

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

Matrices y determinantes

Prueba 1

1. Si A es una matriz de orden 3, que verifica $A^5 - 4I = 5A$. Hallar A^{-1} en función de A.
2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y sean B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3. Hallar el rango de la matriz $A \cdot B^t - 2 \cdot I$.
3. Determina una matriz antisimétrica X de orden 2 tal que $X \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$
4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Calcular el valor de x para que se verifique $A - B + \frac{1}{2}C = 3I$.

1. $A^5 - 4I = 5A \quad \parallel \quad A^5 - 5A = 4I \quad \parallel \quad A \cdot (A^4 - 5I) = 4I \quad \parallel \quad A \cdot \underbrace{\frac{1}{4}(A^4 - 5I)}_{A^{-1}} = I$

$M \cdot M^{-1} = I$ $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^4 - 5I)$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $AB^t - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3x1 1x3

$\text{rg}(AB^t - 2I) = 3$ pues $\det(AB^t - 2I) = -8 \neq 0$

3. Matriz antisimétrica

$A = -A^t$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a=0 \\ c=-b \\ d=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

De aquí,

$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5b = 15 \\ -3b = -9 \end{cases} \quad b=3$

$X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$A - B + \frac{1}{2}C = 3I \quad \parallel \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$3 - x - \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

1. a) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden dos, cuyos elementos vienen dados por la expresión $a_{ij} = i^2 - 2j$. Calcular la inversa de A .

b) Estudiar, en función del parámetro real λ , el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

a) Sea $A = (a_{ij})$
 $a_{ij} = i^2 - 2j \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = 1^2 - 2 \cdot 1 & a_{12} = 1^2 - 4 \\ a_{21} = 2^2 - 2 \cdot 1 & a_{22} = 2^2 - 4 \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A^t)}{\det A}$$

1) $\det A = 6 \neq 0$

2) $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det A = (2-\lambda)^2(-\lambda) - 1 - 1 + \lambda - (2-\lambda) - (2-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Casos:

1) Si $\lambda \neq -1, 2, 3 \Rightarrow \text{rg } A = 3 //$

2) Si $\lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } A = 2 //$

3) Si $\lambda = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } A = 2 //$

4) Si $\lambda = 3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } A = 2 //$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

2. a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el valor de α y β para que se cumpla $A^{-1} = A^t$.

b) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 para la cual se cumple que $3A^{-1} - 4A^t = 0$ ¿cuánto vale el determinante de A ?

c) Sea $A = \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 \\ 1/2 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para $a = 2025$, calcular $\det(3A^{-1}A^t)$

a) $A^{-1} = A^t \parallel \underbrace{A \cdot A^{-1}}_I = A \cdot A^t \leadsto A \cdot A^t = I$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 1 & \alpha = \pm 1 \\ \beta^2 + 1 = 1 & \beta = 0 \end{cases}$$

b) $3A^{-1} - 4A^t = 0 \parallel 3A^{-1} = 4A^t \Rightarrow \det(3A^{-1}) = \det(4A^t) \parallel 9\det(A^{-1}) = 16\det(A)$

$$\frac{9}{\det A} = 16 \cdot \det A \leadsto (\det A)^2 = \frac{9}{16} \quad \boxed{\det A = \pm \frac{3}{4}}$$

c) $\det(3A^{-1}A^t) \parallel 3^3 \det(A^{-1}A^t) = 27 \det A^{-1} \cdot \det A^t = \boxed{27}$

$$\begin{aligned} \det A^t &= \det A \\ \det A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \end{aligned}$$

3. a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Determinar la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C^t$ y la dimensión de N para que $N^t \cdot C \cdot B$ sea una matriz cuadrada.

b) Determinar los términos de la tercera columna de la matriz B , sabiendo que el producto $A \cdot B$ es una matriz escalar de determinante 8 siendo A la matriz de filas $(1,0,2)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,4)$.

a) $A \cdot M \cdot C^t$

$$\begin{matrix} 2 \times 3 & a \times b & 2 \times 3 \\ \hline \end{matrix} \quad \parallel \quad \begin{matrix} N^t \cdot C \cdot B = \text{matriz cuadrada} \\ \hline \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a \times b & 3 \times 2 & 2 \times 2 \\ \hline \end{matrix} \quad \parallel \quad \begin{matrix} N_{3 \times 2} \end{matrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ siendo $\lambda^3 = 8 \leadsto \lambda = 2$

De aquí,

$$\begin{cases} a_{13} + 2a_{33} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{13} + 4a_{33} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{13} = -2 \\ a_{33} = 1 \end{cases}$$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y sean B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

Despejar y calcular la matriz X que verifica: $AB^tX - X = 2B$.

$$AB^tX - X = 2B$$

$$(AB^t - I)X = 2B$$

$$\underbrace{(AB^t - I)^{-1} \cdot (AB^t - I)}_I X = (AB^t - I)^{-1} \cdot 2B \Rightarrow X = (AB^t - I)^{-1} \cdot 2B //$$

$$\bullet AB^t - I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet (AB^t - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

5. Dadas las matrices $A = (-1 \ 0 \ 1)$, $B = (3 \ 0 \ 1)$ y $C = (4 \ -2 \ 0)$, y sean B^t y C^t las matrices traspuestas de B y C respectivamente.

Despejar y calcular la matriz X que verifica $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$.

$$B^t A X + C^t = X \quad // \quad B^t A X - X = -C^t \quad // \quad (B^t A - I) \cdot X = -C^t$$

$$\underbrace{(B^t A - I)^{-1} \cdot (B^t A - I)}_I \cdot X = (B^t A - I)^{-1} \cdot (-C^t) \Rightarrow \underline{X = (B^t A - I)^{-1} \cdot (-C^t)}$$

$$\bullet B^t A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1 \ 0 \ 1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet (B^t A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}}$$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

6. a) Hallar todas las matrices $A = (a_{ij})$, cuadradas de orden dos, tales que $A + A^t = 4I$, siendo I la matriz identidad de orden y A^t la matriz traspuesta de A , de las que además se sabe que su determinante vale 15.

b) Estudiar, en función del parámetro real "m", el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$$

a) $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A + A^t = 4I \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11} = 4 & a_{11} = 2 \\ a_{12} + a_{21} = 0 \\ 2a_{22} = 4 & a_{22} = 2 \end{cases}$$

Como $\det A = 15$ $4 - a_{12} \cdot a_{21} = 15 \parallel 4 + a_{12}^2 = 15$

$$a_{12} = \pm\sqrt{11} \quad y \quad a_{21} = \mp\sqrt{11}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{11} \\ -\sqrt{11} & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{11} \\ \sqrt{11} & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\det A = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 = 0 \quad m=0$

Casos:

1) Si $m \neq 0$ $\text{rg} A = 3$

2) Si $m=0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\text{rg} A = 1$

7. a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \alpha & 0 \\ \beta & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el valor de α y β para que se cumpla $A^{-1} = A^t$.

b) Sea M una matriz simétrica de orden 3, con $\det(M) = -1$. Calcula, razonando la respuesta, el determinante de $3M + 2M^t$, siendo M^t la matriz traspuesta de M .

c) Si A es una matriz tal que $A^3 + 2I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula de orden 3, Calcula el determinante de A^{15} .

a) $A^{-1} = A^t \parallel \underbrace{A \cdot A^{-1}}_I = A \cdot A^t \Rightarrow A \cdot A^t = I$

De aquí, $\frac{1}{4} + \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha = 0 \quad \alpha = \beta \quad \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $M = M^t$ pues M simétrica $\leadsto \det(3M + 2M^t) = \det(5M) = 5^3 \cdot \det(M) = -125$
 $\det M = -1$

c) $A^3 + 2I = O$ $\left\{ \begin{array}{l} \det(A^{15}) = \det A^3 \cdot \det A^3 \cdot \det A^3 \cdot \det A^3 \cdot \det A^3 = (-8)^5 \\ \det A^3 = \det(-2I) = (-2)^3 \cdot \det I = -8 \end{array} \right.$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

8. a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Determinar la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M^t \cdot C^t$ y la dimensión de N para que $N^t \cdot B^{-1} \cdot C^t$ sea una matriz cuadrada.

b) Calcular el rango ($A^t \cdot C^t$).

a) $A \cdot M^t \cdot C^t$
 $\begin{matrix} 2 \times 3 & a \times b & 2 \times 3 \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \end{matrix}$

$M^t_{3 \times 2} \Rightarrow M_{2 \times 3}$

$N^t \cdot B^{-1} \cdot C^t$
 $\begin{matrix} c \times d & 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & & \end{matrix}$

$N^t_{3 \times 2} \Rightarrow N_{2 \times 3}$

b) $A^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A^t \cdot C^t) = 0$

$\begin{matrix} 3 \times 2 & 2 \times 3 \end{matrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{rg}(A^t \cdot C^t) = 2$

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de γ para los que $A + \gamma I$ no tiene inversa.

b) Calcula, si existe, la inversa de $A - 2I$.

c) Calcula la matriz X tal que $XA + A^t = 2X$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

a) $A + \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1+\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A + \lambda I) = 0 \quad (-1+\lambda)^2(1+\lambda) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \boxed{\lambda = 1} \\ \searrow \boxed{\lambda = -1} \end{matrix}$

para que $A + \lambda I$
no tiene
inversa

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

b)

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$(\lambda = -2)$

$$\det(A - 2I) = -9 \neq 0$$

$$(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$XA + A^t = 2X$$

$$XA - 2X = -A^t \quad // \quad X(A - 2I) = -A^t$$

$$\underbrace{X(A - 2I)(A - 2I)^{-1}}_I = -A^t(A - 2I)^{-1} \Rightarrow X = -A^t(A - 2I)^{-1}$$

$$X = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

10. Sea " γ " un número real y considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & \gamma \\ 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & -1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$

a) Estudiar si existe algún valor de γ para el cual la matriz $A \cdot B$ no tenga inversa.

b) Estudiar el rango de la matriz $B \cdot A$ en función del parámetro γ .

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A \cdot B) = -1 \neq 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists (A \cdot B)^{-1}$$

$$b) B \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 + 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 - \lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B \cdot A) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \leadsto \text{rg}(B \cdot A) \leq 2$$

$$\text{rg}(B \cdot A) = 2$$

Casos:

$$1) \text{ Si } \lambda = 0 \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$2) \text{ Si } \lambda \neq 0$$

$$|\lambda \lambda^2 + 1| \neq 0 \rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 + 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 - \lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} = 2$$

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Hallar los valores de γ para los que la matriz $M = A + (\gamma - 1) \cdot B$ tiene rango menor que 3.

b) Para $\gamma = 0$, hallar la inversa de la matriz M .

$$a) M = A + (\lambda - 1) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det M = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\boxed{\lambda = -1}$$

$$\boxed{\lambda = 2}$$

$$b) \lambda = 0 \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det M = -4 \neq 0$$

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{adj}(M^t) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Despejar y hallar la matriz X tal que $A \cdot B + C \cdot X = D$.

b) Sea una matriz cuadrada M de orden 2 tal que $\det(3M^2) = 36$, calcular $\det(2M^{-1})$ y $\det(M^t/4)$

$$a) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D - AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB + CX = D$$

$$CX = D - AB$$

$$\underbrace{C^{-1} \cdot C}_I X = C^{-1} (D - AB)$$

$$X = C^{-1} (D - AB)$$

b) $M_{2 \times 2}$

$$\det(3M^2) = 36 \quad // \quad 3^2 \det(M^2) = 36 \quad // \quad \det(M^2) = 4 \quad \leadsto \quad \det M = \pm 2$$

$\underbrace{\det(M^2)}_{(\det M)^2}$

$$\bullet \quad \det(2M^{-1}) = 2^2 \det(M^{-1}) = 4 \frac{1}{\det M} = \underline{\underline{\pm 2}}$$

$$\bullet \quad \det\left(\frac{M^t}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \det(M^t) = \frac{1}{16} \det M = \underline{\underline{\pm \frac{1}{8}}}$$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

13. a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular los valores de m para que la matriz inversa de M sea $M/4$.

b) Calcular el valor del determinante de la matriz $(3A^4) \cdot (4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de tres columnas cuyo determinante vale -1 .

$$a) \quad M \cdot M^{-1} = M \cdot \frac{M}{4} = I \quad // \quad M \cdot M = 4I \quad \leadsto \quad \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 + m + 4 = 4 & \rightarrow m = -1 \\ m^2 + 5m + 4 = 0 & \rightarrow m = 0 \\ m + 1 = 0 \leadsto m = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases} \quad \boxed{m = -1}$$

b) $A_{3 \times 3}$ y $\det A = -1$

$$\det(3A^4) \cdot (4A^2)^{-1} = 3^3 \det(A^4) \cdot \frac{1}{4^3 \det(A^2)} = \frac{3^3}{4^3} \det(A^2)^{-1} = \frac{3^3}{4^3} \det(A^2)^{-1} = \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^3}$$

14. Se consideran las matrices A y B dadas por: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcular la matriz D tal que $B \cdot (D^t + A^{-1}) \cdot B^{-1} = 2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 .

$$B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I \quad // \quad \underbrace{B^{-1} \cdot B}_I (D^t + A^{-1}) \underbrace{B^{-1} \cdot B}_I = \underbrace{B^{-1} \cdot 2I \cdot B}_{2I}$$

$$D^t + A^{-1} = 2I$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\text{adj}(A^t)}{\det A}}$$

1) $\det(A) = -2$

2) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^t = 2I - A^{-1} \quad // \quad D^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIOS DE EXÁMENES (2024-2025)

15. a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 2 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1} \cdot B + A) = -1$.

a) Matriz antisimétrica $A = -A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ 1 & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-1 \\ d=0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 2 & b_{22} \end{pmatrix}$

• B no tiene inversa $\Leftrightarrow \det B = 0 \rightarrow \boxed{b_{12} = 0}$

• $\det(A^{-1}B + A) = -1 \Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -1$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \quad \boxed{b_{22} = 2}$$