Unidad 2: Fracciones y decimales

Una **fracción** no es más que un cociente de dos números enteros $\frac{a}{b}$ dónde a es el numerador y b el denominador.

- Dos **fracciones son equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad, por ejemplo $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ son fracciones equivalentes. Diremos que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$

- **Amplificación de fracciones**: si se multiplican los dos miembros de una fracción por el mismo número se obtiene una fracción equivalente. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

- **Simplificación de fracciones**: si se dividen los dos miembros de una fracción por el mismo número se obtiene una fracción equivalente. $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$
  Una fracción que no se puede simplificar se llama **irreducible**.

El conjunto de los números **racionales** está formado por todos los números enteros, junto con las fracciones. Todo número racional se puede expresar en forma de fracción de dos enteros. El conjunto de los números racionales se denota con la letra $\mathbb{Q}$

Para comparar, sumar y restar fracciones, tenemos que buscar fracciones equivalentes con el mismo denominador. Para **reducir fracciones a común denominador,** tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores y después multiplicar los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador correspondiente.

Ejemplo: Queremos reducir a común denominador las fracciones: $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{30}$ y $\frac{11}{20}$

- Primero calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores $mcm(12{,}30{,}20)$, para ello factorizamos estos números y escogemos los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

$$\underbrace{12=2^2\cdot 3\,,\,30=2\cdot 3\cdot 5\,,\,20=2^2\cdot 5}_{mcm(12,30,20)=2^2\cdot 3\cdot 5=60}$$

- Ahora en cada fracción, multiplicamos numerador y denominador, por el número adecuado para obtener 60 en el denominador y de esta forma conseguir las fracciones equivalentes a las iniciales con denominador común 60:

$$\frac{7}{12}=\frac{7\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{35}{60}\quad,\quad \frac{13}{30}=\frac{13\cdot 2}{30\cdot 2}=\frac{26}{60}\quad,\quad \frac{11}{20}=\frac{11\cdot 3}{20\cdot 3}=\frac{33}{60}$$

1.- OPERACIONES CON FRACCIONES

Fracción de una cantidad

$\frac{a}{b}\ de\ C=\frac{a}{b}\cdot C$ es dividir C por b y multiplicarlo por a.

Ejemplo: $\frac{7}{8}\ de\ 120=\frac{7}{8}\cdot 120=120:8\cdot 7=105$

Suma y resta de fracciones

- Si las fracciones tienen el **mismo denominador**, se mantiene el denominador y se suman o restan los numeradores.

  Ejemplos: $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$ $\quad\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

- Si las fracciones tienen **diferente denominador**, se reducen a común denominador y luego sumamos o restamos los numeradores.

  Ejemplos: $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{7}{6}$ $\quad\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

- NOTA.- Si aparece un **número entero**, lo sustituimos por si fracción equivalente.

  Ejemplo: $2=\frac{2}{1}$ por lo tanto, $2+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{2}{1}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{12}{6}+\frac{1}{6}-\frac{2}{6}=\frac{11}{6}$

Multiplicación de fracciones

- Para multiplicar fracciones, se realiza el producto en linea (numerador por numerador y denominador por denominador): $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

Ejemplo: $\frac{6}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

- Potencia de una fracción, si elevamos un fracción a un número entero n, se elevan numerador y denominador $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

  Ejemplo: $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$

División de fracciones

- La inversa de una fracción $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

  Ejemplo: La fracción inversa de $\frac{6}{4}$ es $\frac{4}{6}$

- El cociente de dos fracciones se calcula multiplicando en cruz: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Ejemplo: $\frac{6}{4}:\frac{2}{5}=\frac{6\cdot 5}{4\cdot 2}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$

Potencia de fracciones

Se obtiene haciendo la potencia del numerador y del denominador $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo: $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4^3}{3^3}=\frac{64}{27}$

Raíz de fracciones

Se obtiene haciendo la raíz del numerador y del denominador $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Ejemplo: $\sqrt{\frac{64}{25}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}}=\frac{8}{5}$

Operaciones combinadas

Las operaciones combinadas con fracciones siguen el mismo orden que las operaciones con números enteros.

2.- DECIMALES

Para expresar cantidades comprendidas entre dos números enteros, utilizamos los números decimales.

$$\underbrace{7}_{\text{Parte entera}},\underbrace{653}_{\text{Parte decimal}}$$

Clases de números decimales:

- Decimales **exactos**: tienen un número limitado de cifras decimales, por ejemplo $4{,}75$
- Decimales **periódicos**: tienen infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente, pueden ser de dos tipos, periódico puro o mixto. Decimal periódico puro: $7{,}151515\ldots=7{,}\widehat{15}$. Decimal periódico mixto: $8{,}2464646\ldots=8{,}2\widehat{46}$
- Decimales **no exactos y no periódicos**: tienen infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente, por ejemplo $\pi=3{,}14159\ldots\ y\ \sqrt{2}=1{,}41421\ldots$ El conjunto de este tipo de decimales recibe el nombre de irracionales.

3. FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES

Paso de fracción a decimal:

Para obtener la expresión decimal de una fracción , se efectúa la división del numerador entre el denominador. El cociente puede ser:

- Un número entero: cuando el numerador es divisible por el denominador. $\frac{12}{6}=2$

- Un decimal exacto: si el denominador de la fracción simplificada solo tiene los factores primos 2 y 5 (o alguno de ellos). $\frac{3}{8}=0{,}375$
- Un decimal periódico: si el denominador de la fracción simplificada tiene algún factor primo distinto de 2 y 5. $\frac{11}{3}=3{,}\hat{6}$

Paso de decimal a fracción:

- Paso de decimal exacto a fracción. $0{,}7=\frac{7}{10}$ $\quad 1{,}25=\frac{125}{100}=\frac{5}{4}$

- Paso de decimal periódico a fracción.

Método	Periódico puro	Periódico mixto
1) Llamamos *A* al número periódico	$A=1{,}\widehat{16}=1{,}16161616\ldots$	$B=0{,}62\hat{7}=0{,}6277777\ldots$
2) Multiplicamos A por un múltiplo de 10 para hacer coincidir la mayoría de decimales (infinitos) 3) Restamos a este nuevo número el número A original	$\begin{array}{rcl} 100\cdot A & = & 116{,}16161616\ldots \\ A & = & 1{,}16161616\ldots \\ \hline 99\cdot A & = & 115{,}0000\ldots \Rightarrow \end{array}$	$\begin{array}{rcl} 10\cdot B & = & 6{,}2777777\ldots \\ B & = & 0{,}6277777\ldots \\ \hline 9\cdot B & = & 5{,}550000\ldots \Rightarrow \end{array}$
4) Despejamos A como en una ecuación. Si el decimal es periódico mixto, amplificamos la razón para convertir en fracción	$\Rightarrow A=\frac{115}{99}$	$\Rightarrow B=\underbrace{\frac{5{,}55}{9}}_{razón}=\underbrace{\frac{555}{900}}_{fracción}$

4. POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO

Se basan en la definición de número inverso de otro ya que el inverso de a se escribe como a^{-1} y es igual a $\frac{1}{a}$

El inverso de una fracción parece más intuitivo, porque basta con intercambiar numerador y denominador: $Inv\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$

Propiedad	Ejemplo
$a^{-1}=\frac{1}{a}$	$3^{-1}=\frac{1}{3}$
$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{n}=\frac{1}{a^{n}}$	$3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1}{3^{2}}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$	$\left(\frac{5}{8}\right)^{-3}=\left(\frac{8}{5}\right)^{3}$

Las propiedades de las potencias vistas en la unidad anterior son también válidas para las fracciones

Propiedad	Fracciones
Potencia de un producto	$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{n}$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}:\left(\frac{c}{d}\right)^{n}$
Producto de potencias con la misma base	$\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot}\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
Cociente de potencias con la misma base	$a^{m}:a^{n}=\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{m}:\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
Potencias de exponente cero	$\left(\frac{a}{b}\right)^{0}=1$
Potencia de otra potencia	$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right)^{m}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$