dos sucesos puntuais son cero, é dicir, $P(X=a) = P(X=b) = 0$ (a área é nula).
Polo tanto, $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$



4.2.- Distribución normal:

Definición e propiedades

Unha variable aleatoria X segue una **distribución normal** se a súa función de densidade é unha **curva normal** ou

campana de Gauss, que ten como expresión $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (non hai que entendela nin sabela). Diremos que

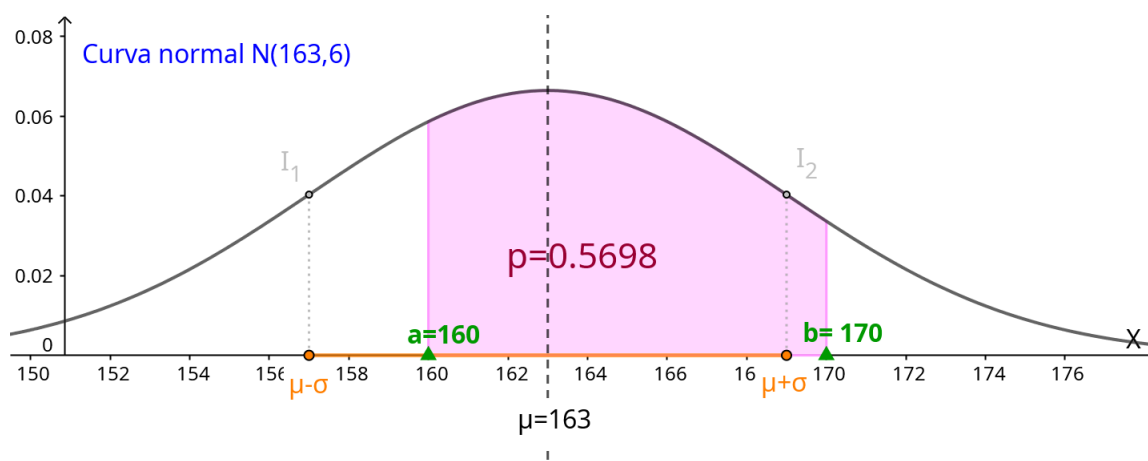
$X \sim N(\mu, \sigma)$, isto é, X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ . Para cada valor de μ e cada valor de σ hai unha curva normal diferente.

A curva normal é continua e simétrica respecto á recta $x=\mu$, onde tamén alcanza o seu único máximo. Ten dous puntos de inflexión en $x=\mu \pm \sigma$. O eixe de abscisas é unha asíntota horizontal en ambos lados.

A probabilidade de que a variable X tome valores entre a e b é a área da curva no intervalo (a,b) :

$$P(a < X < b) = \text{Área sobre o intervalo } (a,b)$$

Exemplo: Se $X = \text{"Estatuta das mulleres de España"}$, entón $X \sim N(163,6)$:



- A curva é simétrica respecto á recta $x=163$, onde alcanza o máximo.
- Ten dous puntos de inflexión en $x=157$ e $x=169$.
- $P(160 < X < 170) = \text{"Área sobre (160,170)"} = 0,570$
Logo o 57,0% das mulleres teñen unha altura comprendida entre 160 cm e 170 cm

- a estatura do 68% das mulleres está entre 157 e 169 cm.
- a estatura do 95% das mulleres está entre 151 e 175 cm.
- a estatura do 99,7% das mulleres está entre 145 e 181 cm.

4.3.- Cálculo de probabilidades na distribución normal

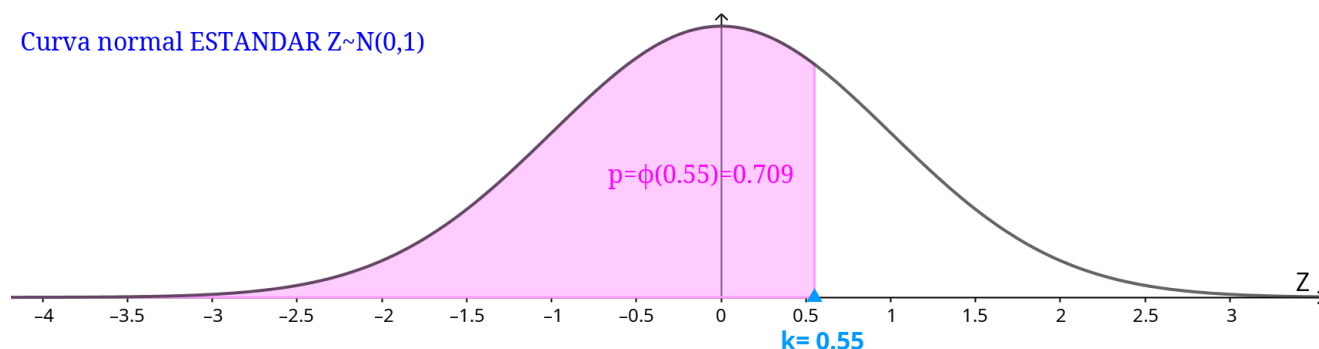
O cálculo de áreas baixo a curva normal non se pode realizar de forma exacta de ningún modo. As calculadoras máis comúns non teñen potencia para realizar sequera un cálculo aproximado. Usaremos unha táboa de valores.

Z, a distribución normal estándar

O número de distribucións normais é ilimitado, polo que é imposible ter unha táboa de probabilidades para cada combinación de μ e σ . Usaremos como referencia a distribución $N(0,1)$, que chamaremos **distribución normal estándar** e que representamos coa letra **Z**. As probabilidades de calquera outra variable diferente obtéñense a partir da $Z \sim N(0,1)$.

Cálculo de probabilidades coa táboa da distribución normal estándar

Curva normal ESTANDAR $Z \sim N(0,1)$



Sexa $k \in \mathbb{R}, k \geq 0$. Na táboa só aparece a probabilidade de que a variable tome un valor menor o igual que k , que se denota por $\phi(z) = P(Z \leq k)$. O resto de casos debe ser calculado usando as propiedades de simetría da curva normal:

16 Obter as seguintes probabilidades usando a táboa:

- | | | | |
|-------------------------|--------------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $P(z < 0,84)$ | b) $P(z < 1,5)$ | c) $P(z \leq 1,5)$ | d) $P(z \leq 2)$ |
| e) $P(z < 4)$ | f) $P(z \leq 0)$ | g) $P(z > 1)$ | h) $P(z < -1)$ |
| i) $P(z > 1,3)$ | j) $P(z < -1,3)$ | k) $P(z > -1,3)$ | l) $P(z = 1,24)$ |
| m) $P(1,24 < z < 1,93)$ | n) $P(-1,24 < z < 1,93)$ | o) $P(-2 < z \leq 2)$ | p) $P(-1 < z < 0,8)$ |

17 Indica o valor de k en cada caso

- | | | | |
|------------------------|------------------------|---------------------------|------------------------|
| a) $P(z < k) = 0,7019$ | b) $P(z < k) = 0,8997$ | c) $P(Z \leq k) = 0,5040$ | d) $P(Z < k) = 0,7054$ |
| e) $P(z < k) = 0,9533$ | f) $P(z < k) = 0,62$ | g) $P(Z \leq k) = 0,8888$ | h) $P(Z < k) = 0,9945$ |

4.4.- Tipificación da variable normal $X \sim N(\mu, \sigma)$

Sexa **X** unha variable aleatoria que segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ , ie, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Entón a variable $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, ie, é unha normal estándar. Podemos escribir directamente $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Este procedemento chámase **tipificar a variable**, e permite obter as probabilidades $P(X \leq k)$ mediante o cambio $x \rightarrow \frac{x - \mu}{\sigma}$

Exemplo: Se $X \sim N(6, 4)$ e temos que calcular a probabilidade $P(X \leq 9)$, teremos que tipificar X:

$$P(X \leq 9) = P\left(\frac{X - 6}{4} \leq \frac{9 - 6}{4}\right) = P(Z \leq 0,75) = 0,7734, \text{ sendo } Z \sim N(0, 1) \text{ a variable aleatoria normal estándar.}$$

18) Nunha distribución $X \sim N(173,6)$ calcula as seguintes probabilidades:

- a) $P(x > 160)$ b) $P(x < 160)$ c) $P(x > 180)$ d) $P(x \geq 124)$
 e) $P(124 < x < 193)$ f) $P(180 < x < 200)$ g) $P(170 \leq x \leq 200)$ h) $P(170 \leq x \leq 180)$

Vídeo: A distribución normal desde cero (9 min): https://youtu.be/2v_0AmKIuAA

19) A talla media dos 200 alumnos dun centro escolar é de 165 cm e a desviación típica, 10 cm. Si as tallas distribúense normalmente, calcula a probabilidade de que un alumno elixido ao azar mida máis de 180 cm. Cantos alumnos pode esperarse que midan máis de 180 cm?

20) Nunha cidade, as temperaturas máximas diarias durante o mes de xullo distribúense normalmente cunha media de 26 °C e unha desviación típica de 4°C. Cantos días se espera que teñan unha temperatura máxima comprendida entre 22 °C e 28 °C?

21) O número de visitantes que diariamente acoden a unha exposición distribúese segundo unha normal $N(2000, 250)$.

a) Acha a probabilidade de que nun día calquera o número de visitantes estea entre 1500 e 2100.

b) Nun mes de 30 días, cantos días cabe esperar que visiten a exposición máis de 2210 persoas?

22) O 20% dos alumnos con mellor nota dunha escola poden acceder a estudos superiores. Sabemos que as notas medias finais nesa escola distribúense normalmente con media 5,8 e desviación típica 2. Cal é a nota media mínima que debe obter un alumno se quere facer estudos superiores?

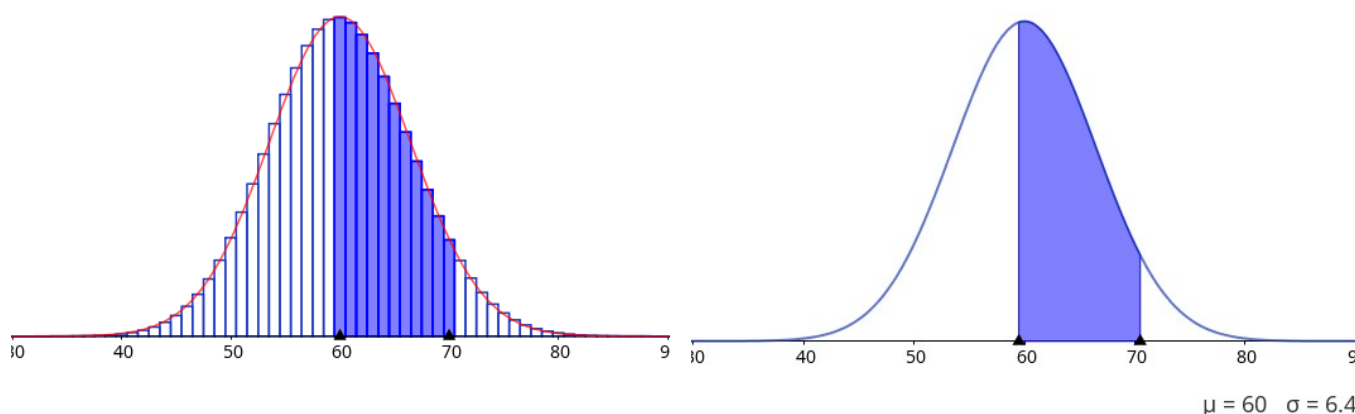
5 - Aproximación dunha distribución binomial por unha normal

Tomemos como exemplo unha variable binomial $X \sim B(200; 0,3)$. Polo tanto, a súa media é media $\mu = np = 200 \cdot 0,3 = 60$ e a desviación típica é $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = 6,48$.

Cando o valor de n é grande, as probabilidades dunha VA binomial van achegándose ás probabilidades dunha VA normal. Nestas gráficas, as áreas son practicamente iguais. No límite, cando $n \rightarrow \infty$, a binomial converteuse na normal:

$X \sim \text{Bin}(200; 0,3)$;
a área representa $P(60 \leq X \leq 70)$

$X' \sim N(60; 6,48)$;
a área representa $P(60 - 0,5 \leq X' \leq 70 + 0,5)$

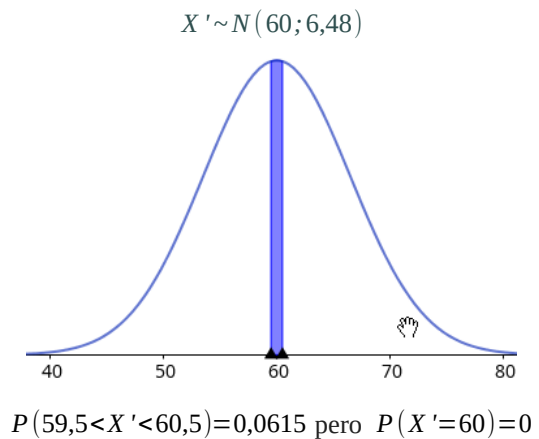
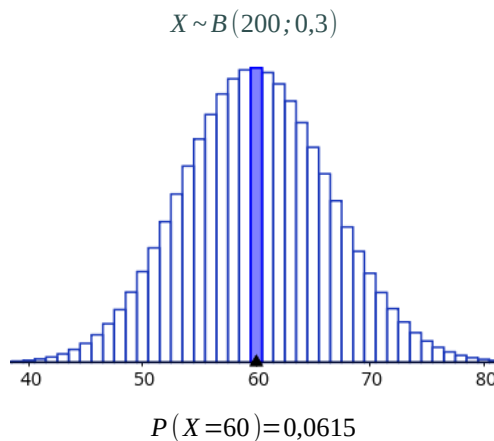


Aproximación dunha distribución binomial por unha normal (Moivre, 1733):

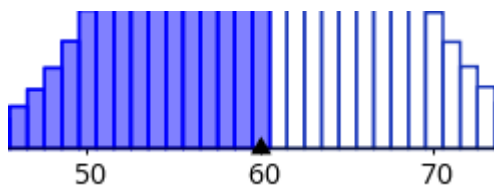
Se $n > 30$, $n \cdot p > 5$ e $n \cdot q > 5$, entón podemos aproximar $X \sim \text{Bin}(n, p)$ con unha normal $X' \sim N(np, \sqrt{npq})$

Corrección por continuidad:

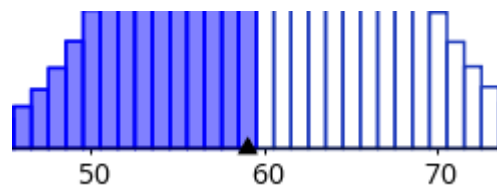
Finalmente, dado que estamos aproximando unha variable discreta (binomial) por una variable continua (normal), temos que aplicar unha **corrección por continuidad** ao calcular probabilidades, que consiste en **sumar ou restar 0,5 ao valor k** , dependendo de se o suceso inclúe ao valor k ou non:



$P(X=k) \approx P(k-0,5 \leq X' \leq k+0,5)$ porque nunha variable continua as probabilidades puntuais son nulas.



$P(X \leq k) \approx P(X' \leq k+0,5)$ para garantir que o valor k quede incluído na área do cálculo (k incluído)



$P(X < k) \approx P(X' \leq k-0,5)$ para garantir que X é estritamente menor que k (k excluído)

Exemplo: Continuando co exemplo anterior, sexa $X \sim B(200; 0,3)$ onde $\mu = np = 200 \cdot 0,3 = 60$ e $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = 6,48$. Como $np = 200 \cdot 0,3 > 5$ e $nq = 200 \cdot 0,7 > 5$ podemos aproximar $X \sim B(200; 0,3)$ por $X' \sim N(60; 6,48)$. Pero ao calcular $P(X > 70)$, $P(X \geq 85)$, $P(X < 90)$ e $P(X \leq 100)$ debemos facer o axuste de continuidade:

$$P(X > 70) = P(X' \geq 70,5) = P\left(Z \geq \frac{70,5 - 60}{6,48}\right) = P(Z \geq 1,62)$$

$$P(X \geq 85) = P(X' \geq 84,5); P(X < 90) = P(X' \leq 89,5) \text{ e } P(X \leq 100) = P(X' \leq 100,5)$$

Vídeo: Aproximación da binomial pola normal (21 min): <https://youtu.be/nXcZ4vOymEs>