F. JAVIER RODRÍGUEZ DE ABAJO
VÍCTOR ÁLVAREZ BENGOA

DIBUJO TÉCNICO

1º Bachillerato

EDITORIAL DONOSTIARRA
Pokopandegi, nº 4 - Pabellón Igaralde - Barrio Igara
Apartado 671 - Teléfonos 943 215 737 - 213 011 - Fax 943 219 521
20018 - SAN SEBASTIÁN
info@editorialdonostiarra.com - www.editorialdonostiarra.com

A LA MEMORIA DE MIS PADRES

Testamento:
"Hijo: sé bueno y trabajador,
que si así lo haces,
está la Casa salvada."

"Lo importante no es morir,
sino vivir hasta el fin.
Morir es, literalmente, arribar.
Más que nunca interesa
que el piloto esté al timón."

Autores: F. Javier Rodríguez de Abajo
Víctor Álvarez Bengoa

Edita: Editorial Donostiarra
Pokopandegi, 4 - Pabellón Igaralde - Barrio Igara
Apartado 671 - San Sebastián (España)

Impreso en España - Printed in Spain

Imprime: Gráficas CEMS, S.L.
Polígono Industrial San Miguel
31132 VILLATUERTA (Navarra) Spain

Diseño portada: Alberto Arranz
Maquetación: Alberto Arranz

Corrección: David Aguilar

ISBN: 978-84-7063-381-2

Depósito legal: NA-441-2010

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El Dibujo Técnico surge en la cultura universal como un medio de expresión y comunicación indispensable, tanto para el desarrollo de procesos de investigación sobre las formas, como para la comprensión gráfica de bocetos y proyectos tecnológicos y artísticos, cuyo último fin sea la creación de productos que puedan tener un valor utilitario, artístico, o ambos a la vez. La función esencial de estos proyectos consiste en ayudar a formalizar o visualizar lo que se está diseñando o creando y contribuye a proporcionar, desde una primera concreción de posibles soluciones, hasta la última fase del desarrollo donde se presentan los resultados en dibujos definitivamente acabados.

Es necesario el conocimiento de un conjunto de convenciones que están recogidas en las normas para el Dibujo Técnico, que se establecen en un ámbito nacional e internacional.

La asignatura favorece la capacidad de abstracción para la comprensión de numerosos trazados y convenciones, lo que la convierte en una valiosa ayuda formativa de carácter general.

Se aborda el Dibujo Técnico en dos cursos, de manera que se adquiera una visión general y completa desde el primero, profundizando y aplicando los conceptos en las soluciones técnicas más usuales en el segundo.

Los contenidos se desarrollan de forma paralela en los dos cursos, pero en sus epígrafes se aprecia el nivel de profundización y se determinan, con mayor o menor concreción, las aplicaciones y ejercicios específicos.

En resumen, cada curso, al enunciar sus contenidos, tiene por objeto consolidar los conocimientos anteriores, ahondar en el nivel de profundización y buscar aplicaciones técnico-prácticas.

OBJETIVOS

La enseñanza del Dibujo técnico en el bachillerato tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Utilizar adecuadamente y con cierta destreza los instrumentos y terminología específica del dibujo técnico.
2. Valorar la importancia que tiene el correcto acabado y presentación del dibujo en lo referido a la diferenciación de los distintos trazos que lo configuran, la exactitud de los mismos y la limpieza y cuidado del soporte.
3. Considerar el dibujo técnico como un lenguaje objetivo y universal, valorando la necesidad de conocer su sintaxis para poder expresar y comprender la información.
4. Conocer y comprender los principales fundamentos de la geometría métrica aplicada para resolver problemas de configuración de formas en el plano.
5. Comprender y emplear los sistemas de representación para resolver problemas geométricos en el espacio o representar figuras tridimensionales en el plano.
6. Valorar la universalidad de la normalización en el dibujo técnico y aplicar la principales normas UNE e ISO referidas a la obtención, posición y acotación de las vistas de un cuerpo.
7. Emplear el croquis y la perspectiva a mano alzada como medio de expresión gráfica y conseguir la destreza y la rapidez necesarias.
8. Planificar y reflexionar, de forma individual y colectiva, sobre el proceso de realización de cualquier construcción geométrica, relacionándose con otras personas en las actividades colectivas con flexibilidad y responsabilidad.
9. Integrar sus conocimientos de dibujo técnico dentro de los procesos tecnológicos y en aplicaciones de la vida cotidiana, revisando y valorando el estado de consecución del proyecto o actividad siempre que sea necesario.
10. Interesarse por las nuevas tecnologías y los programas de diseño, disfrutando con su utilización y valorando sus posibilidades en la realización de planos técnicos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

1. Utilizar la observación para obtener información y conocer más sobre la naturaleza, el arte y los objetos y espacios construidos y sus representaciones bidimensionales.

   Con este criterio se pretende averiguar si el alumnado es capaz, a través de la observación atenta, de identificar los elementos que sustentan la aplicación de la geometría en el arte y en su entorno, natural o construido, obteniendo a partir de la observación la información que hace posible un mejor conocimiento de todo ello, de sus relaciones, de su utilidad, etc. Asimismo se ha de valorar la capacidad de observar y obtener información útil de las representaciones bidimensionales de los objetos y los espacios.

2. Resolver problemas geométricos, valorando el método y el razonamiento utilizados en las construcciones, así como su acabado y presentación.

   Con la aplicación de este criterio se pretende averiguar el nivel alcanzado por el alumnado en el dominio de los trazados geométricos fundamentales en el plano y su aplicación práctica en la construcción de triángulos, cuadriláteros y polígonos en general, construcción de figuras semejantes y transformaciones geométricas.

3. Utilizar y construir escalas gráficas para la interpretación de planos y elaboración de dibujos.

   Este criterio indicará en qué medida se ha comprendido el fundamento de las escalas, no sólo como concepto abstracto matemático sino para aplicarlas a distintas situaciones que pueden darse en la vida cotidiana, ya sea para interpretar las medidas en un plano técnico, mapa o diagrama, o para elaborar dibujos tomados de la realidad.

4. Diseñar y/o reproducir formas no excesivamente complejas, que en su definición contengan enlaces entre la circunferencia y recta y/o entre circunferencias.

   A través de este criterio se valorará la aplicación práctica de los conocimientos técnicos de los casos de tangencias estudiados de forma aislada. Se valorará especialmente el proceso seguido para su resolución, así como la precisión en la obtención de los puntos de tangencia.

5. Elaborar y participar activamente en proyectos de construcción geométrica cooperativos, aplicando estrategias propias adecuadas al lenguaje del dibujo técnico.

   La aplicación de este criterio permitirá evaluar si el alumnado es capaz de trabajar en equipo, mostrando actitudes de tolerancia y flexibilidad.

6. Emplear el sistema de planos acotados, bien para resolver problemas de intersecciones, bien para obtener perfiles de un terreno a partir de sus curvas de nivel.

   Mediante la aplicación de este criterio, se evaluará el nivel de conocimiento del sistema de planos acotados para utilizarlos en la resolución de casos prácticos como los propuestos. La utilización de escalas permitirá igualmente conocer el nivel de integración de los conocimientos que se van adquiriendo.

7. Utilizar el sistema diédrico para representar figuras planas y volúmenes sencillos y formas poliédricas, así como las relaciones espaciales entre punto, recta y plano. Hallar la verdadera forma y magnitud y obtener sus desarrollos y secciones.

   La aplicación de este criterio permitirá conocer el grado de abstracción adquirido y, por tanto, el dominio o no del sistema diédrico para representar en el plano elementos situados en el espacio, relaciones de pertenencia, posiciones de paralelismo y perpendicularidad o distancia.

8. Realizar perspectivas axonométricas de cuerpos definidos por sus vistas principales y viceversa, ejecutadas a mano alzada y/o delineadas.

   Con este criterio se pretende evaluar tanto la visión espacial desarrollada por el alumnado, como la capacidad de relacionar entre sí los sistemas diédrico y axonométrico, además de valorar las habilidades y destrezas adquiridas en el manejo de los instrumentos de dibujo y en el trazado a mano alzada.

9. Representar piezas y elementos industriales o de construcción sencillos, valorando la correcta aplicación de las normas referidas a vistas, acotación y simplificaciones indicadas en la representación.

   Se propone este criterio como medio para evaluar en qué medida el alumnado es capaz de expresar gráficamente un producto o un objeto con la información necesaria para su posible fabricación o realización, aplicando las normas exigidas en el dibujo técnico.

10. Utilizar distintas técnicas manuales, reprográficas e infográficas en la realización de los trabajos de dibujo técnico, y culminarlos utilizando los diferentes procedimientos y recursos gráficos, de forma que éstos sean claros, limpios y respondan al objetivo para los que han sido realizados.

    Con este criterio se quiere valorar la capacidad para dar distintos tratamientos o aplicar diferentes recursos gráficos o informáticos, en función del tipo de dibujo que se ha de realizar y de las finalidades del mismo, así como la capacidad de elegir la técnica o herramienta más adecuada y utilizarla correctamente. Este criterio no deberá ser un criterio aislado, sino que deberá integrarse en el resto de los criterios de evaluación en la medida que les afecte.

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

El DIBUJO TÉCNICO en el bachillerato se estudia en los dos cursos.

El desarrollo de los tres grandes bloques de que consta esta materia, DIBUJO GEOMÉTRICO, GEOMETRÍA DESCRIPTIVA y NORMALIZACIÓN, hay que presentarlo en dos libros no excesivamente voluminosos y ello nos obliga a dar una serie de ORIENTACIONES METODOLÓGICAS que ayuden al profesor en sus clases teóricas y prácticas. Pretendemos con ello que los dos libros sean realmente útiles para el profesor y para el alumno, que encontrará en ellos los conocimientos básicos, expuestos de forma clara y precisa para su mejor asimilación y con el mínimo esfuerzo.

Como es lógico, dejamos en libertad al profesor para que, con su mejor criterio, introduzca las variantes que estime pertinentes en las orientaciones metodológicas que vamos a desarrollar. En cada unidad temática, para no hacerla exhaustiva, hemos tenido que tomar decisiones sobre si incluir o no una determinada materia, siempre pensando que con lo expuesto sería suficiente para hacer un cimiento firme que sirviera de base a estudios superiores. Por ello el profesor, a la vista del tiempo disponible, del desarrollo del curso y del nivel de sus alumnos, puede introducir esas variantes que hemos indicado, en el sentido de reforzar algún tema o simplificar otros. Lo mismo debemos indicar en cuanto al desarrollo de las ACTIVIDADES; de éstas se proponen un número suficiente, pero no tienen por qué ser las propuestas en el libro las que se lleven a efecto. El entorno y las características de la región pueden hacer más eficaces otras propuestas.

Tratándose de **una materia propia de una modalidad** hay que pensar que, con los conocimientos recibidos, el alumno adquiere una formación más especializada que le prepara y orienta hacia estudios posteriores o hacia una actividad profesional.

La metodología a seguir se fundamentará en la idea principal de que el DIBUJO TÉCNICO debe capacitar para **el conocimiento del lenguaje gráfico** empleado por las distintas especialidades industriales, tanto en sus aspectos de **lectura** e **interpretación** como en el de **expresión de ideas** tecnológicas o científicas.

Teniendo en cuenta que el DIBUJO TÉCNICO debe ser **eminentemente activo**, a la explicación teórica de la asignatura seguirá la realización de ejercicios, problemas y actividades que pongan al alumno en situación de aplicación de los conocimientos adquiridos.

Se aconseja, si ello es posible, la utilización máxima de medios audiovisuales en orden a conseguir la mayor eficiencia docente, claridad de exposición y ahorro considerable de tiempo.

También se recomienda la utilización de modelos reales.

Profesionalmente, en el futuro, el técnico utilizará el DIBUJO TÉCNICO como herramienta y medio, por lo que no precisa de un singular adiestramiento instrumental, propio de profesionales especializados. Sin embargo, si bien el aprendizaje de ciertos aspectos del DIBUJO TÉCNICO se apoya en ejecuciones prácticas, como vistas necesarias, acotación, etc., en otro aspecto del mismo, como representación de elementos normalizados, es posible su identificación sobre planos ya ejecutados, con lo que no se justifica su dibujo de forma aislada para aprender su representación convencional.

En general, y para aprovechar al máximo el número de horas lectivas del curso, las actividades deben distribuirse mediante **trabajos a limpio** y **resoluciones a mano alzada**. Sin duda, conviene que el alumno adquiera soltura con todos los instrumentos y la rapidez y precisión necesarias; por ello, al menos una tercera parte de sus trabajos deberá realizarlos con los instrumentos. Sin embargo, el repaso de muchas construcciones y cierto tipo de problemas geométricos y de descriptiva **puede hacerlos a mano alzada con el portaminas**. Este sistema de aprendizaje, que aparentemente no tiene importancia, supone para el alumno un ahorro de tiempo muy estimable que pùede dedicar a ampliar el número de actividades. Esta metodología, aplicada personalmente a lo largo de cuarenta años en la enseñanza del DIBUJO TÉCNICO, la recomendamos de forma especial por los frutos que produce. **El alumno emplea menos tiempo y sobre todo "suelta su mano" consiguiendo hacer correctamente croquis, perspectivas, esquemas y diseños.**

INSTRUMENTOS DE DIBUJO

Características y empleo

TEMA 1

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática:

- El alumno debe conocer los instrumentos y los materiales que se vayan a utilizar en el curso: sus características, la forma de empleo y su conservación.
- La explicación se centrará en: el lapicero o portaminas y las diversas clases de minas, las plantillas (escuadra y cartabón), las clases de reglas a utilizar, el compás y la bigotera, los estilógrafos para delinear y rotular, la goma de borrar, los tipos de afilaminas, el papel como soporte principal del dibujo, el transportador de ángulos, las plantillas de curvas y otros sistemas de plantillas, materiales transferibles como letras, líneas, tramas, etc., lapiceros y rotuladores de colores para el diseño, etc.
- Especial importancia tiene el aprendizaje del manejo correcto del cartabón y de la escuadra para el trazado de paralelas, perpendiculares y ángulos.

A esta unidad temática se puede dedicar una clase. La práctica se adquirirá durante todo el curso.

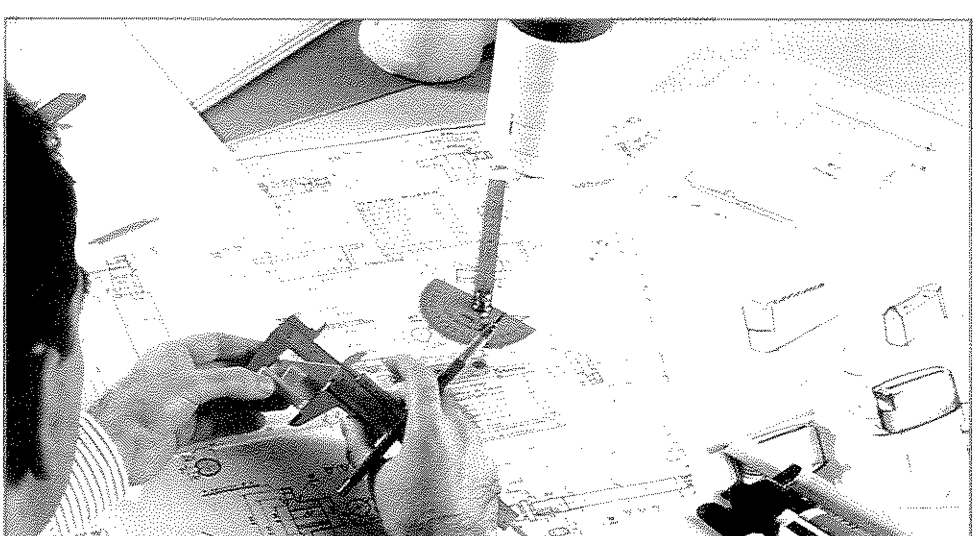


Fig. 1. Trabajo profesional del Dibujo Técnico.

Introducción

Los instrumentos de dibujo que recomendamos en este tema son los necesarios para poder desarrollar las prácticas propuestas en el libro, pensadas para ser dibujadas de forma tradicional, es decir, utilizando escuadras, reglas, compás, etc., para el trazado a lápiz y posterior pasado a tinta. Este método es muy importante para adquirir los primeros y fundamentales conocimientos del dibujo, además de gran utilidad práctica y, en muchos casos, imprescindible como metodología para incorporar datos en un programa de diseño asistido.

A continuación se enumeran una serie de útiles e instrumentos de dibujo, sus características y la forma correcta de manejarlos.

En el mercado existe una gran variedad de marcas y precios de los instrumentos de dibujo. Aconsejamos se adquieran de la mejor calidad.

1. El papel

El papel es el medio más utilizado como soporte del dibujo. Se presenta en rollos o en formatos (hojas cortadas) y su espesor está en relación a su peso en gramos por metro cuadrado. La superficie puede ser rugosa o bien lisa y algo brillante (papel satinado).

El papel a utilizar puede ser:

- Papel opaco.
- Papel transparente.

- **Papel opaco**. En general es blanco y también algo brillante y satinado. Se utiliza para dibujos que no van a ser reproducidos por transparencia.

  Un buen papel de dibujo debe poder soportar una línea de tinta china de 2 mm. de espesor, secándose al aire sin expandirse; debe admitir también los colores a la acuarela y se debe poder borrar en él y luego volver a dibujar en la zona borrada. Las características más sobresalientes de un buen papel son: tenacidad, resistencia al borrado y a la luz, ser lavable y no alterable con la humedad del medio ambiente, tanto en su anchura como en su longitud.

- **Papel transparente**. De este tipo es el papel vegetal.

  El papel vegetal es de color gris claro o azulado, poco o nada aceitado, fuerte y no quebradizo. Se emplea para los dibujos originales de los que van a hacerse copias. Debe admitir la tinta, las pinturas y el borrado y, sobre todo, ser muy transparente, es decir, debe verse a su través el dibujo a lápiz colocado debajo para calcar. Para comprobar la transparencia de este papel, se mira la calidad del fondo de la copia; cuanto más claro es el fondo, más transparente es aquél. La transparencia se determina por el número de hojas que pueden superponerse hasta que no se vea el plano del dibujo colocado debajo. La humedad, el aire seco y, en general, una mala conservación lo hacen rígido y quebradizo. Este papel no debe doblarse pues los dobleces resultan permanentes.

  Otra clase de papel transparente es el papel de poliéster, de gran resistencia y transparencia; para dibujar en él se utilizan lápices especiales. También hay papeles de acetato para diapositivas y planos topográficos.

- **Otros tipos de papel**

  Papel Canson. Es un papel especial de dibujo, muy liso y resistente. (Se debe al industrial francés Canson, que fue el primero en fabricarlo en su factoría de Annonay.)

  Papel pergamino. Es un papel claro, muy alisado y de gran transparencia, impregnado en resinas artificiales. Se emplea para dibujos a tinta china.

  Papel tela. Es transparente, de tono azulado o blanco. Se emplea para calcar. Se fabrica con materias primas textiles. Su uso está indicado en planos que deben tener mucha duración. Es resistente al borrado y a las raspaduras y no está aceitado; su superficie es mate, algo brillante y no se contrae.

  Papel milimetrado. Es un papel de dibujo, opaco o transparente, rayado horizontal y verticalmente con líneas espaciadas a escala milimétrica (la distancia entre líneas es de 1 mm. o de 0,5 mm.). Se emplea para bocetos, croquis, trazado de curvas, gráficas, diagramas, etc.

2. El lápiz

El lápiz es un útil que, en dibujo técnico, ha sido sustituido por el portaminas, que describiremos más adelante, pero su habitual presencia entre los instrumentos de dibujo obliga a hacer una breve exposición.

El lápiz consiste en una barrita de grafito encerrada y encolada en un cilindro o prisma de madera (Fig. 2).

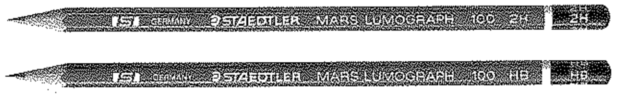


Fig. 2.

Los lápices pueden ser de trazo negro, para dibujo y escritura, o de color, para dibujo artístico, diseño gráfico, etc.

Los lápices negros se fabrican con diferentes grados de dureza. En la Fig. 3 se representa un cuadro escalonado de durezas. En este gráfico, la mina más blanda y oscura sería la EB, y la más dura y clara, la 9H.

La dureza HB, considerada intermedia, es habitual en croquis y escritura.

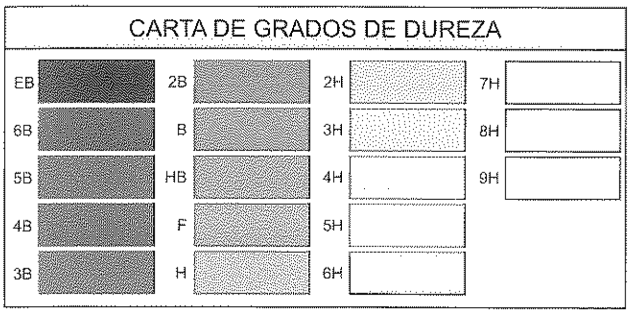


Fig. 3.

Los lápices de color forman parte habitual en cualquier trabajo creativo, sobre papel opaco o vegetal, cartón o textil. El trazo debe ser suave, uniforme y de gran resistencia. En el mercado existen múltiples marcas e infinidad de presentaciones. En la Fig. 4 se muestran unos modelos de estuches de diferentes unidades.

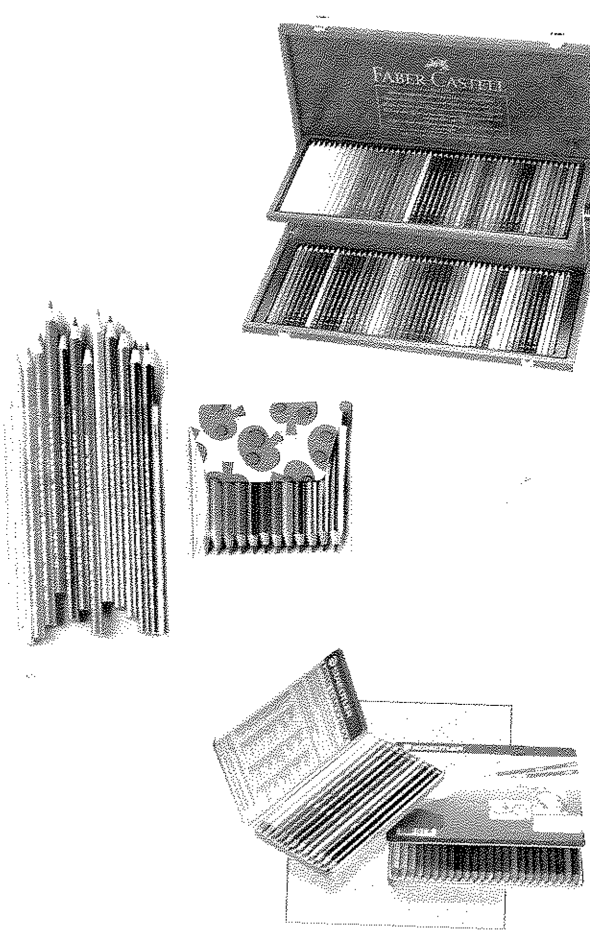


Fig. 4.

3. El sacapuntas

El sacapuntas es la mejor herramienta para sacar punta al lápiz. Existen de muchas clases y diseños, eléctricos o manuales. Dentro de los manuales sencillos y de sobremesa, los expuestos en la Fig. 5 son los clásicos y más aconsejables para ir completando un equipo de dibujo escolar.

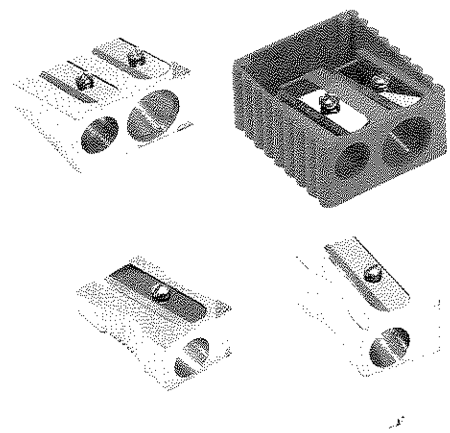


Fig. 5.

4. El portaminas

En dibujo técnico conviene usar un portaminas; es más cómodo, limpio y de fácil manejo. La sección suele ser hexagonal para que no ruede sobre la mesa. Los hay de mina gruesa de 2 mm., que, bien afilados, son los que ofrecen al usuario mayor precisión (Fig. 6).

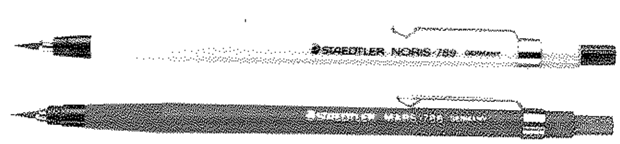


Fig. 6.

Tenemos también los portaminas llamados *de mina fina*, de diferentes espesores de mina y pensados para no ser afilados (Fig. 7).

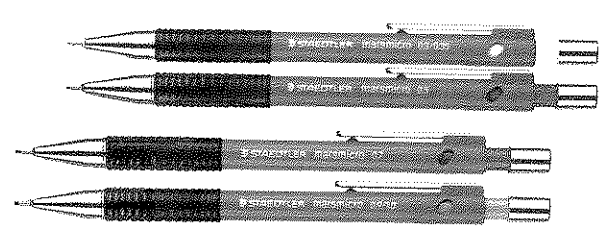


Fig. 7.

5. El estuche y el afilador de minas

Los estuches de minas se utilizan para guardar y conservar las minas (Fig. 8). Los hay para minas gruesas y para minas finas. Es conveniente tener varias clases de minas para las diversas aplicaciones.

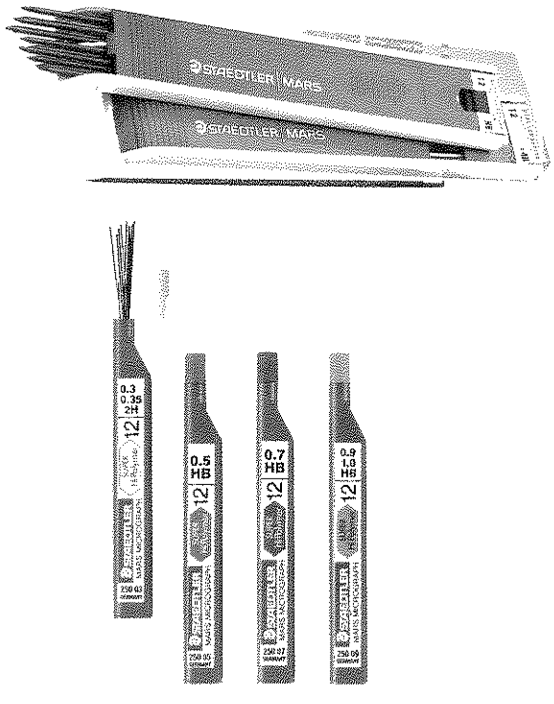


Fig. 8.

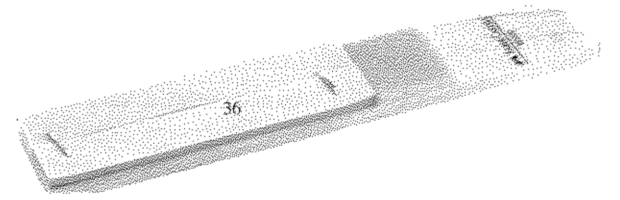


Fig. 9.

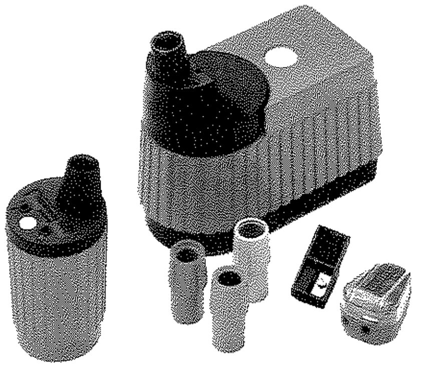


Fig. 10.

Las aplicaciones, según la dureza de la mina, son las siguientes:

3B-F	—	para escribir, dibujar y estenografía.
8B-H	—	para dibujar, esbozar y plumear.
8B-5H	—	para reproducción heliográfica.
8B-3H	—	para reproducción de microfilms.
B-6H	—	para el dibujo técnico.
HB-6H	—	para folio de dibujo con superficie ligeramente áspera.
H-7H	—	para dibujos topográficos.
7H-10H	—	para dibujar en piedra litográfica y superficies muy duras.

Las minas deben tener la debida resistencia a la rotura y hacer el trazo de color negro intenso y nítido, fácil de borrar e insensible al difuminado.

La mina debe encontrarse en el ángulo que forman el papel y el canto de la regla o plantilla. Las líneas se trazan de izquierda a derecha, inclinando el lápiz o el portaminas unos 60° en la dirección de trazado.

Para afilar la mina de 2 mm. existen varios sistemas y modelos: la lija o raspador de la Fig. 9 o los modelos de la Fig. 10.

6. La goma de borrar

Es una goma elástica a base de caucho, especialmente preparada para borrar los trazos de lápiz o de tinta.

Hay gomas de borrar para lápiz de dibujo, lápiz de colores o lápiz de copiar, para tiza, carbón, tinta china y corriente y para escritura a máquina. Hay también gomas para artistas, de migajón, para limpiar o aclarar. Los trazos de lápiz blando se borran con goma blanda y las líneas duras, con goma dura.

La goma no debe manchar ni colorear; si la goma está sucia, se frota sobre un papel antes de usarla. Existen de varias formas, materiales y colores; conviene que sean blancas o incoloras o de color gris claro; lo importante es que no dejen coloreado el papel y al borrar suelten una viruta muy fina. En general, sólo hay que borrar líneas a lápiz, por lo que las gomas de más empleo son las blandas; no obstante, conviene disponer de una goma para tinta.

Para borrar líneas de tinta hay lápices especiales (como el 526-60 Staedtler-Rasor) que, una vez pasado el papel con ellos, evitan de forma absoluta que se expanda la tinta por la zona raspada. Este tipo de lápiz es un útil imprescindible en el trabajo.

También hay máquinas eléctricas para borrar y existen plantillas de plástico o de metal con aberturas para proteger las líneas que no se deben borrar. Además del lápiz de borrar ya citado, hay borradores de fibra de cristal para borrar líneas de tinta y son empleados por técnicos, diseñadores y artistas.

La Fig. 11 representa unos modelos de gomas de borrar.

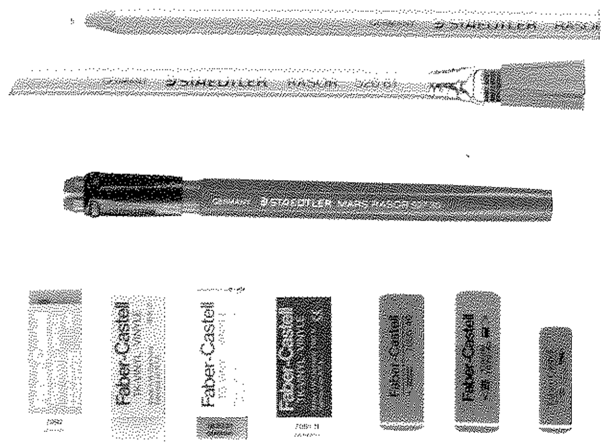


Fig. 11.

7. La escuadra y el cartabón

La escuadra y el cartabón constituyen un juego de plantillas imprescindible en el trazado, tanto para lápiz como para tinta. Se deben usar de plástico transparente pues son más precisas, permiten ver el dibujo a través de ellas y se limpian con facilidad. Hay que procurar no aplicar sobre ellas ningún objeto cortante para evitar que se deterioren los cantos (Fig. 12).

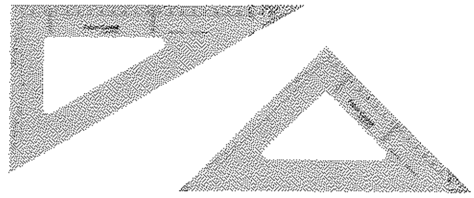


Fig. 12.

La escuadra y el cartabón son dos triángulos rectángulos, la escuadra con ángulos agudos iguales a 45° y el cartabón con ángulos agudos de 30° y 60°. Pueden llevar graduación en milímetros y centímetros en un canto, aunque es preferible que no lleven esta graduación. Para tomar medidas es mejor utilizar la regla. Existen también juegos de plantillas que tienen los bordes con un pequeño rebaje o bisel para facilitar a los principiantes el pasado a tinta.

Como los dibujos a realizar en los estudios son generalmente pequeños, conviene que estos instrumentos sean manejables, de tamaño medio, es decir, la hipotenusa de la escuadra, que debe ser igual al cateto mayor del cartabón, entre 25 y 30 cm.

La escuadra y el cartabón nos permiten trazar líneas horizontales y verticales manteniendo fija la posición del cartabón y girando la escuadra sobre él (Fig. 13).

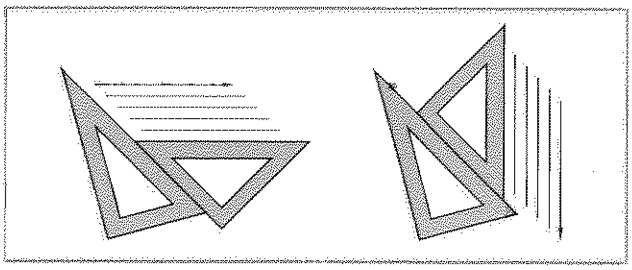


Fig. 13.

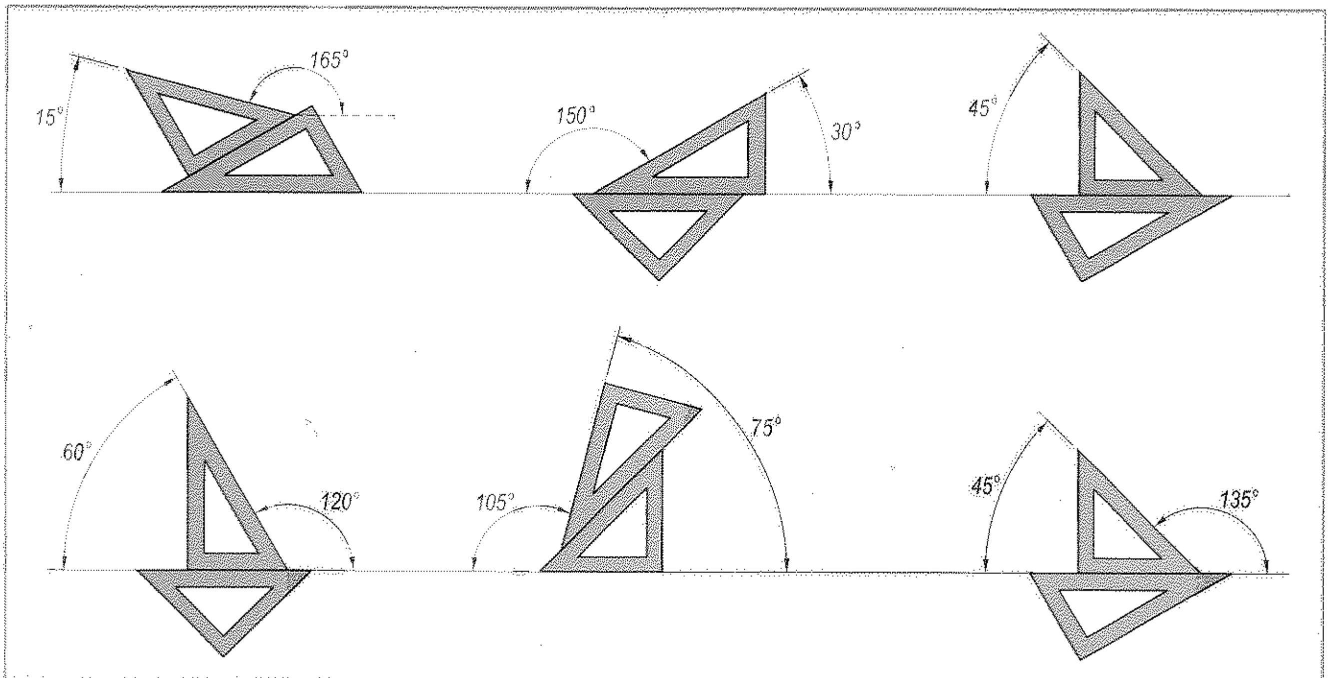


Fig. 14. Estas plantillas nos permiten, a través de diversas posiciones, obtener una amplia gama de ángulos.

8. La regla

La regla se utiliza para medir longitudes y para llevar cotas al plano. Conviene que sean de plástico transparente. En la Fig. 15 se indican una regla, un doble decímetro y un escalímetro. Este último es una regla de sección triangular que tiene seis escalas de reducción; su uso está muy extendido dentro del campo profesional del dibujo.

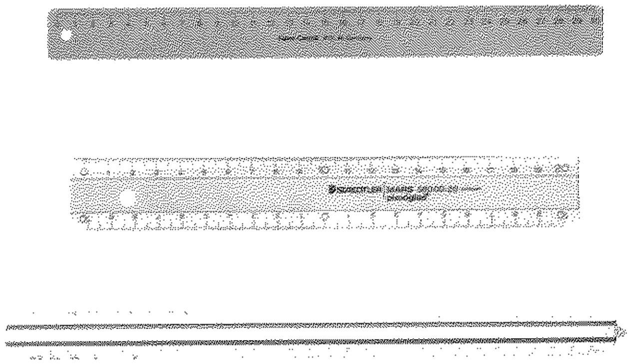


Fig. 15.

9. El transportador de ángulos

Puede tener la forma de un círculo o de un semicírculo de plástico, donde van grabados los grados. El vértice del ángulo a construir se coloca en el centro del transportador, de forma que un lado del ángulo pase por el 0°, origen de ángulos; el otro lado del ángulo se marca con arreglo a su amplitud.

La Fig. 16 muestra dos modelos de transportadores.

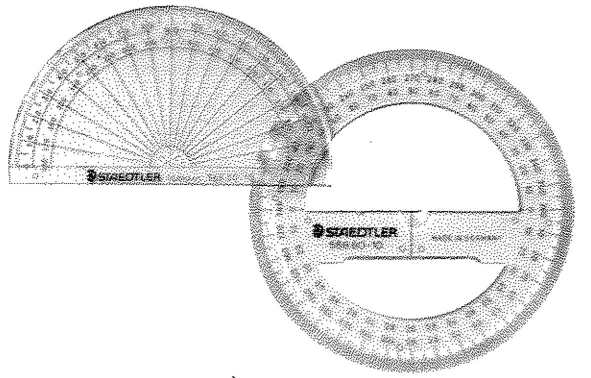


Fig. 16.

10. El compás

El compás es un instrumento imprescindible en el dibujo técnico. Se utiliza para el trazado, a lápiz o a tinta, de circunferencias o de arcos de circunferencias. La Fig. 17 muestra un estuche con diferentes modelos de compases.

El trazado a lápiz se puede hacer utilizando un portaminas adaptado al compás o bien directamente con la mina, que debe estar afilada en bisel hacia dentro (Fig. 18).

Para pasar a tinta los dibujos se utilizan las plumas o estilógrafos que se acoplan al compás mediante un sencillo accesorio representado en la Fig. 19.

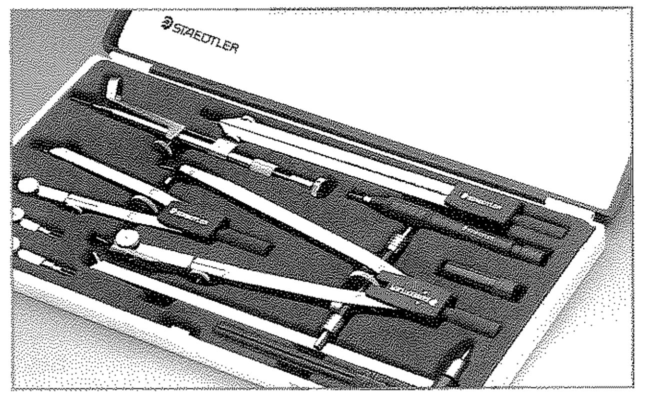


Fig. 17.

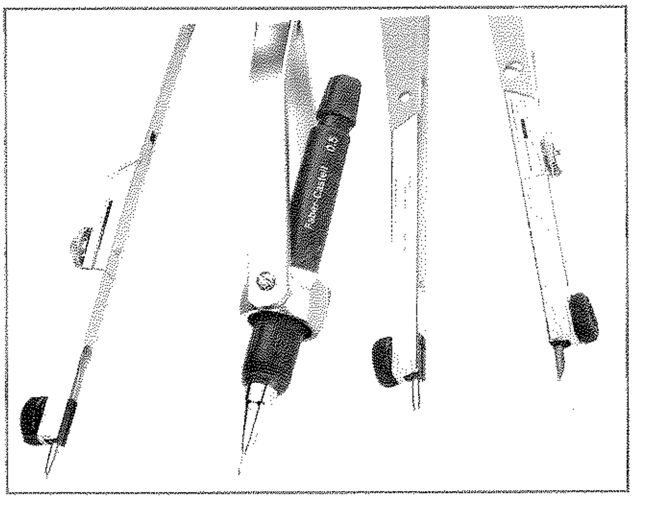


Fig. 18.

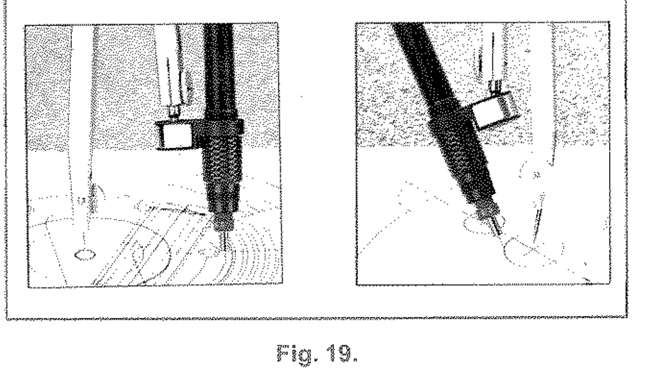


Fig. 19.

11. Los estilógrafos

Los estilógrafos o plumas para delinear y rotular son los útiles para el pasado a tinta. Se presentan en estuches con diferentes espesores de 0,18- 0,25- 0,35- 0,5- 0,7 y 1 mm., como el de la Fig. 20.

En un principio es suficiente con disponer de tres o cuatro plumas de espesores 0,25- 0,35- 0,5 y 0,7 mm.

Existen en el mercado unos modernos y cómodos estuches que incorporan junto a las plumas el compás con su alargador, tinta para recargar las plumas, portaminas y otros accesorios.

Para la conservación de las plumas es importante limpiarlas periódicamente; cuando se vayan a dejar de usar un período largo, lavarlas y guardarlas sin tinta.

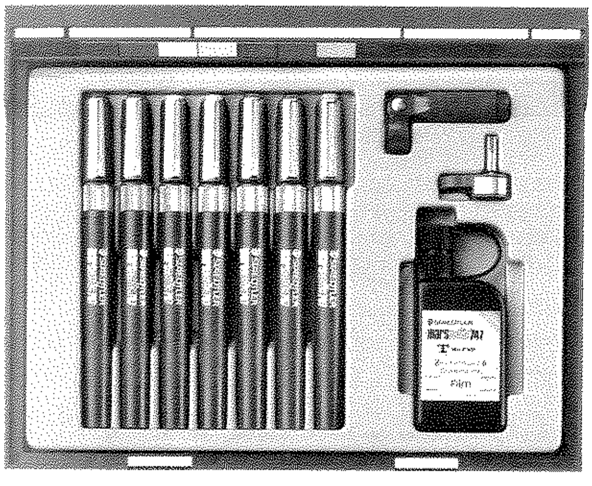


Fig. 20.

12. Las plantillas

Las plantillas son láminas de plástico perforadas y troqueladas con las formas más diversas.

La Fig. 21 muestra un juego de plantillas Burmester, también llamadas *plantillas de curvas*. Estas plantillas se utilizan para el trazado de curvas no circulares. Primero se dibuja la curva a lápiz, bien a mano alzada o con las plantillas, y luego se pasa a tinta con ellas.

Fig. 21.

Las plantillas, en general, ahorran mucho tiempo en la realización de los planos. Ayudan a trazar, con rapidez y precisión, curvas, símbolos, letras, etc. (Fig. 22).

Las plantillas se agrupan por especialidades; las hay para tornillos y tuercas, símbolos eléctricos, para arquitectura, telefonía, fontanería, símbolos sanitarios, etc.

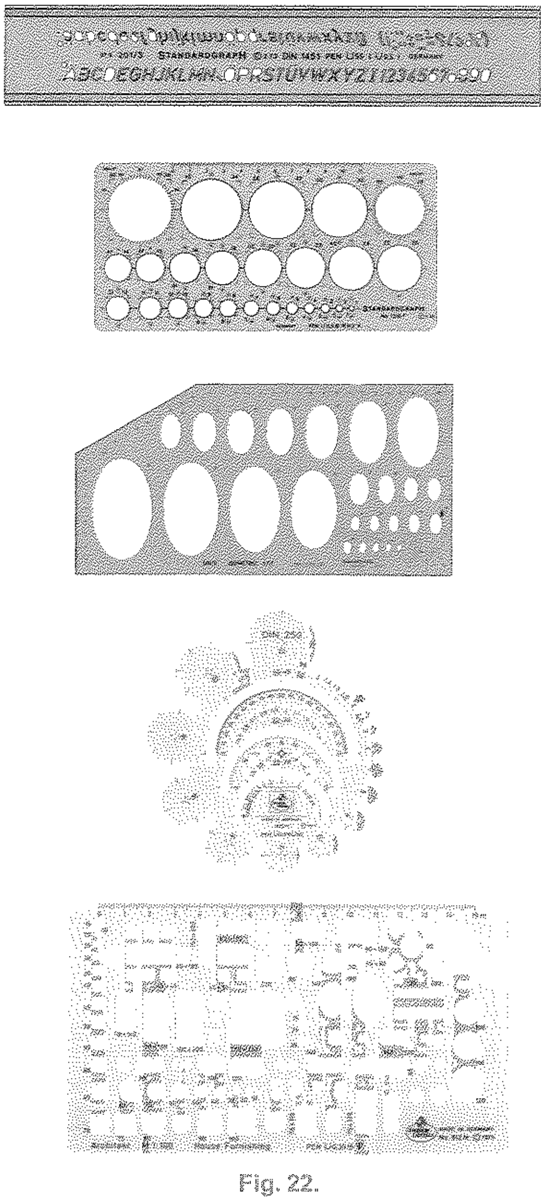


Fig. 22.

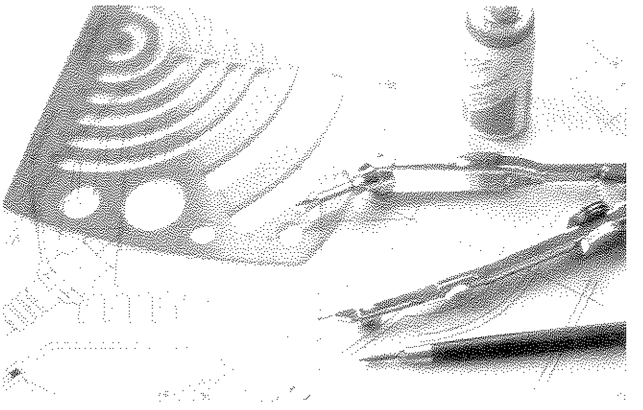


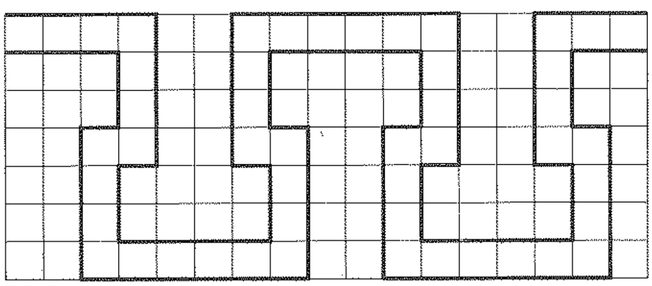
Fig. 23.

NOTA IMPORTANTE

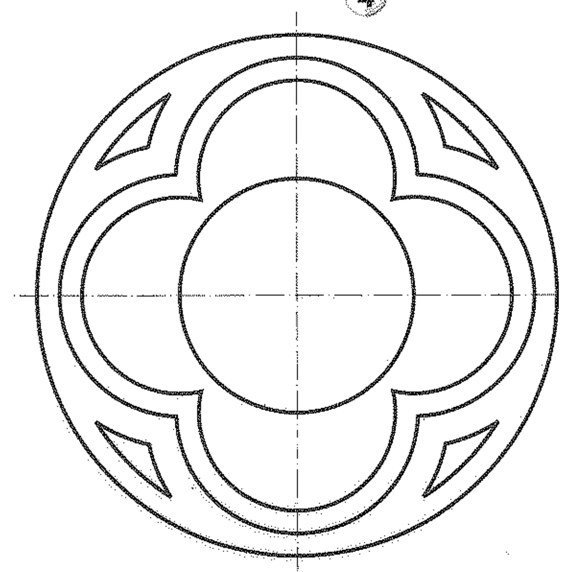
La presencia del dibujo asistido por ordenador, su implantación con programas en dos y tres dimensiones que simplifican de forma incuestionable la elaboración de planos en un proceso técnico, ha relegado a un uso muy limitado el trazado manual del dibujo técnico y por ello a una menor utilización de los instrumentos de dibujo descritos en este tema. No obstante, para el estudio teórico del dibujo como son los temas que siguen, resultan imprescindibles, por lo que es aconsejable se adquieran de cierta calidad. Su uso, aunque escaso, se hace necesario para la elaboración de esquemas y bocetos que aportan los datos requeridos por el ordenador, además de educar en la metodología y proceso que éste demanda.

ACTIVIDADES

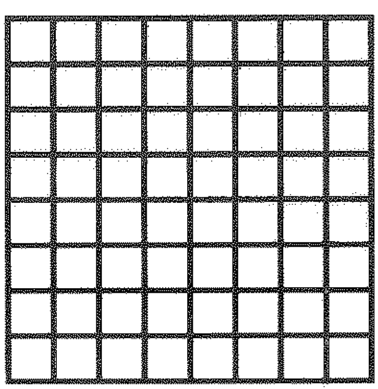
A la vista de las figuras siguientes, el alumno puede reproducirlas primero a mano alzada a un tamaño aproximadamente doble y segundo, por medio de instrumentos, dibujarlas a limpio a un tamaño mayor.



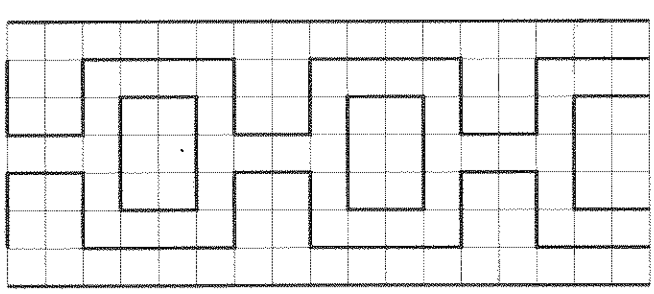
1



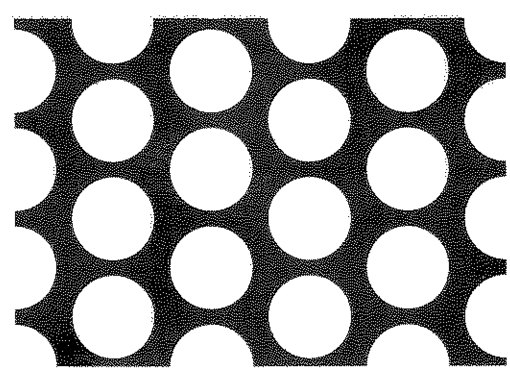
4



2



3



5

TRAZADOS FUNDAMENTALES EN EL PLANO

Paralelas, perpendiculares, mediatrices. Operaciones con ángulos

TEMA 2

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática el alumno conocerá los principales signos geométricos y las operaciones que se pueden hacer con la regla y el compás.

Adquirirá el concepto de "lugar geométrico" y pondrá ejemplos del mismo.

Resolverá problemas de operaciones con segmentos, trazado de la mediatriz de un segmento, de perpendiculares, construcción de ángulos con el compás y con las plantillas y determinación de bisectrices.

Dos clases deben ser suficientes para el desarrollo correcto de este tema.

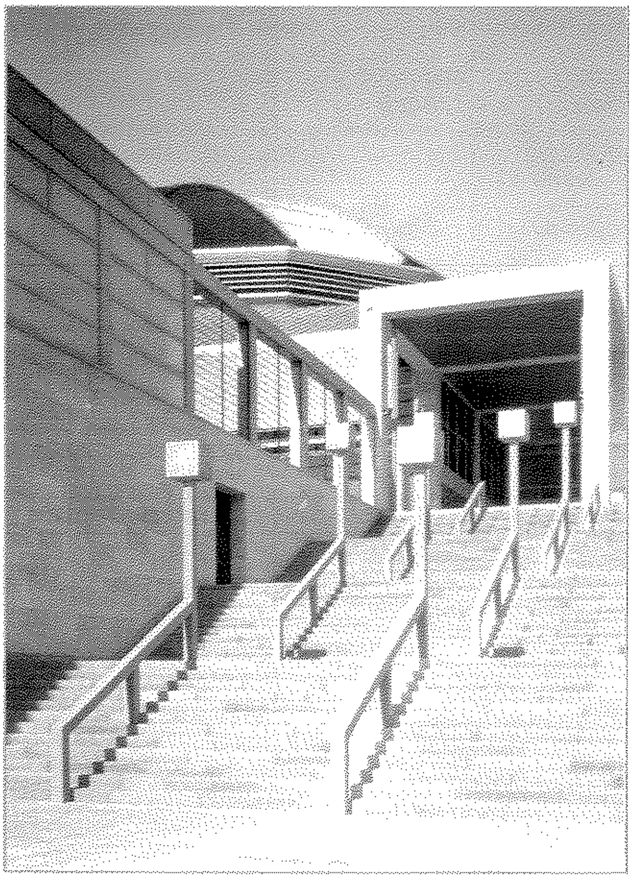


Fig. 1. Escalinata lateral del Palau Sant Jordi (Barcelona).

Introducción

En este tema se estudian una serie de construcciones geométricas sencillas, elementales y, a la vez, necesarias en construcciones posteriores de mayor dificultad.

La **rapidez** y la **precisión** son las dos principales características de un dibujo técnico y a ellas se ha de dedicar la mayor atención.

El consejo general para el estudio de "**las construcciones geométricas**" es que no se deben aprender de memoria las figuras, sino que, a partir de los datos y basándose en las propiedades geométricas de cada caso, se razone el problema y se fijen bien esas propiedades que constituyen "**el porqué**" de las operaciones a realizar.

Aunque son muchísimas las construcciones que se presentan en Dibujo Geométrico, a partir de ahora se hace un estudio razonado de aquellas que "**realmente**" son necesarias más adelante en Dibujo Técnico. Si se dominan estas construcciones sin necesidad de consultar constantemente apuntes o libros, se habrá dado el primer paso seguro en el aprendizaje de este maravilloso idioma que es el DIBUJO.

1. Concepto y designación de los elementos (Fig. 2)

PUNTO. Es la intersección de dos rectas.

Los puntos se designan por letras mayúsculas o con números: *A, B, C..., P, Q, R..., 1, 2, 3...*

LÍNEA RECTA. Es una sucesión de puntos en una misma dirección.

Las rectas se designan por letras minúsculas: *a, b, c..., p, q, r...*

LÍNEA CURVA. Es una sucesión de puntos que no están en la misma dirección.

Se designan por una letra minúscula: *curva c.*

SEGMENTO. Es una parte de recta limitada en sus extremos.

Se designa por letras minúsculas: *segmento a* o por dos letras mayúsculas en sus extremos: *segmento AB* o $\overline{AB}$.

SEMIRRECTA. Es una recta limitada en un extremo: *semirrecta O-r.*

ÁNGULO. Es la porción de plano comprendido entre dos semirrectas que tienen el mismo origen. Las semirrectas son los lados del ángulo y el punto de intersección es el vértice.

Los ángulos se designan por una letra mayúscula en su vértice o por letras griegas minúsculas: *ángulo A, ángulo* β (beta), ángulo $\hat{A}$.

PLANO. Es la superficie formada por tres puntos no alineados. De esta definición deducimos que un plano queda también definido por dos rectas que se cortan, o que son paralelas, o por una recta y un punto que no se pertenecen.

Los planos se designan por letras griegas minúsculas: α (alfa), β (beta), δ (delta), π (pi)...

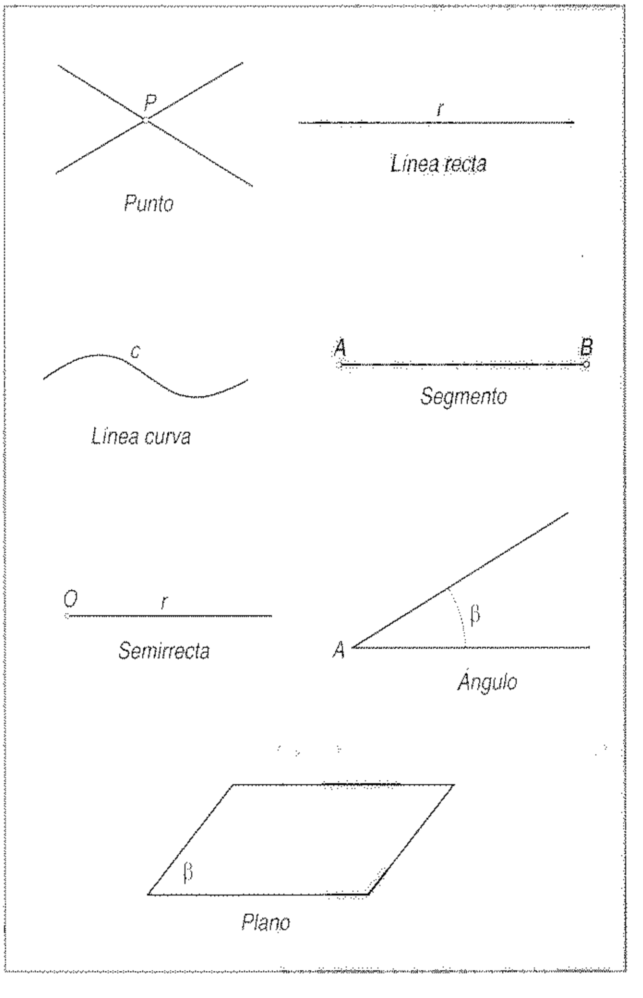
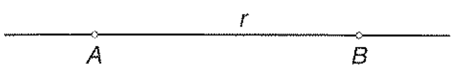


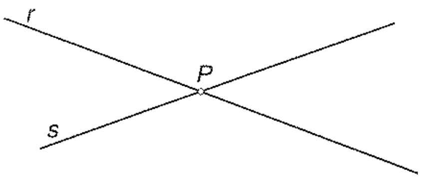
Fig. 2.

3. Operaciones con la regla y el compás (Fig. 3)

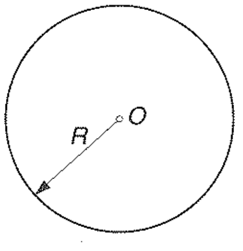
- Trazado de la recta *r* por dos puntos *A* y *B*:



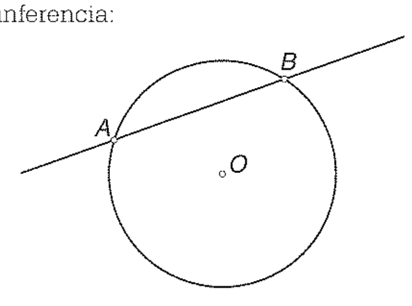
- Punto *P* de intersección de dos rectas *r* y *s*:



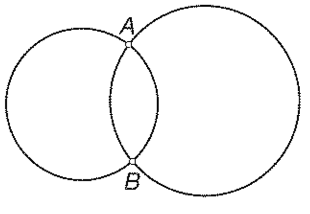
- Trazado de la circunferencia de centro *O* y radio *R*:



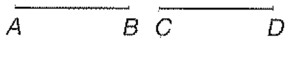
- Puntos *A* y *B* de intersección de una recta y una circunferencia:



- Puntos *A* y *B* de intersección de dos circunferencias:



- Transporte de un segmento:



- Transporte de un ángulo:

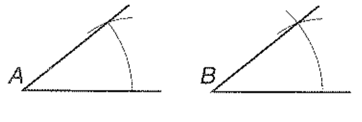


Fig. 3.

4. Concepto de lugar geométrico

> LUGAR GEOMÉTRICO es el conjunto de puntos (del plano o del espacio) que gozan todos de una misma propiedad.

Dada la importancia de este concepto, a título de ejemplo, indicamos algunos "lugares geométricos":

- **Mediatriz de un segmento**: todos sus puntos equidistan de los extremos del segmento.
- **Bisectriz de un ángulo**: todos sus puntos equidistan de los lados del ángulo.
- **La circunferencia**: todos sus puntos equidistan del centro.
- **La elipse**: la suma de las distancias de cada punto de ella a otros dos puntos fijos, es constante.
- **La hipérbola**: la diferencia de las distancias de cada punto de ella a otros dos puntos fijos, es constante.
- **La parábola**: todos sus puntos equidistan de un punto y de una recta dados.
- **La esfera**: todos sus puntos equidistan del centro.

5. Principales signos geométricos

$\parallel$	*paralela a*
$\perp$	*perpendicular a*
$\widehat{COD}$	*Ángulo* COD
$\overset{\frown}{NM}$	*arco* NM
∟	*ángulo recto*
$\triangle$	*triángulo*
$\square$	*cuadrado*
$\varnothing$	*diámetro*
R	*radio*
d	*diámetro*
$\overline{RS}$	*segmento* RS
$\vert$	*longitud*
$<$	*menor que*
$>$	*mayor que*
$\leqslant$	*igual o menor que*
$\geqslant$	*igual o mayor que*

6. Suma de segmentos (Fig. 4)

Para sumar los segmentos $a \equiv \overline{AB}$, $b \equiv \overline{CD}$ y $c \equiv \overline{EF}$, se colocan sobre una recta, uno a continuación de otro. El segmento resultante $\overline{NM} = a + b + c$ es la suma de los tres segmentos.

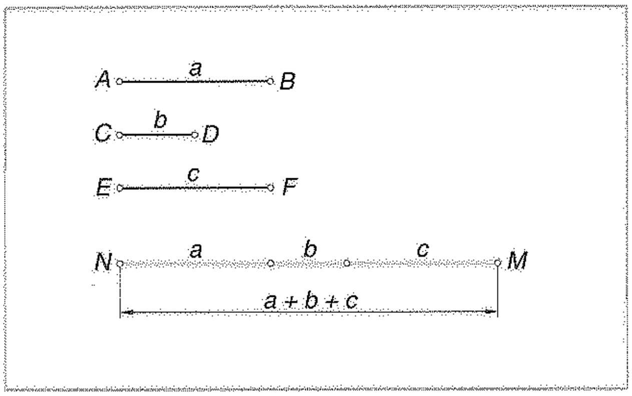


Fig. 4.

7. Diferencia de segmentos (Fig. 5)

Sean los segmentos $m \equiv \overline{AB}$ y $n \equiv \overline{CD}$; se coloca el segmento m y, superpuesto con él y a partir de su origen A, se sitúa el segmento n; el segmento $\overline{EB}$ es la diferencia. $\overline{EB} = m - n$.

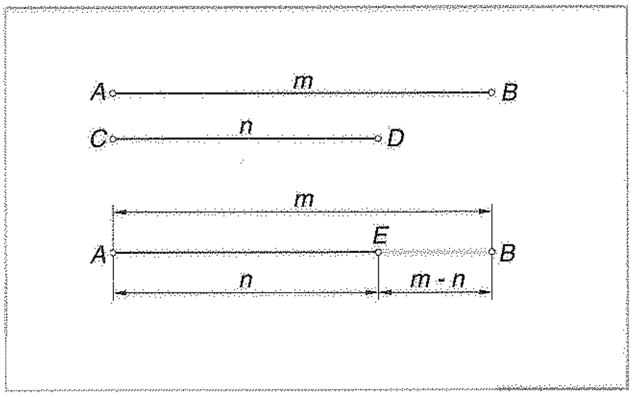


Fig. 5.

8. Trazado de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ (Fig. 6)

Mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ es la recta perpendicular a él en su punto medio. Tiene la propiedad de que todos sus puntos equidistan de los extremos A y B del segmento. Es, pues, un lugar geométrico, ya que todos sus puntos gozan de la misma propiedad.

Con centros en A y B y con un radio mayor que la mitad de $\overline{AB}$, se trazan los arcos 1 y 2 que se cortan en los puntos P y Q. Uniendo los puntos P y Q se obtiene la mediatriz m del segmento $\overline{AB}$.

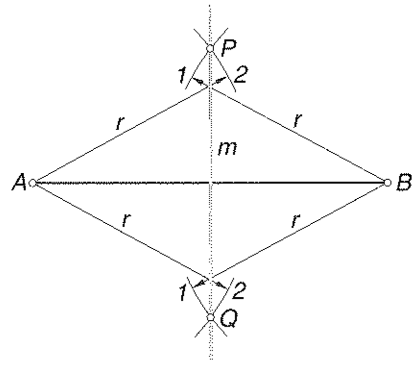


Fig. 6.

9. Aplicación del trazado de la mediatriz en la resolución de problemas

- **Trazado de la perpendicular a una recta t por un punto exterior P** (Fig. 7).

Sean la recta t y el punto P. Con centro en P y con radio arbitrario r, se traza un arco que corta a la recta t en los puntos A y B. La mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es la solución. Se opera como en el caso anterior.

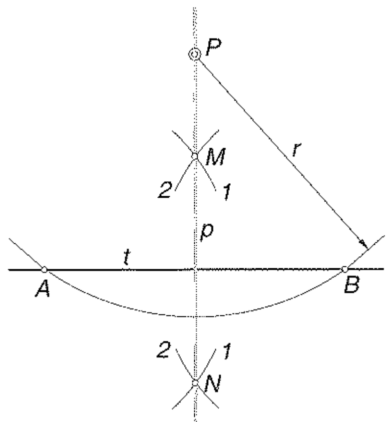


Fig. 7.

- **Trazado de la perpendicular a una recta r por un punto P de ella** (Fig. 8).

Tenemos la recta r y el punto P de ella. Con centro en P se traza un arco de radio arbitrario, que determina los puntos A y B. La mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es la solución.

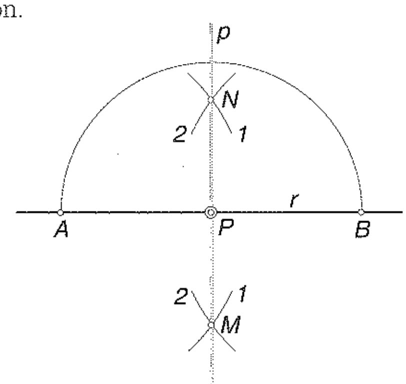


Fig. 8.

- **Trazado de la perpendicular a una semirrecta t en su extremo O** (Fig. 9).

Con centro en O se traza un arco de radio $\overline{ON}$ arbitrario; con centro en N, otro arco del mismo radio, que corta en el punto M al anterior y con centro en M y el mismo radio se corta nuevamente en L al primer arco. La mediatriz del segmento $\overline{ML}$ es la recta p, perpendicular a la semirrecta en O.

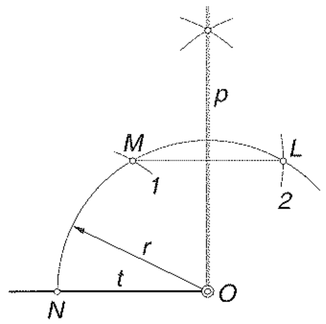


Fig. 9.

- **División de un arco AB de circunferencia en dos partes iguales** (Fig. 10).

Se trazan la cuerda $\overline{AB}$ y la mediatriz m de ella. Esta mediatriz corta al arco $\overset{\frown}{AB}$ en el punto medio C.

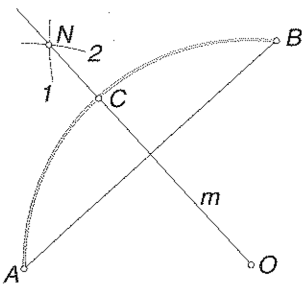


Fig. 10.

- **Trazado del arco de circunferencia que pasa por tres puntos** (Fig. 11).

Sean los puntos A, B y C por los que ha de pasar la circunferencia. Se unen los puntos A con B y B con C y se trazan las mediatrices n y m de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, las cuales se cortan en el punto O, centro de la circunferencia. Piénsese que este punto O, por pertenecer a las dos mediatrices, equidista de los tres puntos.

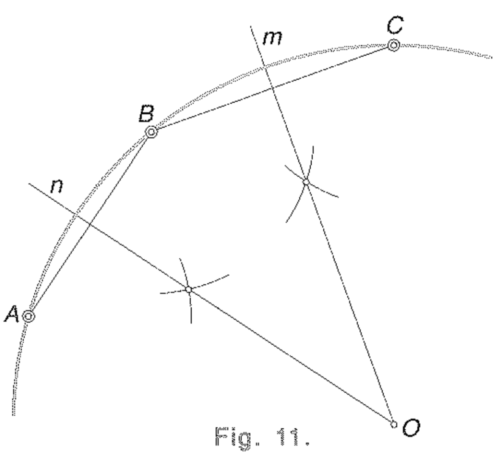


Fig. 11.

- **División de un segmento $\overline{AB}$ en 2, 4, 8..., 2^n partes iguales** (Fig. 12).

Se traza primero la mediatriz de $\overline{AB}$, con lo cual se obtienen el punto N y los segmentos iguales $\overline{AN} = \overline{NB}$. Se trazan las mediatrices b y c de $\overline{AN}$ y $\overline{NB}$ y queda dividido en cuatro partes iguales, y así sucesivamente.

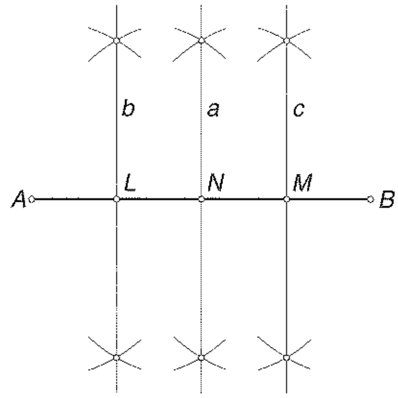


Fig. 12.

10. División de un segmento $\overline{AB}$ en un número cualquiera de partes iguales (Fig. 13)

Aplicamos el teorema de Thales, que dice: "Si dos rectas coplanarias son cortadas por un haz de paralelas, los segmentos determinados sobre una de las rectas son proporcionales a los determinados sobre la otra".

Se supone que hay que dividir el segmento $\overline{AB}$ en seis partes iguales. Por un extremo, el A, se traza una recta cualquiera r y se llevan sobre ella seis segmentos iguales de longitud arbitraria. El extremo C del último segmento se une con el B y por las divisiones $1, 2, 3, 4$ y 5 se trazan paralelas a CB que dividen al segmento $\overline{AB}$ en las partes iguales deseadas.

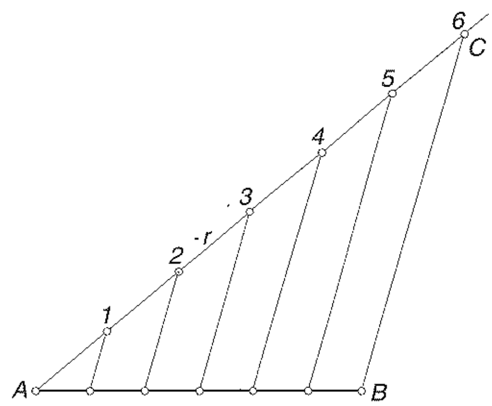


Fig. 13.

11. Rectas paralelas

Son las rectas coplanarias que no tienen ningún punto común, es decir, se cortan en el infinito.

12. Trazado de la recta paralela a otra por un punto P (Fig. 14)

Sean la recta t y el punto P. Con centro en P se traza un arco de radio r, arbitrario, que corta en N a la recta t. Con centro en N y el mismo radio, se traza el arco $\widehat{PM}$. Se toma $\overline{NR} = \overline{MP}$ con ayuda del arco 2 y se tiene el punto R. La recta $p \equiv PR$ es la solución.

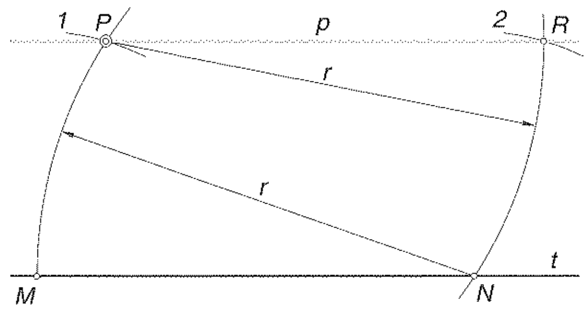


Fig. 14.

13. Ángulos (Fig. 15)

Un ángulo es la porción de plano comprendido entre dos semirrectas que tienen el mismo origen. Las semirrectas son los **lados** del ángulo y el punto de intersección es el **vértice**.

Un ángulo se mide en grados, minutos y segundos sexagesimales (15° = 15 grados; 15' = 15 minutos; 15" = 15 segundos). 1° = 60' y 1' = 60". También se puede medir en grados, minutos y segundos centesimales.

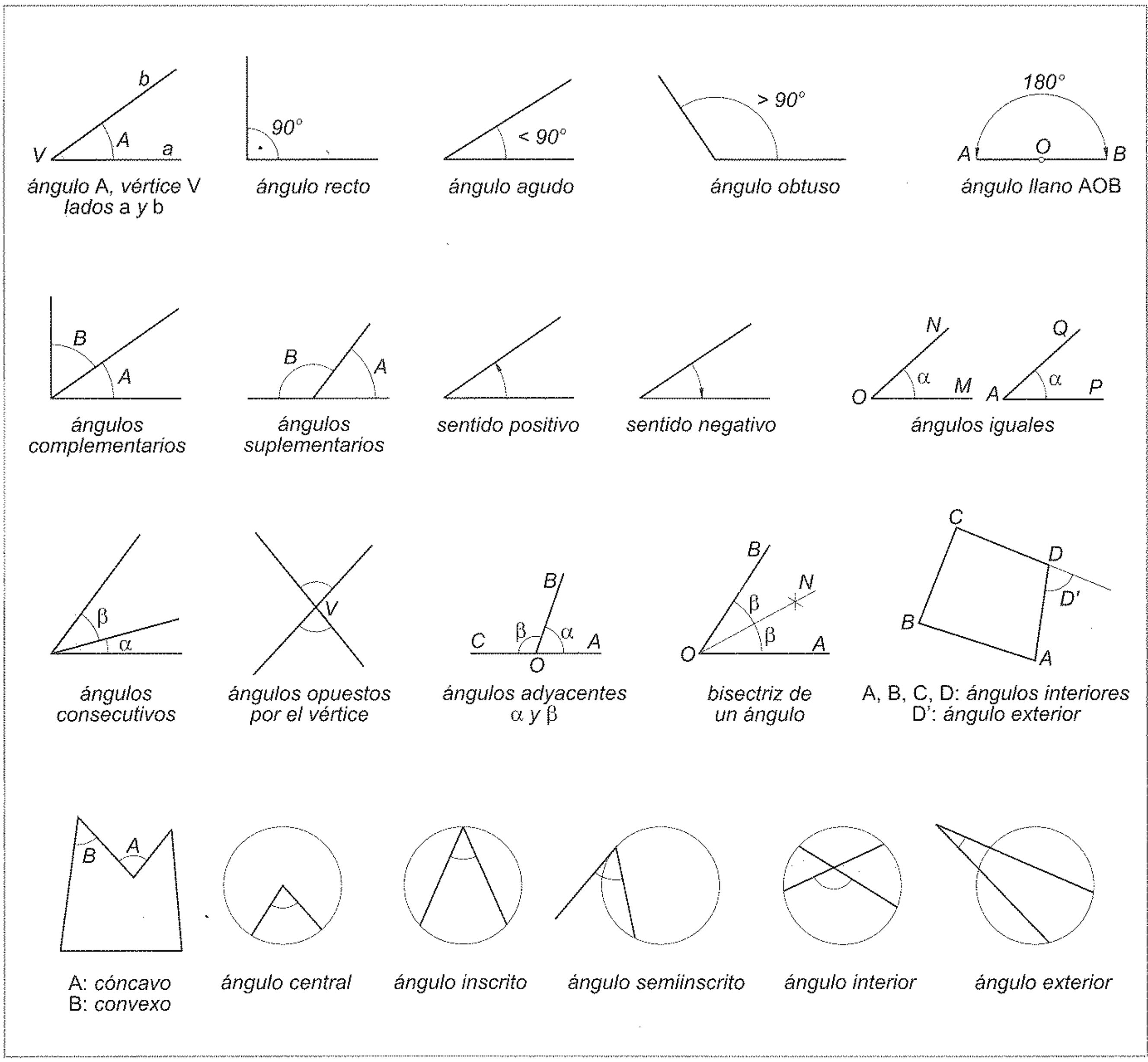


Fig. 15.

14. Construcción de un ángulo igual a otro (Fig. 16)

Tenemos el ángulo $\hat{N}$ formado por las rectas *a* y *b*. Se dibuja en él un arco cualquiera $\overset{\frown}{AB}$ de vértice *V*; se toma una recta *a'* y en ella se fija el vértice *V'*; con centro en *V'* se traza el arco de radio $\overline{V'A'} = \overline{VA}$ y en este arco se toma $\overset{\frown}{A'B'} = \overline{AB}$. El punto *B'* unido con *V'* da el lado *b'* del ángulo igual al propuesto.

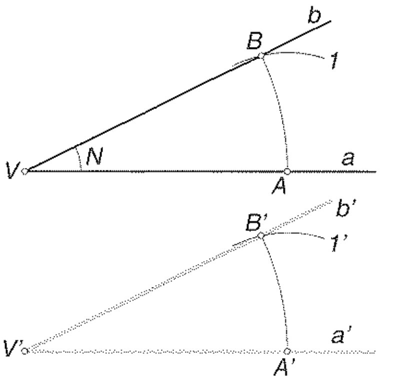


Fig. 16.

15. Suma de ángulos (Fig. 17)

Se trata de construir el ángulo que sea suma de otros dos conocidos, $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Se construye, como en el ejercicio anterior, el ángulo $\hat{A}$ y a continuación, a partir del lado *b'*, se construye el ángulo $\hat{B}$. El ángulo $\hat{C}$ es la suma de los ángulos dados. En la figura se han llevado las cuerdas $\overline{1\text{-}2}$ y $\overline{3\text{-}4}$ en $\overline{1'\text{-}2'}$ y $\overline{3'\text{-}4'}$.

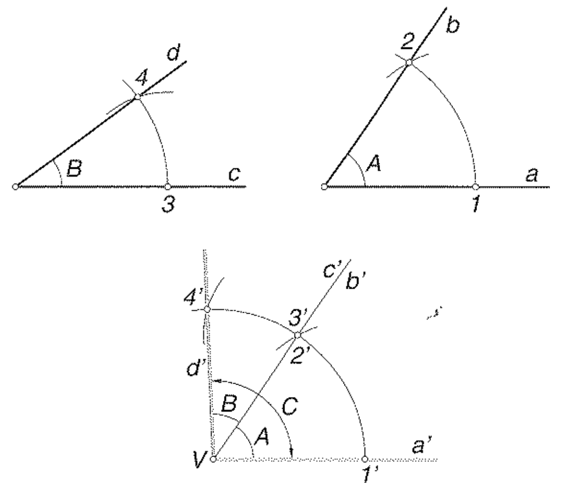


Fig. 17.

16. Diferencia de ángulos (Fig. 18)

Se dan los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ y hay que hallar el ángulo que sea diferencia de los dos. Se dibuja primero el ángulo mayor $\hat{A}$, con ayuda de la cuerda $\overline{1\text{-}2}$ y luego a partir de *2* se toma la cuerda $\overline{3\text{-}4}$, con lo cual se obtiene el lado *c'*. El ángulo $\hat{C}$ es la solución.

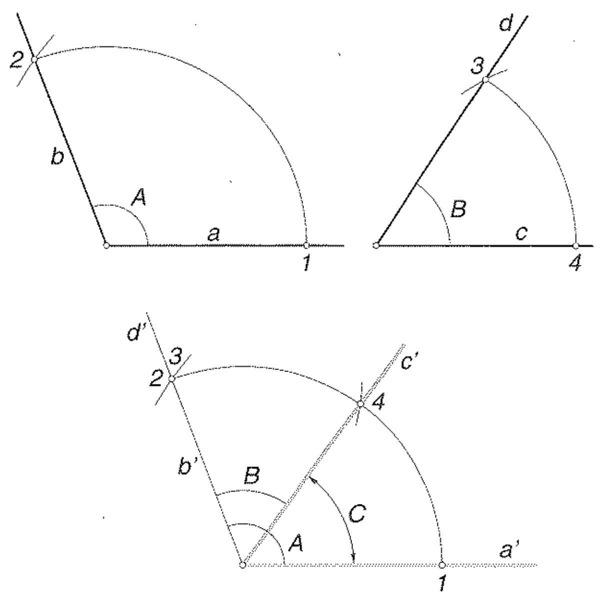


Fig. 18.

17. Trazado de la bisectriz de un ángulo

Primer método (Fig. 19):

Con centro en el vértice $\hat{A}$ se traza un arco $\overset{\frown}{1\text{-}2}$, de radio arbitrario, y con centros en *1* y *2*, los arcos $\overset{\frown}{3}$ y $\overset{\frown}{4}$ del mismo radio, los cuales se cortan en *B*. La recta *A-B* es la bisectriz del ángulo. Esta bisectriz, que divide el ángulo en dos partes iguales, es un lugar geométrico, ya que todos sus puntos equidistan de los lados del ángulo.

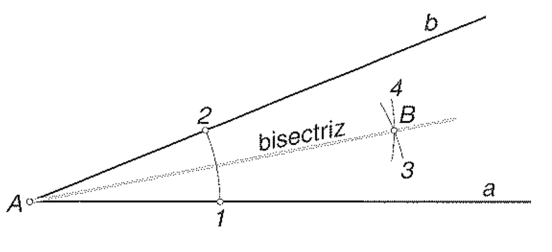


Fig. 19.

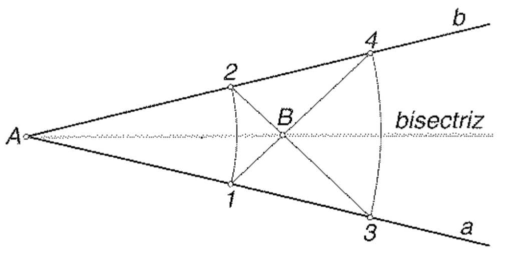


Fig. 20.

Segundo método (Fig. 20):

Con centro en *A* se trazan dos arcos cualesquiera $\widehat{1\text{-}2}$ y $\widehat{3\text{-}4}$. Las rectas *2-3* y *1-4* se cortan en *B*. La bisectriz es la recta *A-B*.

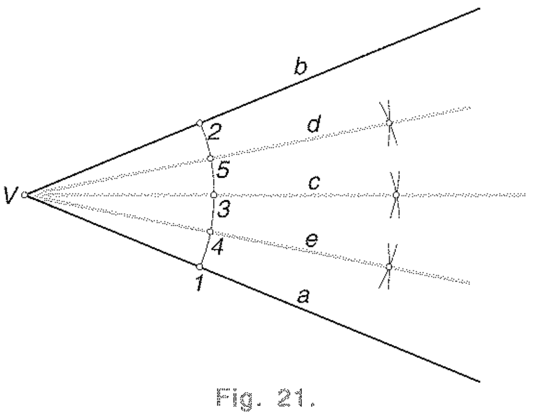


Fig. 21.

18. División de un ángulo en 2, 4, 8..., 2ⁿ partes iguales (Fig. 21)

Tenemos el ángulo de vértice *V* y lados *a* y *b*. La bisectriz *c* lo divide en dos partes iguales. Las bisectrices *d* y *e* de cada una de dichas partes dividen el ángulo en cuatro partes iguales. Para un mayor número de divisiones se sigue operando de la misma forma.

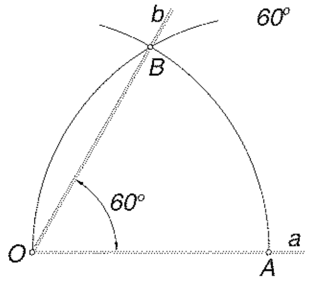


Fig. 22.

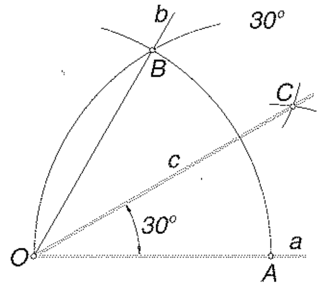


Fig. 23.

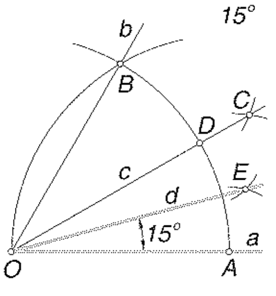


Fig. 24.

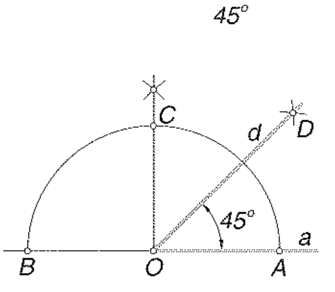


Fig. 25.

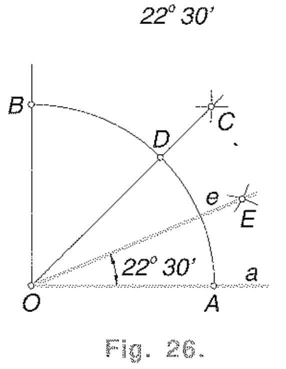


Fig. 26.

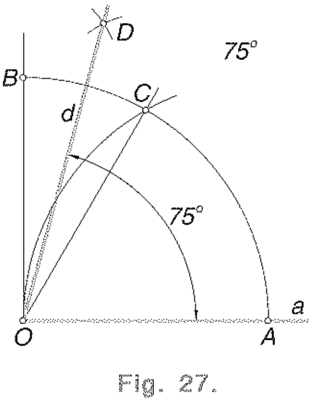


Fig. 27.

19. Construcción de ángulos

Ángulo de 60° (Fig. 22):

Con centros en *O* y en *A* se trazan dos arcos iguales que se cortan en *B*. Las rectas *a* y *b* forman 60°.

Ángulo de 30° (Fig. 23):

Basta trazar la bisectriz *c* del ángulo anterior.

Ángulo de 15° (Fig. 24):

Se traza la bisectriz *d* del ángulo de 30° hallado anteriormente.

Ángulo de 45° (Fig. 25):

Se traza la bisectriz *d* del ángulo $\widehat{AOC}$ de 90°.

Ángulo de 22° 30' (Fig. 26):

Se traza la bisectriz del ángulo anterior.

Ángulo de 75° (Fig. 27):

Tenemos el ángulo $\widehat{AOB}$ de 90° y se construye el ángulo $\widehat{AOC}$ de 60°. El ángulo $\widehat{COB}$, diferencia de los anteriores, vale 30°; si trazamos la bisectriz $d \equiv OD$ del ángulo $\widehat{COB}$, tendremos el ángulo $\widehat{COD}$ de 15°. Segun esto, las rectas *a* y *d* forman 60° + 15° = 75°.

20. Construcción de ángulos con las plantillas (Fig. 28)

En la figura se indica con claridad la forma de colocar las plantillas para obtener algunos ángulos de gran aplicación.

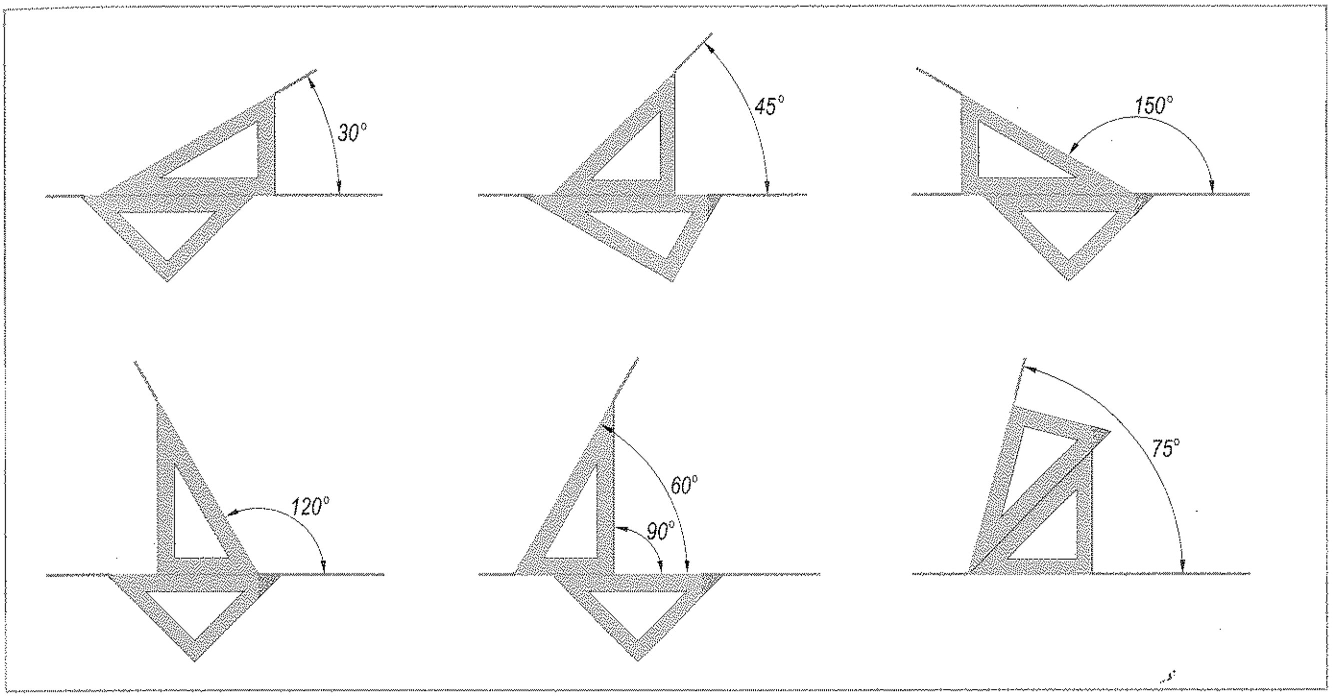
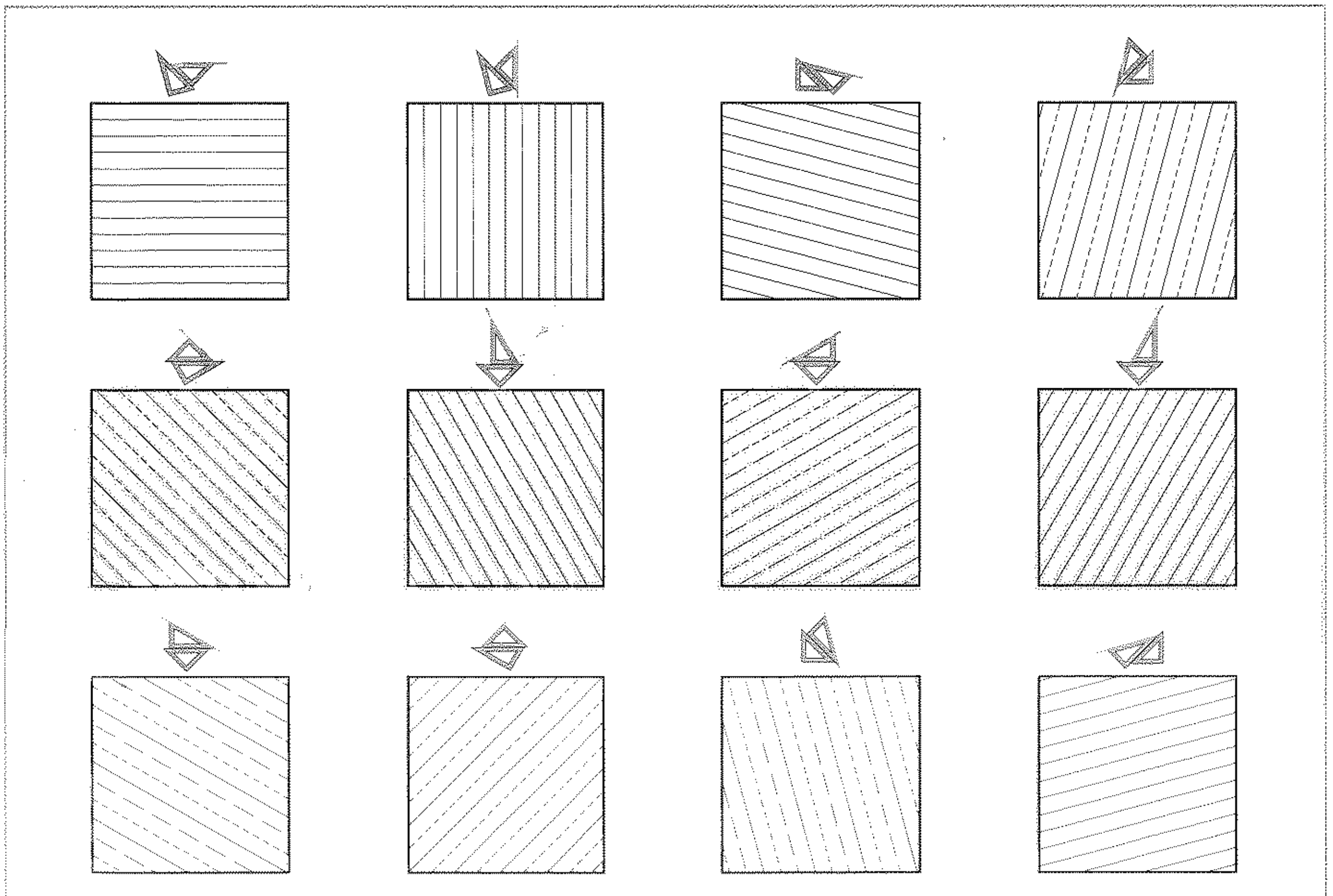
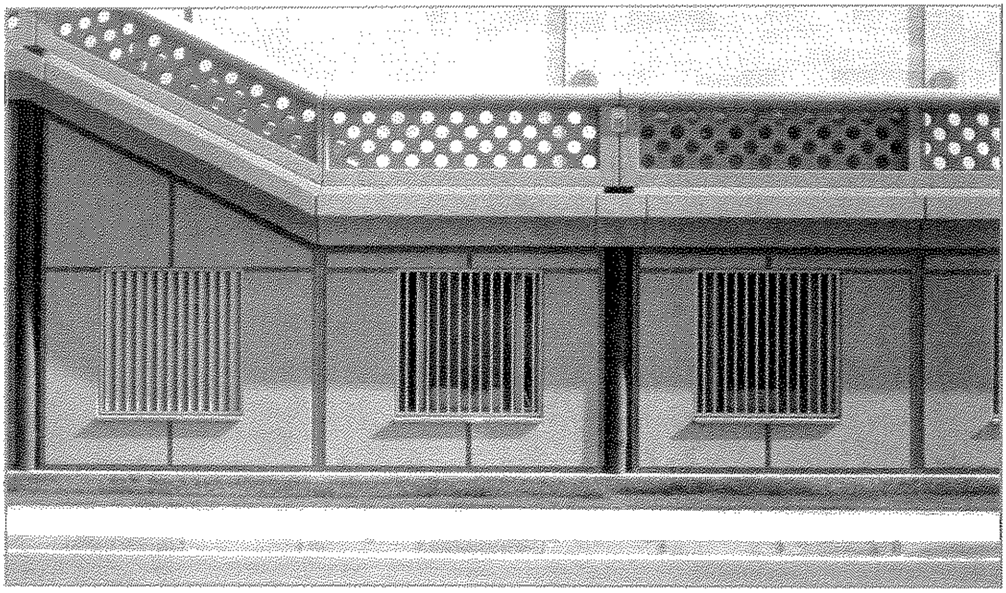


Fig. 28.

ACTIVIDADES

1. Ejecutar a tamaño doble los diferentes rayados de la figura. En la parte superior se indica la posición en que deben colocarse las plantillas.





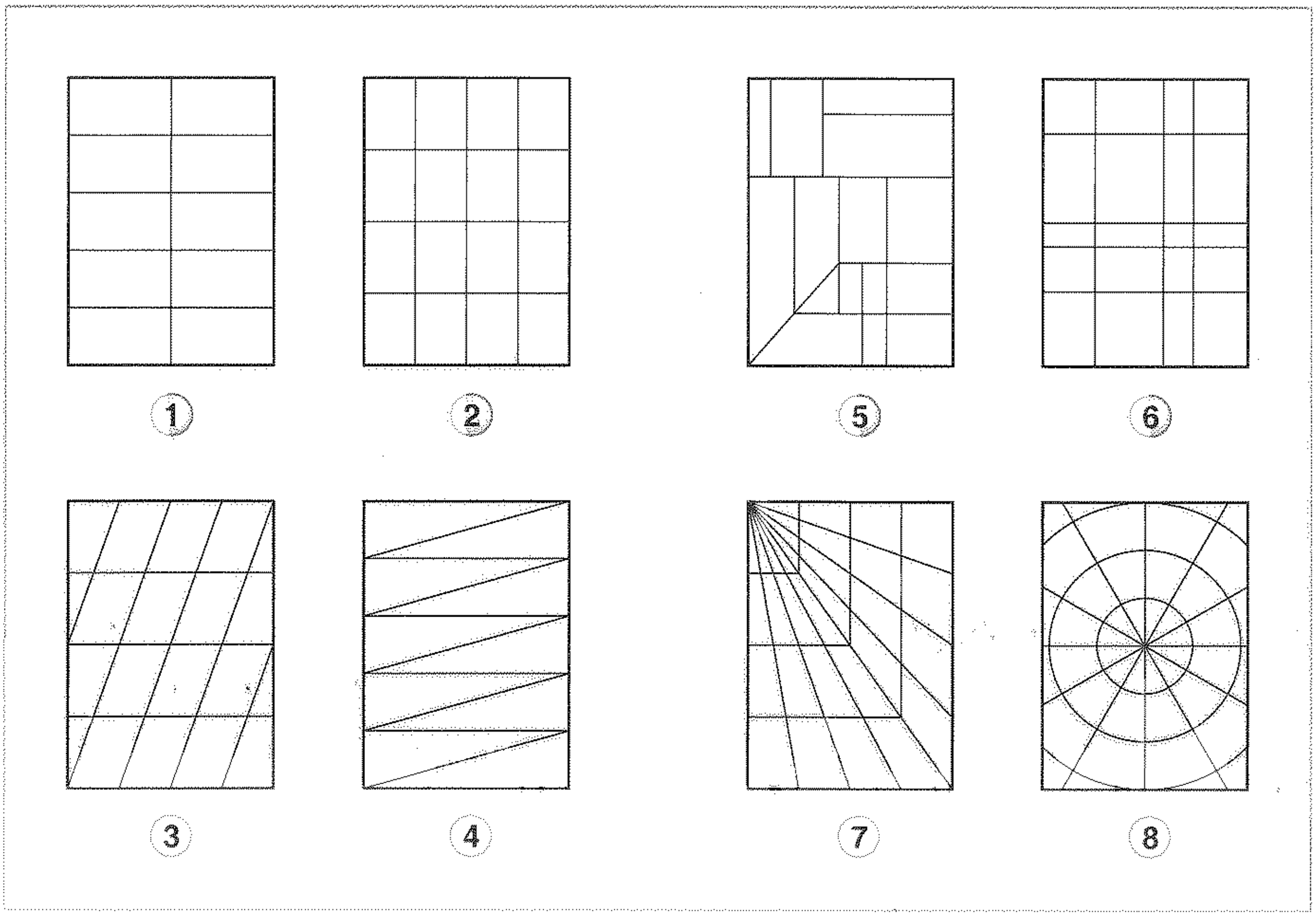
Aplicaciones geométricas en detalles urbanísticos.

2. **Estructura**. Es el ritmo que siguen los elementos de una composición en relación al conjunto. Estos elementos se disponen sobre ejes, los cuales siguen un orden de repetición sistemática, que es lo que da en conjunto la armonía de la composición. Según su ritmo se denomina:

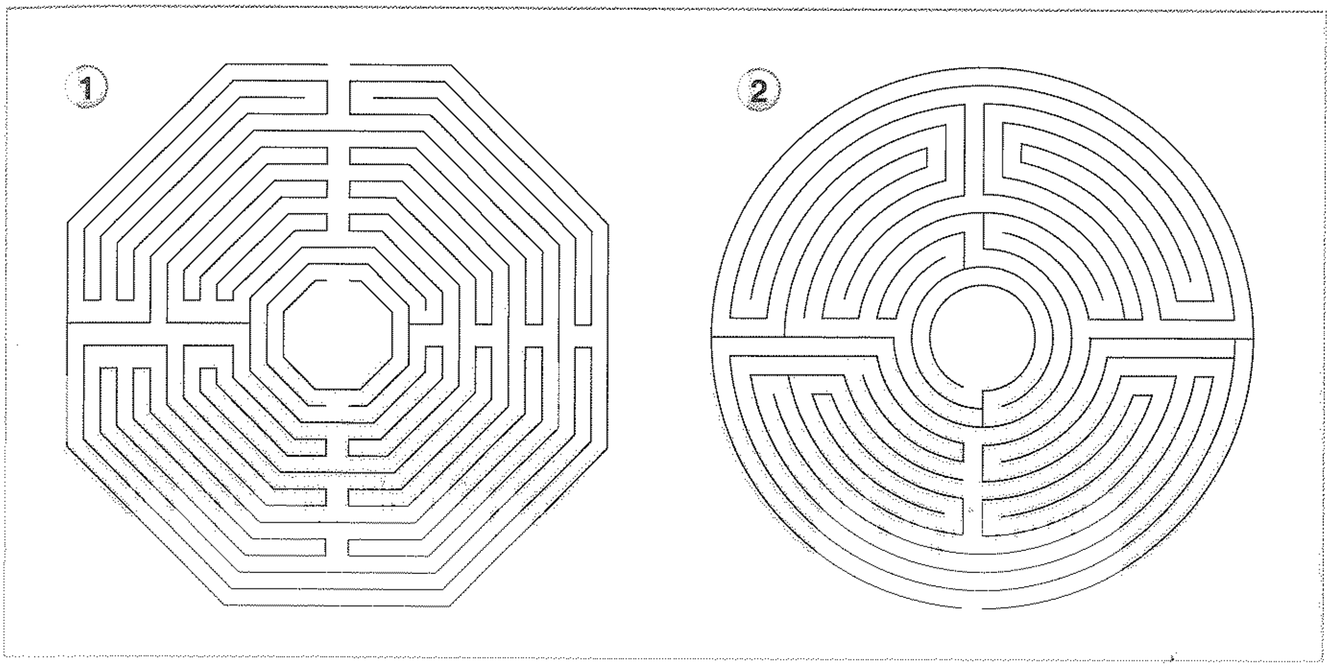
   Estructura perpendicular (1 y 2), estructura paralela (3 y 4).

   Estructura independiente (5 y 6), estructura radial (7 y 8).

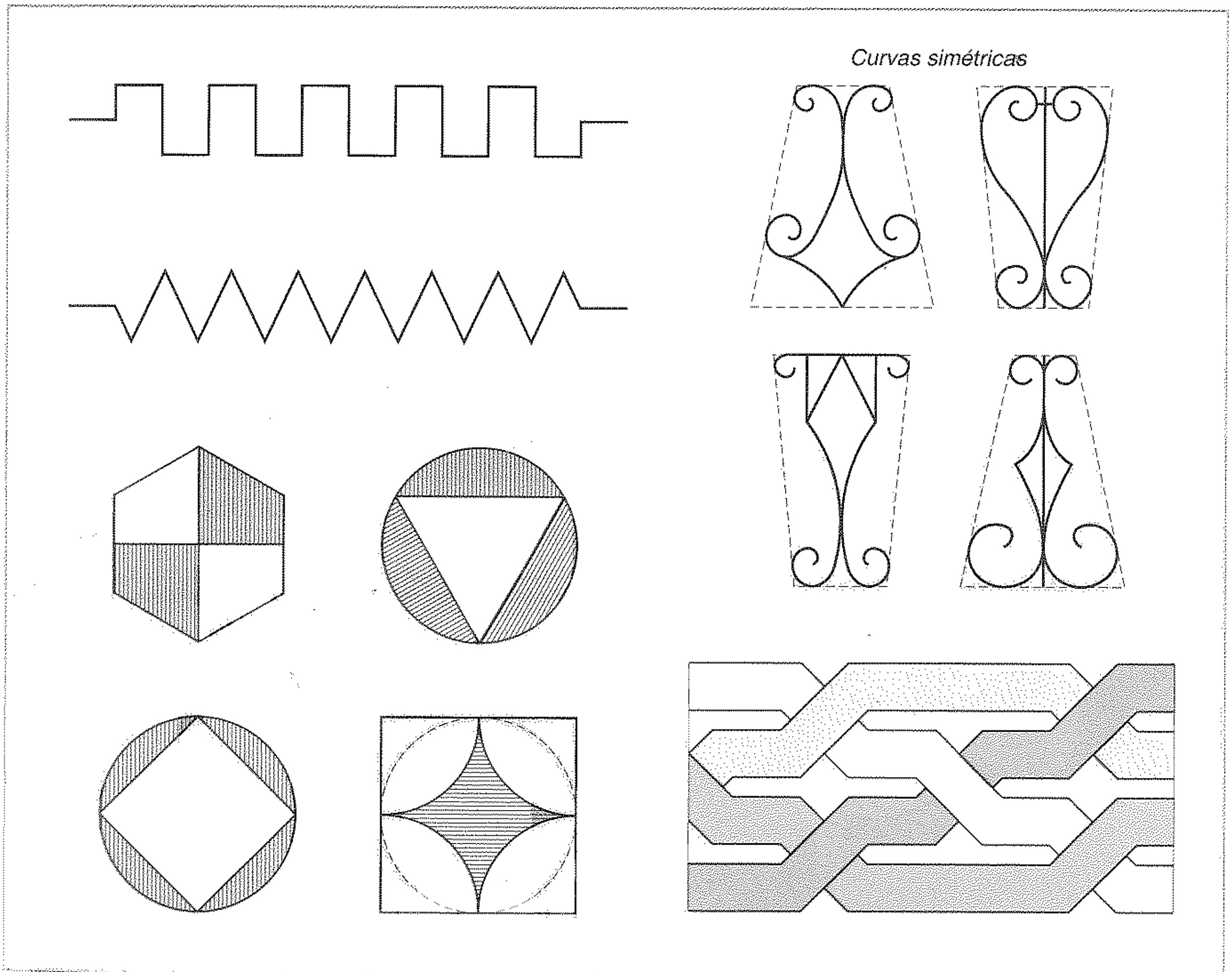
El alumno dibujará estas estructuras, primero a mano alzada y luego a limpio con instrumentos.



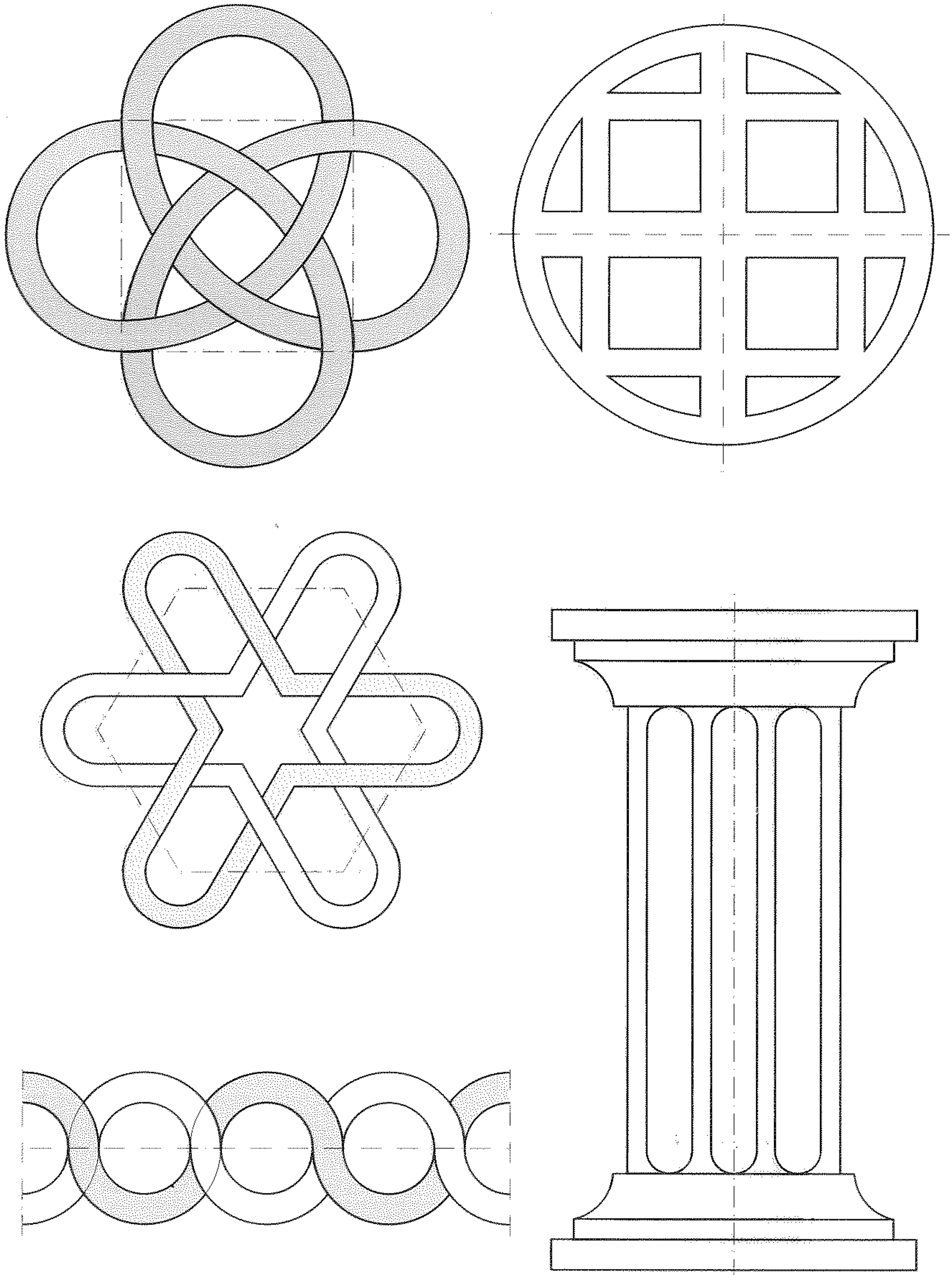
3. **Laberintos**. La figura 1 es un ejemplo inspirado en un laberinto que existió en la catedral de Amiens en Francia, con dos direcciones verdaderas y once falsas. La figura 2 es un laberinto circular con dos direcciones verdaderas y cuatro falsas.



4. **Dibujo a mano alzada.** El alumno debe acostrumbrarse a dibujar con lápiz a mano alzada. Le proponemos una serie de ejercicios sencillos para que vaya adquiriendo soltura.



5. Dibujo a mano alzada.



ESCALAS

TEMA 3

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática, el alumno debe aprender el concepto de "escala" y a construir una escala gráfica y aplicarla. Puede hacer prácticas con un escalímetro. Aprenderá a dibujar con escalas pequeñas, por ejemplo, E: 1:2,5, sin construir la escala, multiplicando mentalmente las medidas por 4 y dividiéndolas por 10.

La actividad se centrará en hacer algún plano de cuerpos sencillos dibujándolos a escala.

Esta unidad temática se puede desarrollar en una clase. Sin embargo, la práctica del dibujo a escala se presentará constantemente durante el curso.

1. Proporcionalidad

Al representar un objeto sobre el papel para tener el "plano industrial" del mismo, ocurre, a veces, que por su tamaño, grande o pequeño, esta representación no se puede hacer con las medidas reales. Según esto, hay que reducir o ampliar las medidas reales en una misma proporción.

Proporción o **escala del dibujo** es la relación que existe entre las medidas del dibujo y las medidas reales del objeto.

Se llama también **razón** o **proporción** a la relación que existe entre los valores numéricos de dos segmentos rectilíneos, o lo que es igual, el número que expresa el valor de un segmento cuando el otro se toma como unidad.

2. Escalas

Hemos visto que una escala es el valor de un cociente:

$$\text{escala} = \frac{\text{medidas del cuerpo en el dibujo}}{\text{medidas del cuerpo en la realidad}}$$

Por ejemplo, la medida 1.400 mm. es la realidad; si se representa en el dibujo por 70 mm., se habrá aplicado la escala siguiente: E = 70/1.400 = 1/20, que se lee "escala 1 es a 20".

3. Clases de escalas

Las escalas pueden ser: "**de reducción**", "**de ampliación**" y a "**tamaño natural**". Las escalas que deben utilizarse están normalizadas y sus valores son los indicados en la Tabla 1.

Escalas de reducción				Escalas de ampliación
Fabricación e instalaciones	Construcciones civiles	Topografía	Urbanismo	
1:2	1:5	1:100	1:500	2:1
1:5	1:10	1:200	1:2.000	5:1
1:10	1:20	1:500	1:500	10:1
1:20	1:50	1:1.000	1:5.000	
1:50	1:100	1:2.000	1:25.000	
1:100	1:200	1:5.000	1:50.000	
1:200	1:500	1:10.000		
	1:1.000	1:25.000		
		1:50.000		

Tabla 1

Se permitirá, aunque no se recomienda, el uso de las escalas 1:2,5, 1:25, 1:250 y 1:2.500 y en urbanismo, 1:1.000 y 1:10.000.

Escala natural: El dibujo se hace con las medidas reales, sin reducción o ampliación. Se indica así: E1:1.

Detalles que se han de tener en cuenta:

- Todas las escalas empleadas se indicarán en la rotulación, destacando la principal con caracteres de mayor tamaño. Las escalas secundarias se indicarán también en las partes correspondientes del dibujo.
- En general, todo será dibujado a escala. Las cotas que no estén a escala se deben subrayar.
- Sobre un plano dibujado a escala, las cifras de cota que se ponen serán siempre las reales, es decir, las medidas reales de la pieza.

4. Escala gráfica y su construcción

La escala gráfica es la representación de la escala numérica, es decir, la regla para medir (Fig. 1).

Ejemplo: E1:2. Escala numérica 1 es a 2. Este cociente vale 0,5, es decir, un decímetro real equivale a 0,5 decímetros en el papel, o sea, a 5 centímetros. Según esto, se toman sobre una recta 5 cm., equivalentes en esta escala a 1 dm. La contraescala se pone a la izquierda del cero u origen y se dividen los 5 cm. en diez partes, cada una de las cuales valdrá un centímetro en la realidad.

Otro ejemplo: E1:250. Escala numérica 1 es a 250. Este cociente vale 0,004, es decir, un decámetro equivale a 0,004 decámetros en el dibujo, que son 4 cm. (Fig. 2). Se toma el segmento de 4 cm. y en el extremo se pone 1 Dm., otro segmento de 4 cm. y tendremos 2 Dm. La contraescala mide 4 cm., se divide en diez partes y cada una equivaldrá a 1 m. La contraescala sirve para conocer la décima parte de la unidad de medida.

5. Triángulo universal de escalas

Por medio de un triángulo se pueden obtener las escalas más sencillas, tanto normalizadas como sin normalizar, por ejemplo 1:10, 1:5, 1:2, 1:1, 2:5, 3:10, 3:5, 7:10, 4:5, 11:10, 6:5, etc. Este triángulo puede ser equilátero de 10 cm. de lado (Fig. 3) o bien rectángulo isósceles cuyos catetos midan 10 cm. (Fig. 4).

En las Figs. 3 y 4 se indican una serie de escalas obtenidas a partir de la escala natural E1:1.

La base del triángulo está dividida en centímetros por lo que es la escala natural E1:1. Las paralelas a esta base por los puntos de división van dando escalas de reducción cuando están por encima de la base y escalas de ampliación cuando están por debajo de la base. En las figuras se indican las diversas escalas.

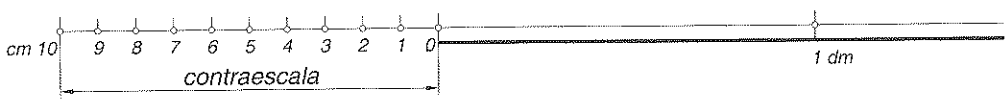


Fig. 1.

Fig. 2.

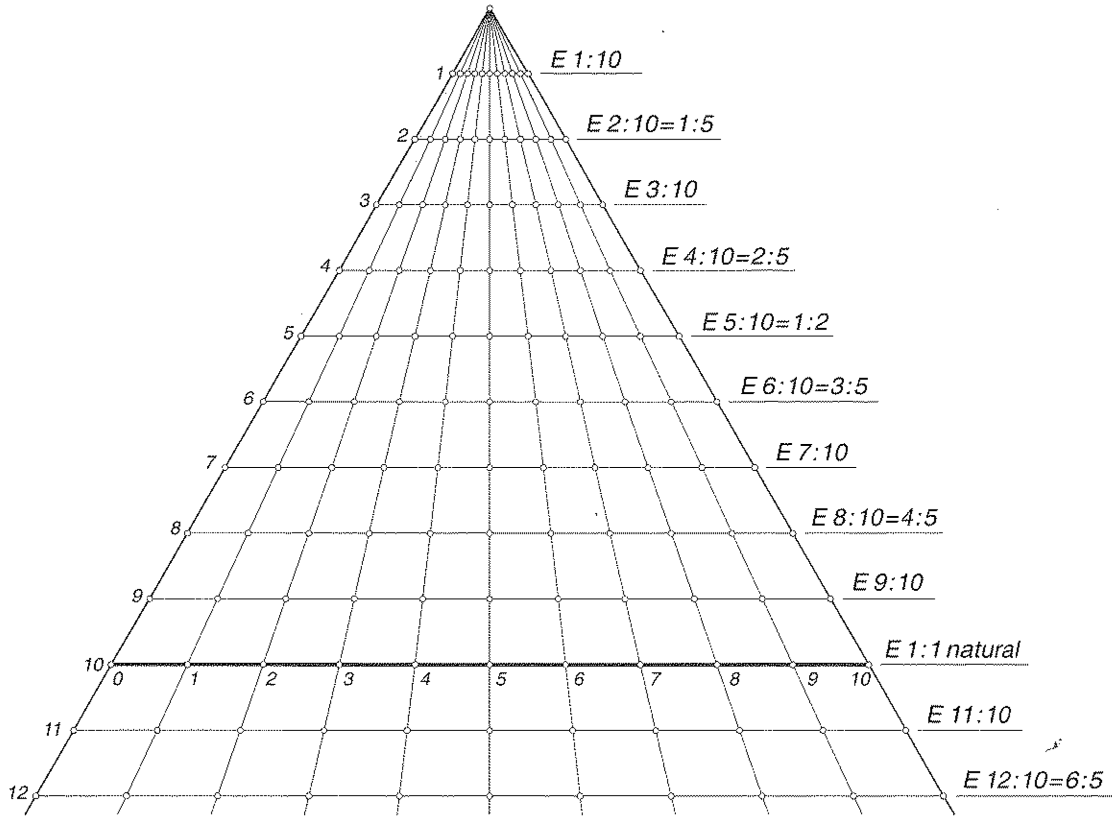

E 1:10
E 2:10=1:5
E 3:10
E 4:10=2:5
E 5:10=1:2
E 6:10=3:5
E 7:10
E 8:10=4:5
E 9:10
E 1:1 natural
E 11:10
E 12:10=6:5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Fig. 3.

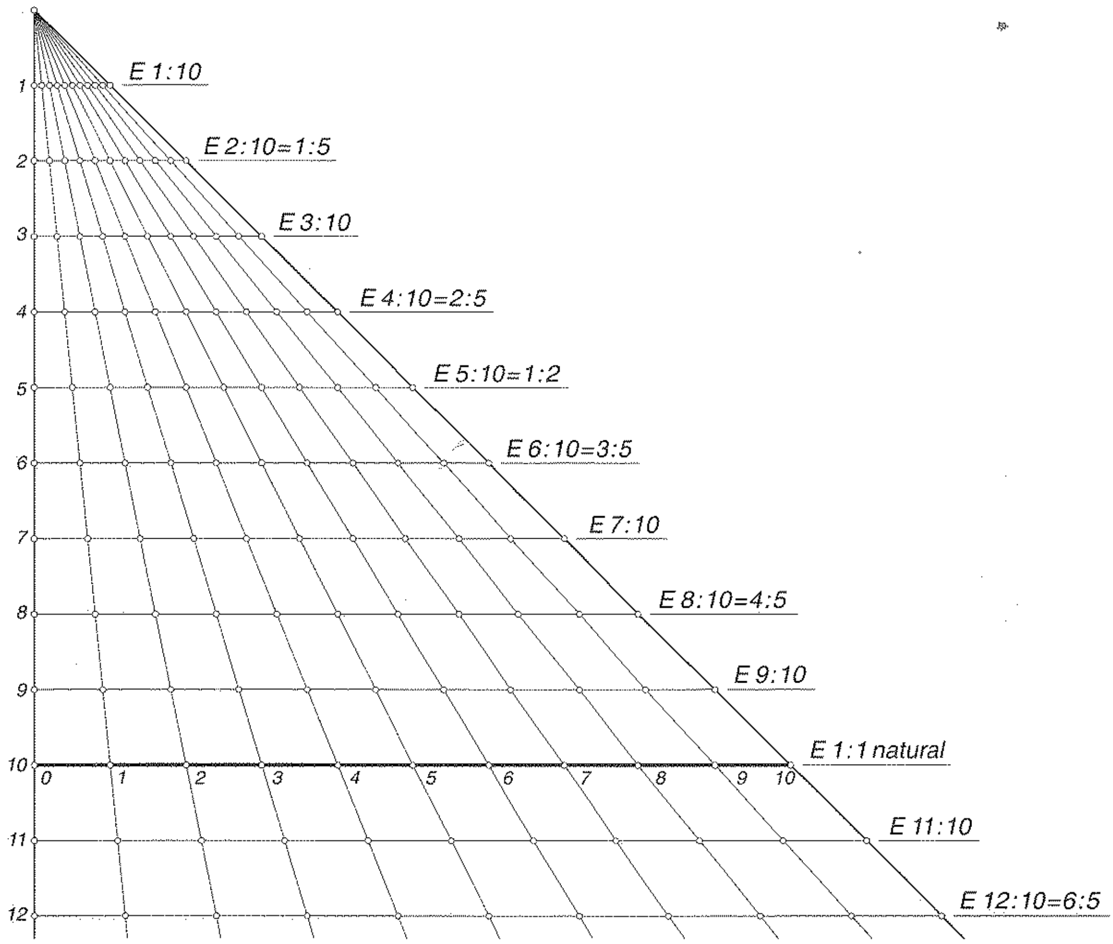

E 1:10
E 2:10=1:5
E 3:10
E 4:10=2:5
E 5:10=1:2
E 6:10=3:5
E 7:10
E 8:10=4:5
E 9:10
E 1:1 natural
E 11:10
E 12:10=6:5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Fig. 4.

6. Construcción de la escala decimal de transversales

Con este tipo de escalas se pueden apreciar las décimas partes de la unidad tomada en la contraescala (Fig. 5).

Ejemplo: E1:250. Se construye la escala gráfica 1 es a 250, como en la Fig. 4; por los puntos de división se trazan perpendiculares a la escala y se toma una altura arbitraria *h* que se divide en 10 partes iguales; por estas partes se trazan paralelas a la línea de la escala y se unen las divisiones de la contraescala en la forma que indica la figura, es decir, la división *0* con la *1*, la *1* con la *2*, etc.; se forman así triángulos rectángulos cuyas bases van aumentando en una décima de la unidad de la contraescala.

En la figura se toma 1,64 Dm., es decir, 1,6 hasta la división de la contraescala y luego subiendo 4 décimas hasta la horizontal que pasa por 4. También se indica la medida 2,38 Dm. = 23,8 m. = 238 dm.

En la práctica de dibujo se utilizan reglas llamadas "**escalímetros**", de sección triangular, donde vienen marcadas la escala natural y otras cinco escalas. También se utilizan escalímetros en abanico, que son una serie de reglas, cada una con una escala, dispuestas en forma de abanico.

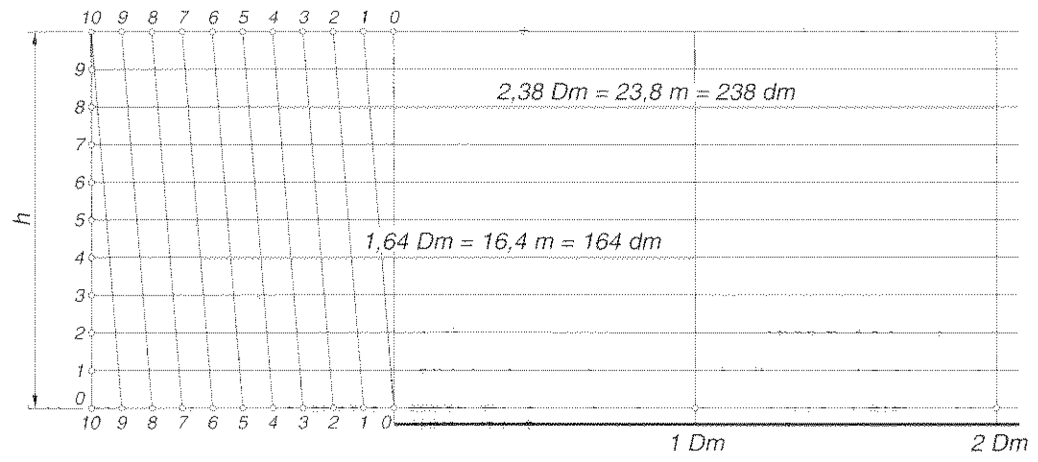


Fig. 5.

ACTIVIDADES

1. ¿Cuál es la diferencia entre una escala de reducción y otra de ampliación?
2. ¿Cuál de estas escalas no está normalizada?: 1:5, 5:1, 1:3, 1:10, 10:1, 1:100.
3. ¿Cuáles son las escalas de ampliación?
4. Si en un mapa vemos la escala 1:50.000 y medimos en él una distancia de 32 mm., ¿qué medida representa ésta en la realidad?
5. En un plano de taller, una pieza está dibujada a escala 1:5. ¿A qué medida hay que tornear la cota indicada en el plano con 35 mm.?
6. Si en un plano se observa en el casillero de las escalas: **1:1** (2:1), ¿qué quiere decir?
7. En el caso de que en un mismo plano estén dibujadas varias piezas a escalas diferentes y predomine sobre todas la escala 1:1 y las otras sean 2:1 y 5:1, ¿cómo se indicarán en el casillero correspondiente a las escalas?
8. Queremos dibujar una pieza a escala 1:10. ¿Cuánto deberán medir en el plano las medidas tomadas en ella de 340 y 750 mm.?
9. Sobre un plano hecho a escala 2:1, hemos medido una longitud de 44 mm. ¿Cuánto mide en la realidad?

10. Dibujar las piezas representadas a las escalas que se indican.

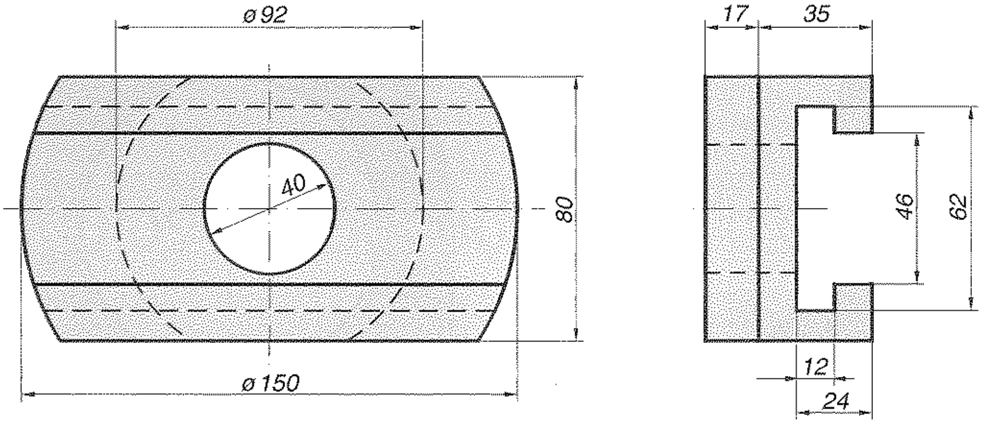


Fig. 6. Dibujar a escala 1:2.

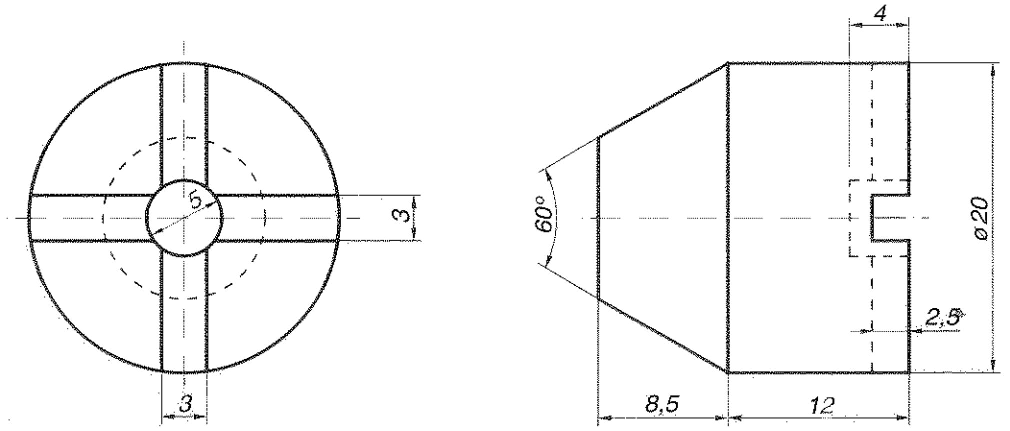


Fig. 7. Dibujar a escala 2:1.

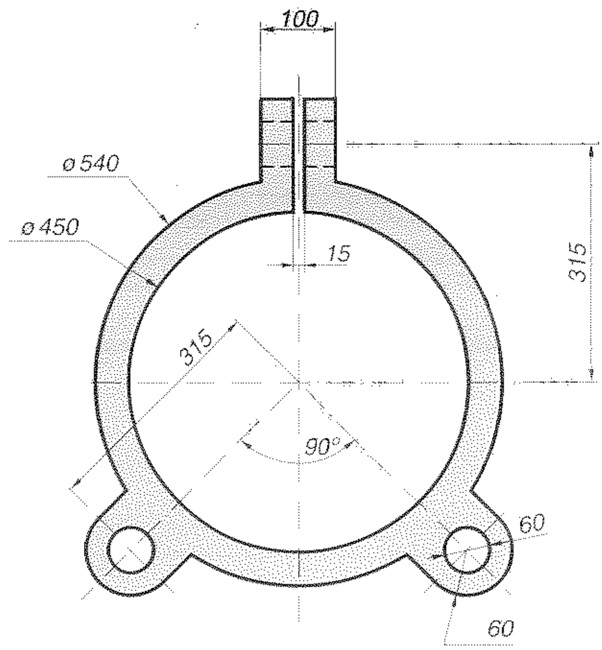


Fig. 8. Dibujar a escala 1:5.

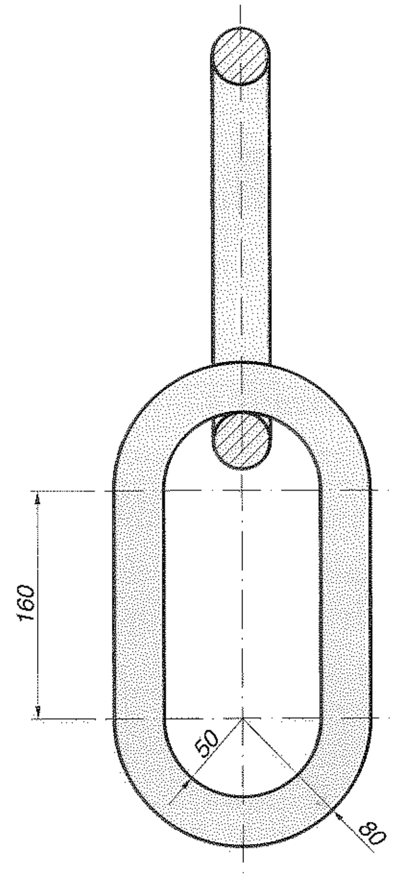


Fig. 9. Dibujar a escala 1:2.

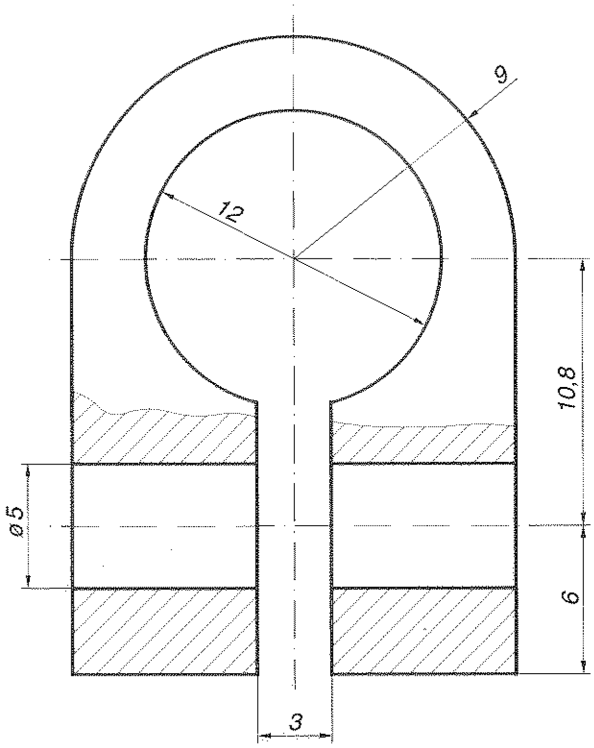


Fig. 10. Dibujar a escala 5:1.

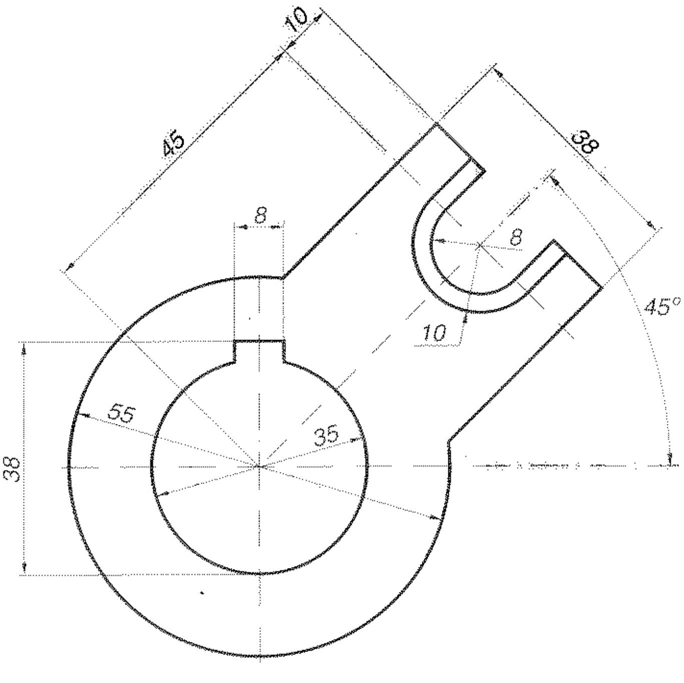


Fig. 11. Dibujar a escala 2:1.

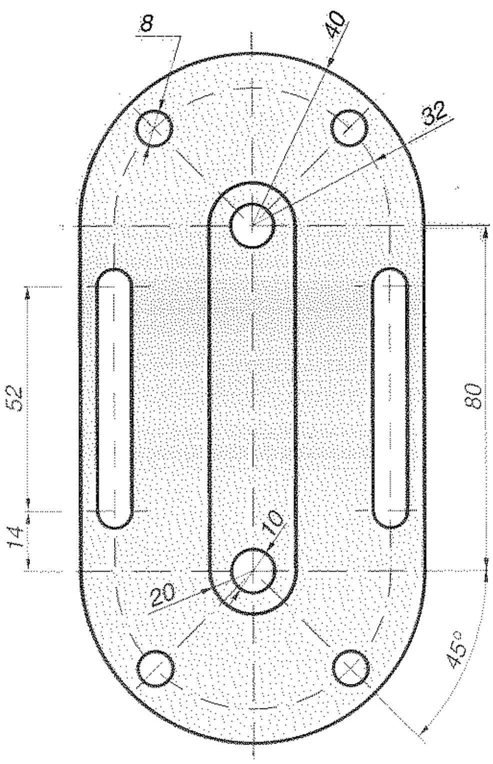


Fig. 12. Dibujar a escala 1:1.

CONSTRUCCIÓN DE FORMAS POLIGONALES I
Triángulos.
Ángulos relacionados con la circunferencia

TEMA 4

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática, el alumno se familiarizará con el triángulo, que es la figura plana poligonal más sencilla.

Debe conocer sus clases y características, así como los conceptos de altura, mediana, mediatriz de un lado y bisectriz de un ángulo. Aprenderá a construir un triángulo a partir de unos datos en los casos más sencillos.

Asimismo debe conocer las clases de ángulos relacionados con la circunferencia y el valor de cada uno de ellos: ángulo central, inscrito, semiinscrito, interior, exterior y circunscrito.

Para poder hallar la solución de un problema de construcción de triángulos es conveniente que el alumno parta del triángulo ya construido, poniendo los datos que se dan del mismo, y de ahí deduzca la construcción.

La explicación puede hacerse en dos clases.

Fig. 1. Estructura espacial formada por triángulos unidos mediante articulaciones esféricas.

1. Triángulos. Definiciones y clases

El triángulo es la figura plana limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. Tiene tres lados y tres ángulos (Fig. 2).

Los ángulos se designan con letras mayúsculas, y los lados opuestos a los ángulos, con las mismas letras minúsculas.

La suma de los tres ángulos es 180°:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Para que exista triángulo, cada lado tiene que ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

En función de sus lados, los triángulos pueden ser:

- **equiláteros**: tienen los tres lados y los tres ángulos iguales (Fig. 3).
- **isósceles**: tienen dos lados iguales y dos ángulos iguales (Fig. 4).
- **escaleno**: los tres lados y ángulos son desiguales (Fig. 5).

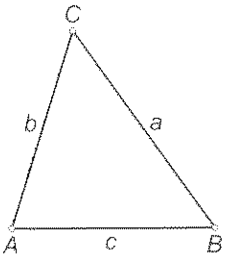


Fig. 2.

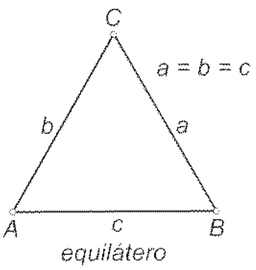


Fig. 3.

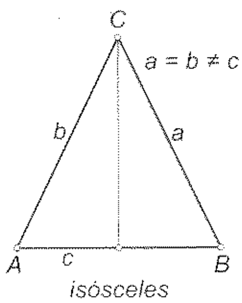


Fig. 4.

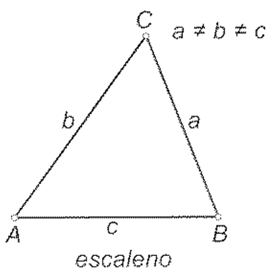


Fig. 5.

En función de sus ángulos, los triángulos pueden ser:

- **acutángulos**: los tres ángulos son agudos (menores de 90°) (Fig. 6).
- **rectángulos**: tienen un ángulo recto (90°) (Fig. 7).
- **obtusángulo**: uno de sus ángulos es obtuso (mayor de 90°) (Fig. 8).

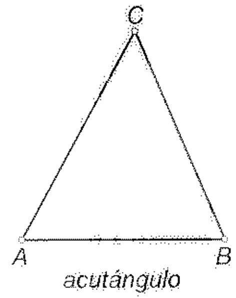


Fig. 6.

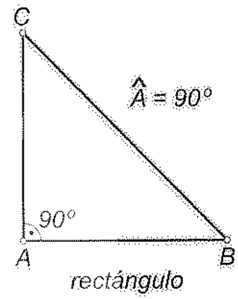


Fig. 7.

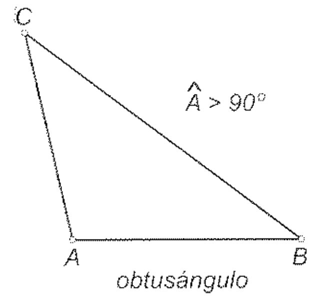


Fig. 8.

2. Líneas notables de un triángulo

- **Mediatriz de un lado.** Es la recta perpendicular al lado en su punto medio (Fig. 9).
- **Mediana de un lado.** Es el segmento que une un vértice con la mitad del lado opuesto (Fig. 10).
- **Bisectriz de un ángulo.** Es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales (Fig. 11).
- **Altura de un triángulo.** Es el segmento perpendicular trazada por un vértice al lado opuesto (Fig. 12).

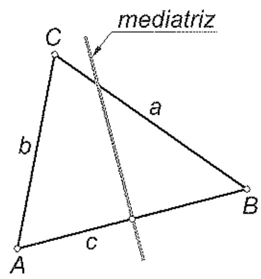


Fig. 9.

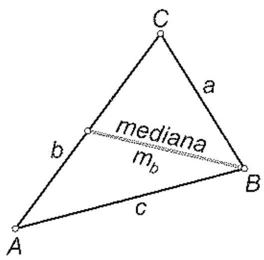


Fig. 10.

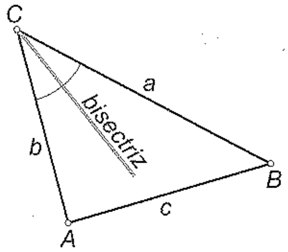


Fig. 11.

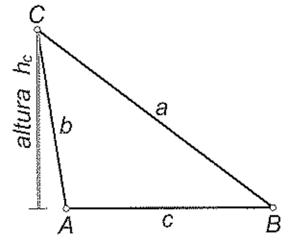


Fig. 12.

3. Datos necesarios para construir un polígono

Para construir un polígono de n lados es preciso conocer $2n - 3$ datos.

En el caso del triángulo $2 \cdot 3 - 3 = 3$ datos.

Si se trata de un triángulo rectángulo, como conocemos un ángulo de 90°, harán falta otros dos datos. Lo mismo ocurre en un triángulo isósceles.

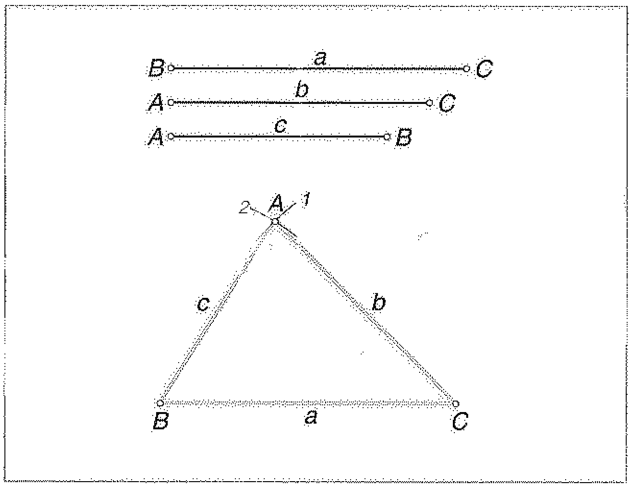


Fig. 13.

4. Construcción de un triángulo conociendo los tres lados (Fig. 13)

Los datos son los lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ y $c = \overline{AB}$. Se sitúa uno de los lados, p. ej., el $a = \overline{BC}$, y con centros en B y C se trazan los arcos *1* y *2* de radios c y b, respectivamente; estos arcos se cortan en el vértice A, que unido con B y C define el triángulo.

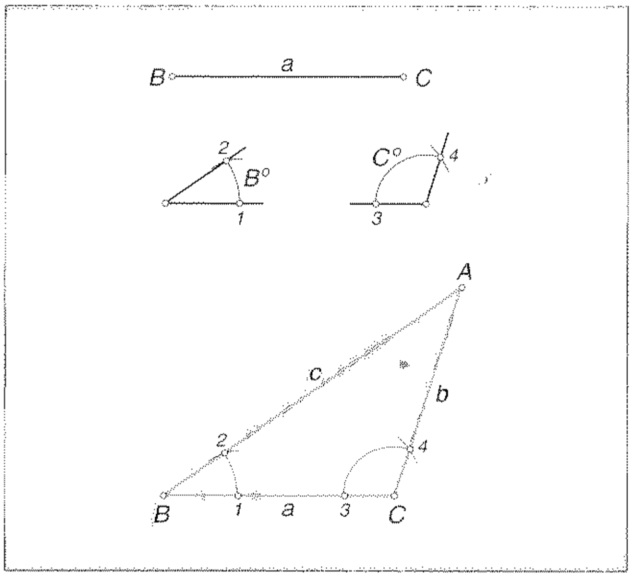


Fig. 14.

5. Construcción de un triángulo conociendo un lado y los ángulos adyacentes (Fig. 14)

Los datos son el lado $a = \overline{BC}$ y los ángulos adyacentes $\hat{B}$ y $\hat{C}$ al lado a; en el vértice B se dibuja el ángulo de B^o con ayuda del arco $\widehat{1\text{-}2}$ y en el vértice C se dibuja el ángulo de C^o con ayuda del arco $\widehat{3\text{-}4}$; los lados c y b de estos ángulos, prolongados, se cortan en el vértice A, que completa el triángulo.

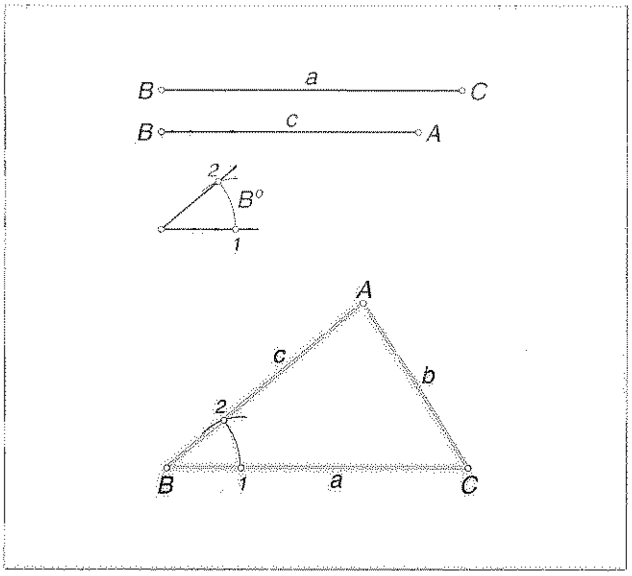


Fig. 15.

6. Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo comprendido (Fig. 15)

Los datos son los lados $a = \overline{BC}$ y $c = \overline{BA}$ y el ángulo $\hat{B}^o$; se coloca uno de los lados conocidos, p. ej., el $a = \overline{BC}$, y en el vértice B se construye el ángulo de B^o con ayuda del arco $\widehat{1\text{-}2}$; sobre el lado obtenido de este ángulo se lleva $c = \overline{BA}$; finalmente se une A con C para completar el triángulo.

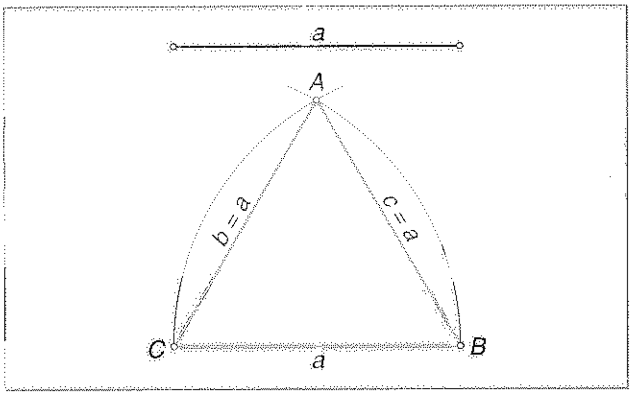


Fig. 16.

7. Construcción de un triángulo equilátero a partir del lado (Fig. 16)

El problema se resuelve como el de la Fig. 13, ya que realmente se conocen los tres lados, pues son iguales. Con centros en C y B y radio a se trazan dos arcos que se cortan en el tercer vértice A.

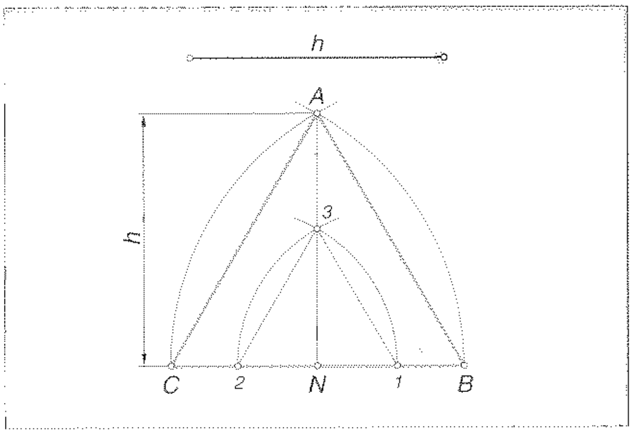


Fig. 17.

8. Construcción de un triángulo equilátero conocida su altura (Fig. 17)

Como todos los triángulos equiláteros son semejantes, se construye uno cualquiera, p. ej., el *1-2-3*, cuya altura resulta ser $\overline{N\text{-}3}$; sobre $\overline{N\text{-}3}$ prolongada se lleva a partir de N la altura h dada, con lo que se obtiene el vértice A; por paralelas se completa el triángulo.

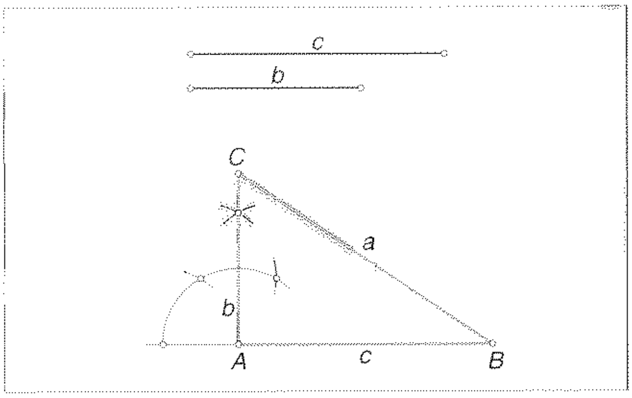


Fig. 18.

9. Construcción de un triángulo rectángulo conociendo los dos catetos *b* y *c* (Fig. 18)

Se sitúa uno de ellos, el $c = \overline{AB}$, por el extremo A se traza la perpendicular, y después se lleva sobre ella el otro cateto b. Uniendo C con B se completa el triángulo.

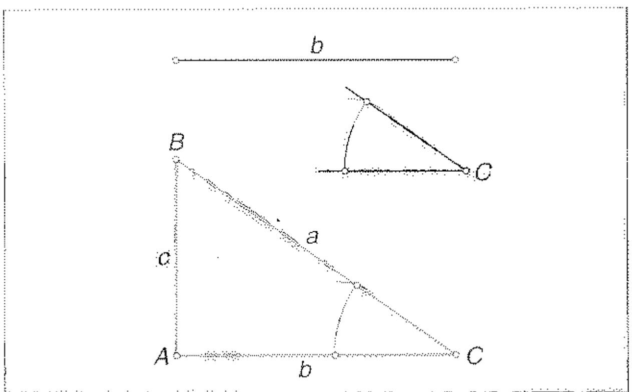


Fig. 19.

10. Construcción de un triángulo rectángulo conociendo un cateto *b* y un ángulo agudo $\hat{C}$ (Fig. 19)

Se sitúa el lado $b = \overline{AC}$ y en el vértice C se construye el ángulo $\hat{C}$. Por A se traza la perpendicular al lado b hasta que corte en B al lado a del ángulo $\hat{C}$.

11. Construcción de un triángulo rectángulo dados un cateto y la hipotenusa (Fig. 20)

Los datos son el cateto b y la hipotenusa a. En la parte superior de la figura se sitúa la hipotenusa $a = \overline{BC}$ y se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$; desde C se corta con radio b a la circunferencia en el punto A, que es el vértice del ángulo recto.

Por la teoría del arco capaz, el ángulo $\hat{A} = 90°$ abarca el segmento $\overline{BC}$, que es un diámetro, es decir, un ángulo central de 180°.

En la parte inferior de la figura se coloca el cateto $b = \overline{AC}$; se traza la perpendicular a él por A y desde C se corta a dicha perpendicular con el arco 2 de radio a, con lo que se obtiene el vértice B.

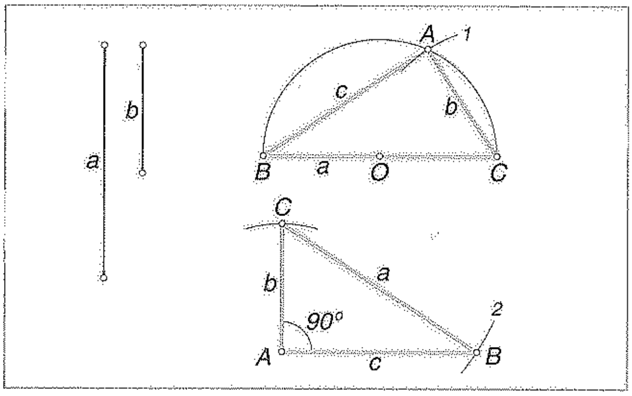


Fig. 20.

12. Construcción de un triángulo isósceles conociendo uno de los lados iguales a y el ángulo desigual $\hat{B}$ (Fig. 21)

Se sitúa el lado a y sobre un extremo, el B, se construye el ángulo dado $\hat{B}$; después se lleva sobre el lado obtenido el lado $a = c$; finalmente se unen A y C.

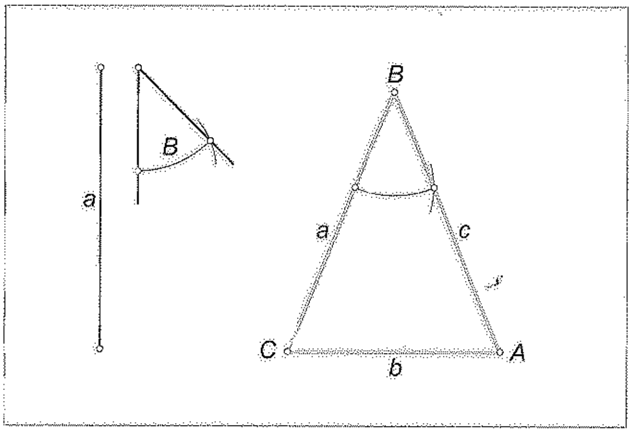


Fig. 21.

13. Construcción de un triángulo isósceles conociendo el lado desigual b y un ángulo igual $\hat{A}$ (Fig. 22)

Por su sencillez, dejamos la construcción a la consideración del lector.

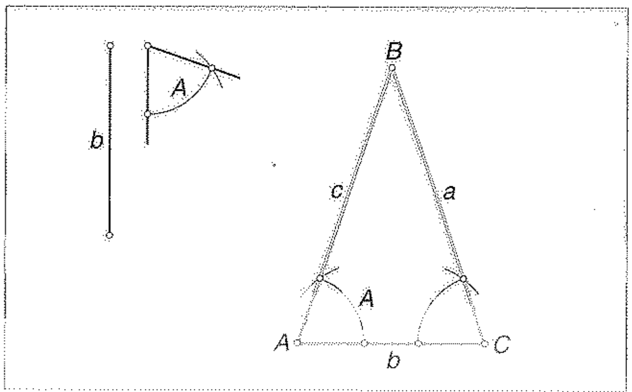


Fig. 22.

14. Construcción de un triángulo isósceles conociendo uno de los lados iguales a y uno de los ángulos iguales $\hat{C}$ (Fig. 23)

Se toma el lado $a = \overline{CB}$ y se construye el ángulo $\hat{C}$; desde el vértice B se corta al lado b con radio a y se tiene el tercer vértice A.

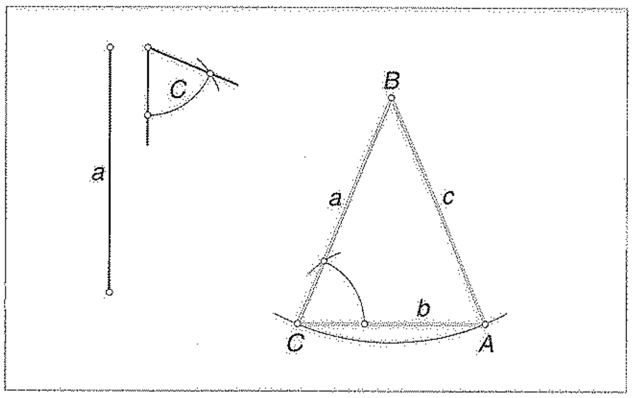


Fig. 23.

15. Ángulos relacionados con la circunferencia

Un ángulo está relacionado con una circunferencia cuando sus lados cortan o son tangentes a la misma.

- **Ángulo central** (Fig. 24)

  Su vértice es el centro de la circunferencia. *Su medida, en grados, es el valor del arco que abarcan sus lados.*

  Por ejemplo: ángulo $A = 45°$.

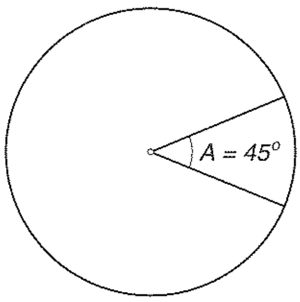


Fig. 24.

- **Ángulo inscrito** (Figs. 25 y 26)

  El vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.

  El valor del ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco que abarcan sus extremos, es decir, del ángulo central correspondiente (Fig. 25).

  Sea el ángulo inscrito $\alpha = \widehat{NVM}$ en el que un lado VM es un diámetro. En el triángulo isósceles NOV, tenemos:

$$\alpha = \beta;\ \hat{A} = \alpha + \beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\hat{A}}{2}$$

  En el caso de que los lados del ángulo inscrito $\widehat{NVR}$ sean dos cuerdas cualesquiera, repitiendo el razonamiento se deduce (Fig. 26):

$$\alpha = \widehat{NVR} = \frac{1}{2}\ \widehat{NOR}$$

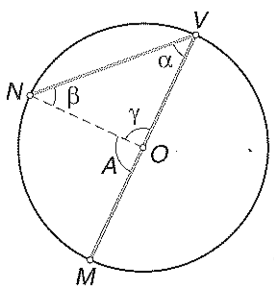


Fig. 25.

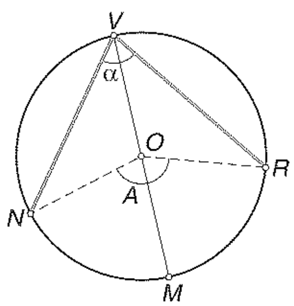


Fig. 26.

- **Ángulo semiinscrito** (Fig. 27)

  Sus lados son una cuerda VN y una tangente VM.

  El valor de un ángulo semiinscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarcan los extremos de la cuerda.

  Si por el centro O trazamos las perpendiculares OV y OR a los lados del ángulo semiinscrito, estos radios forman un ángulo α igual al ángulo A. Según esto:

$$\text{ángulo } A = \frac{\widehat{VON}}{2}$$

  es decir, igual a la mitad del ángulo central correspondiente.

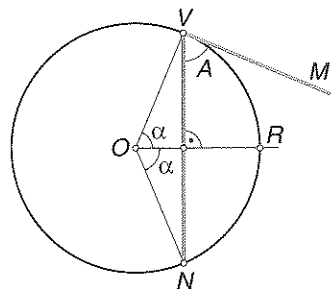


Fig. 27.

- **Ángulo interior** (Fig. 28)

  Su vértice es un punto interior de la circunferencia.

  El valor del ángulo interior es igual a la semisuma de los ángulos centrales que abarcan sus extremos y el ángulo opuesto por el vértice.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°;\ \alpha + \beta = 180° - \gamma$$
$$\hat{A} = 180° - \gamma;\ \hat{A} = \alpha + \beta$$

  Como los ángulos $\alpha + \beta$ son inscritos, tendremos:

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\ \widehat{NOM} + \frac{1}{2}\ \widehat{POQ} = \frac{\widehat{NOM} + \widehat{POQ}}{2}$$

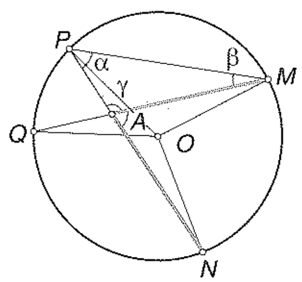


Fig. 28.

- **Ángulo exterior** (Fig. 29)

Está formado por dos secantes que se cortan en un punto exterior, ángulo *NVM*.

El valor del ángulo exterior a una circunferencia es igual a la semidiferencia de los ángulos centrales que abarcan sus lados.

$$\hat{\beta} = \hat{A} + \hat{\alpha} \Rightarrow \hat{A} = \hat{\beta} - \hat{\alpha}$$

Como los ángulos α y β son inscritos, tendremos:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{NOM}}{2} - \frac{\widehat{POQ}}{2} = \frac{\widehat{NOM} - \widehat{POQ}}{2}$$

- **Ángulo circunscrito** (Fig. 30)

Está formado por dos tangentes a la circunferencia, ángulo *MVN*.

El valor del ángulo circunscrito es la semidiferencia de los ángulos centrales abarcados por los lados.

$$\hat{\alpha} = \hat{A} + \hat{\beta} \Rightarrow \hat{A} = \hat{\alpha} - \hat{\beta}$$

El ángulo α es semiinscrito y sus lados abarcan el arco *MBN*; el ángulo β es también semiinscrito y sus lados abarcan el arco *NCM*. Según esto:

$$\hat{A} = \frac{\text{arco}\, MBN}{2} - \frac{\text{arco}\, NCM}{2}$$

es decir, la semidiferencia de los ángulos centrales δ y γ.

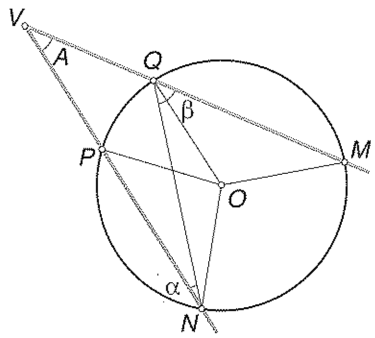


Fig. 29.

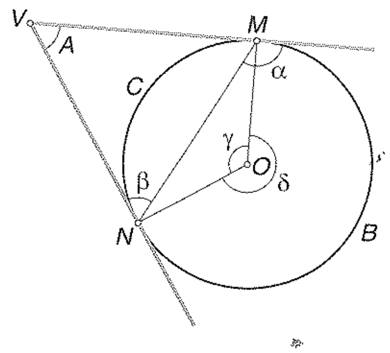


Fig. 30.

ACTIVIDADES

Construir un triángulo con los datos que se dan a continuación:

1. $b = 6$ cm., $c = 4$ cm. y $\hat{A} = 37°\,30'$
2. $b = 6$ cm., $\hat{C} = 60°$ y $\hat{B} = 45°$
3. $b = 6$ cm., $a = 4$ cm. y $h_a = 3$ cm.
4. $c = 5$ cm., $a = 4$ cm. y $m_a = 4$ cm.
5. $\hat{C} = 60°$, $h_b = 5$ cm. y $m_a = 6$ cm.
6. $c = 5$ cm., $b = 6$ cm. y $h_a = 3$ cm.
7. $\hat{C} = 60°$, $\hat{B} = 45°$ y $h_c = 4$ cm.
8. $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 60°$ y $m_c = 6$ cm.

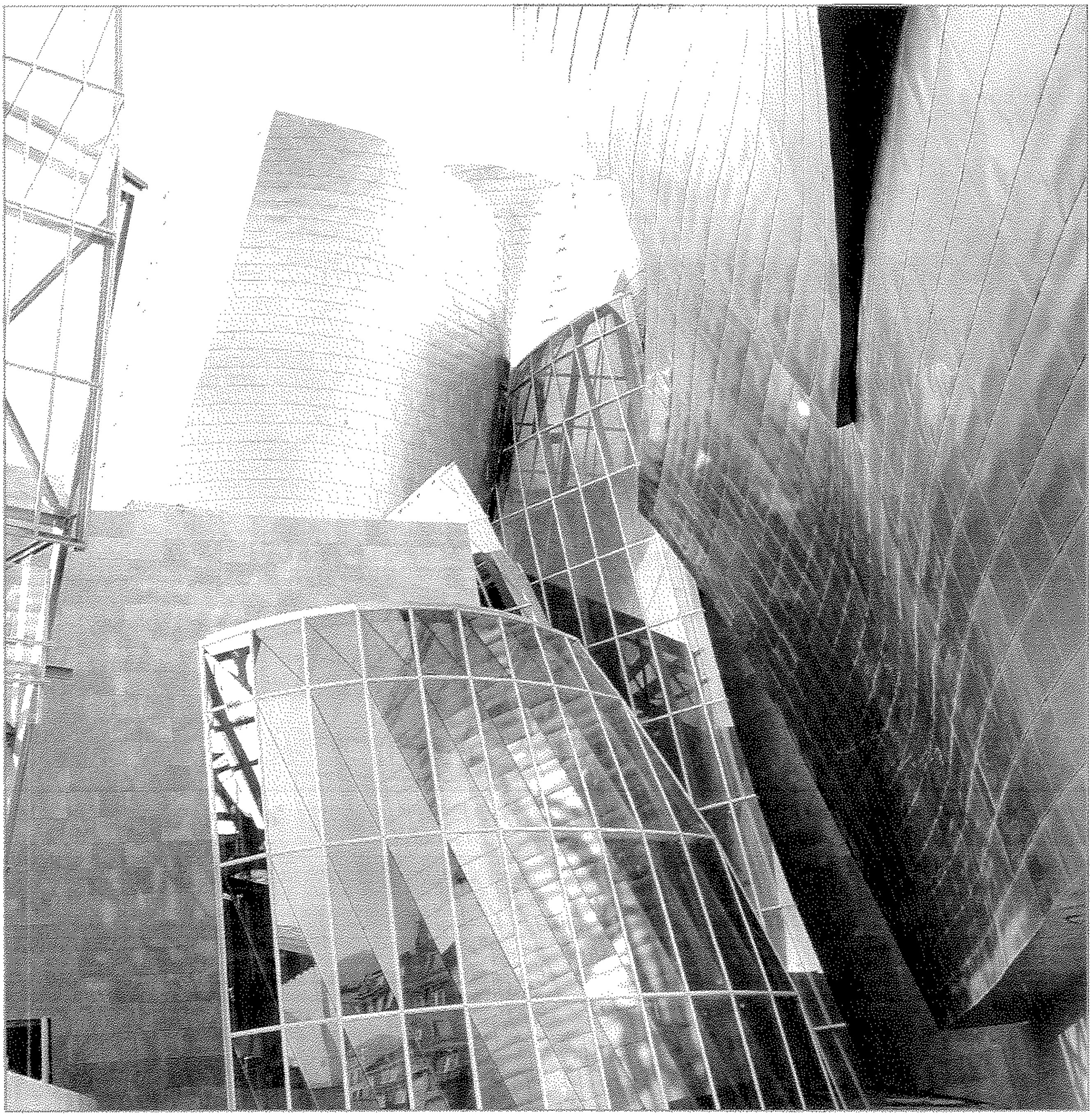


Fig. 31. Detalle del Museo Guggenheim de Bilbao.

CONSTRUCCIÓN DE FORMAS POLIGONALES II

Cuadriláteros. Polígonos regulares

TEMA 5

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática el alumno conocerá los polígonos de cuatro lados, sus propiedades y la construcción más sencilla de los mismos: cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y trapecio.

Aprenderá a dividir la circunferencia en partes iguales y a inscribir polígonos regulares en una circunferencia. Por otro lado, podrá construir un polígono regular de *n* lados a partir del lado. Como ejercicio podrá dibujar composiciones o redes formadas por polígonos.

La división de la circunferencia en partes iguales con el transportador y las relaciones de semejanza permiten, a su vez, la construcción de cualquier polígono regular, haciendo innecesario el estudio de la construcción de los mismos a partir del lado. Así se pueden evitar las dificultades de memorización que presentan estas construcciones en el momento de ser aplicadas.

Simplificando al máximo el tema, su desarrollo puede abarcar dos clases.

1. Cuadriláteros. Definiciones, clasificaciones y propiedades

Un cuadrilátero es una figura plana poligonal cerrada, compuesta por cuatro lados.

Clases de cuadriláteros
- **Paralelogramos**: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.
- **Trapecios**: rectángulos, isósceles y escalenos.
- **Trapezoides**.

Cuadrado (Fig. 1).

Los cuatro lados iguales; ángulos de 90°. Las diagonales son iguales y perpendiculares y se bisecan, es decir, se cortan en el punto medio.

Rectángulo (Fig. 2).

Dos a dos los lados iguales y paralelos; ángulos de 90°. Las diagonales son iguales y oblicuas y se bisecan.

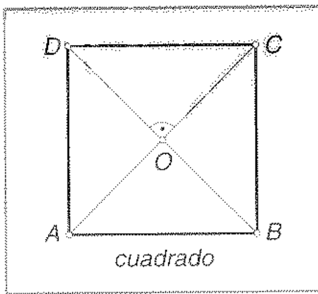


Fig. 1.

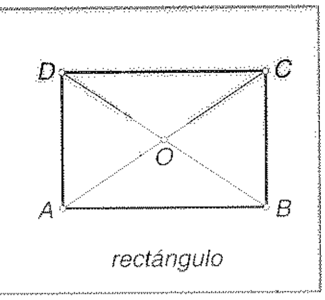


Fig. 2.

Rombo (Fig. 3).

Los cuatro lados iguales y paralelos dos a dos, pero oblicuos los lados consecutivos. Las diagonales son desiguales y perpendiculares y se bisecan.

Romboide (Fig. 4).

Dos a dos los lados iguales y paralelos. Las diagonales son desiguales y oblicuas y se bisecan.

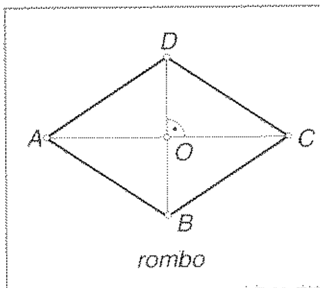


Fig. 3.

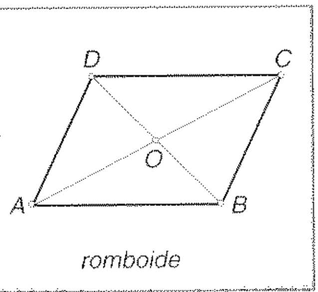


Fig. 4.

Trapecio rectángulo (Fig. 5).

Dos lados paralelos y dos ángulos rectos. Las diagonales son desiguales y oblicuas y no se bisecan.

Trapecio isósceles (Fig. 6).

Dos lados paralelos y los otros dos iguales. Los ángulos iguales dos a dos. Las diagonales son iguales y oblicuas y no se bisecan.

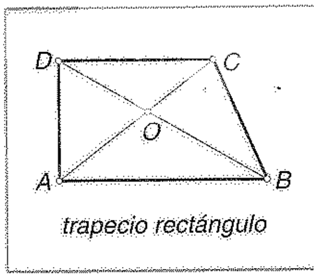


Fig. 5.

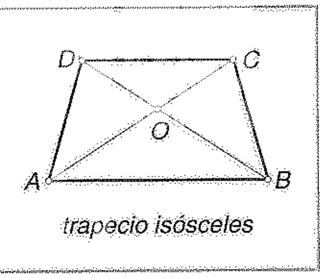


Fig. 6.

Trapecio escaleno (Fig. 7).

Dos lados paralelos y los ángulos desiguales. Las diagonales son desiguales y oblicuas y no se bisecan.

Trapezoide (Fig. 8).

Tanto los lados como los ángulos son diferentes en general. Las diagonales son desiguales y oblicuas y no se bisecan.

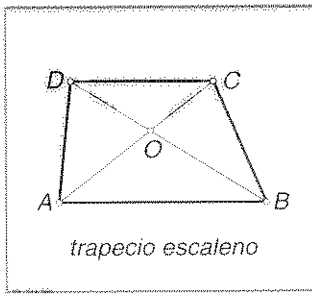


Fig. 7.

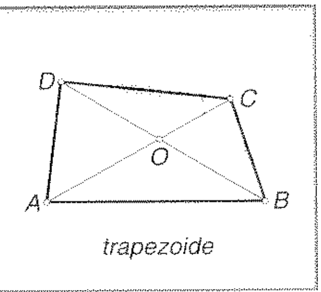


Fig. 8.

Para construir un cuadrilátero (n = 4 lados), en general es preciso conocer $2n - 3 = 5$ datos. Si del cuadrilátero conocemos previamente sus características, harán falta menos datos. Por ejemplo, del cuadrado basta conocer un dato, el lado o la diagonal, para poder construirlo, pues sabemos que tiene cuatro lados iguales y perpendiculares. Del rectángulo bastará conocer dos datos porque los lados son iguales dos a dos y perpendiculares.

2. Construcción del cuadrado a partir del lado (Fig. 9)

Se coloca el lado $l = \overline{AB}$; se trazan por A y B las perpendiculares a este lado y sobre ellas se lleva el lado por medio de los arcos *1* y *2*; se obtienen así los vértices C y D que completan el cuadrado.

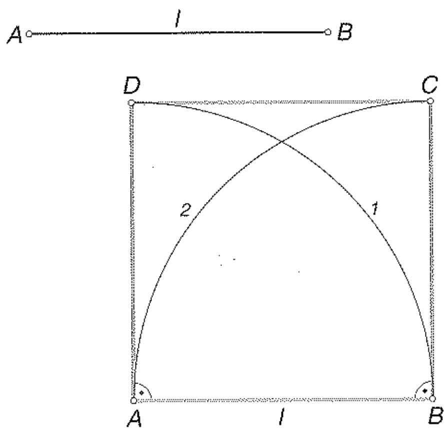


Fig. 9.

3. Construcción de un cuadrado dada la diagonal (Fig. 10)

Se toma la diagonal $d = \overline{AC}$ y sobre su mediatriz m se lleva, a partir de O y en los dos sentidos, la semidiagonal; de esta forma se tienen los dos vértices B y D. En la figura se ha dibujado la circunferencia circunscrita.

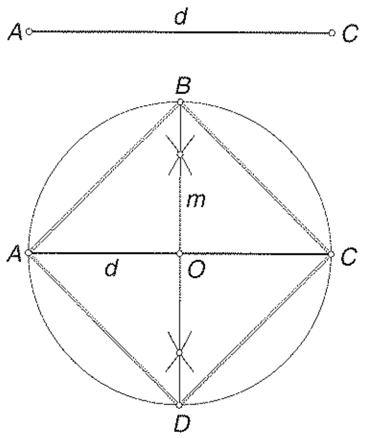


Fig. 10.

4. Construcción de un rectángulo conocidos sus lados (Fig. 11)

Los datos son los lados $a = \overline{AB}$ y $b = \overline{AC}$.

Se sitúa $\overline{AB}$ y por A se traza la perpendicular a $\overline{AB}$, problema ya conocido; sobre esta perpendicular se lleva el lado $b = \overline{AC}$, con lo que se obtiene el vértice C; finalmente, por paralelas trazadas por los vértices B y C se completa el rectángulo.

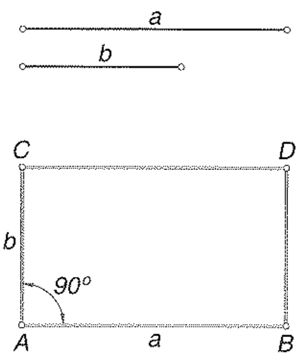


Fig. 11.

5. Construcción de un rectángulo conocidos una diagonal y un lado (Fig. 12)

Se toma la diagonal $d = \overline{AC}$ y con centro en su punto medio O se traza la circunferencia de radio $\overline{OA} = \overline{OC}$. Con centro en C se corta a la circunferencia con el radio a y se tiene el vértice B, el cual se une con A; por paralelas se completa el rectángulo $ABCD$.

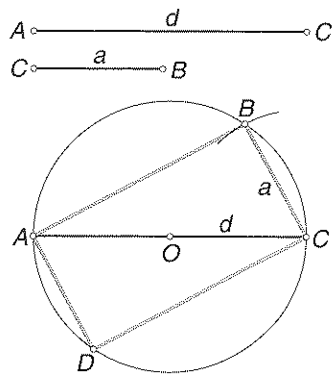


Fig. 12.

6. Construcción de un rombo dadas las dos diagonales (Fig. 13)

Los datos son $d = \overline{AC}$ y $d' = \overline{BD}$. Se dibuja $\overline{AC}$ y sobre la mediatriz de $\overline{AC}$ se lleva a partir de O la semidiagonal $d'/2$ en los dos sentidos: $\overline{OB} = \overline{OD} = d'/2$; uniendo los vértices se obtiene el rombo $ABCD$.

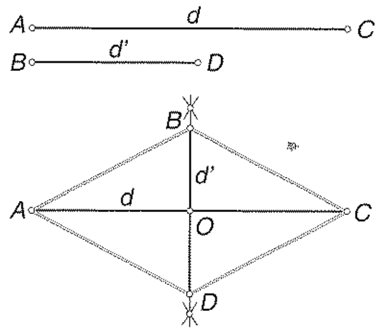


Fig. 13.

7. Construcción de un rombo dados un lado y un ángulo (Fig. 14)

A partir del lado $a = \overline{AB}$ se construye el ángulo $\hat{A}$ y se lleva sobre el lado obtenido el segmento a, con ayuda del arco 2. Por B y D se trazan paralelas a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ y se obtiene el vértice C.

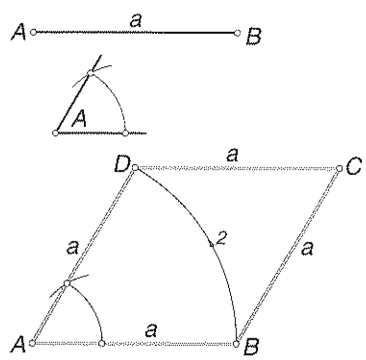


Fig. 14.

8. Construcción de un trapecio isósceles dadas las bases y la altura (Fig. 15)

Se conocen las bases $b = \overline{AB}$ y $b' = \overline{CD}$ y la altura $h = \overline{NM}$. Se dibuja $b = \overline{AB}$ y se traza la mediatriz de $\overline{AB}$; sobre ella se toma el segmento $h = \overline{NM}$ y por el extremo M se traza la paralela a $\overline{AB}$; a partir de M y sobre la paralela trazada se lleva $\overline{MC} = \overline{MD} = b'/2$, con lo que se obtienen los vértices C y D que completan el trapecio $ABCD$.

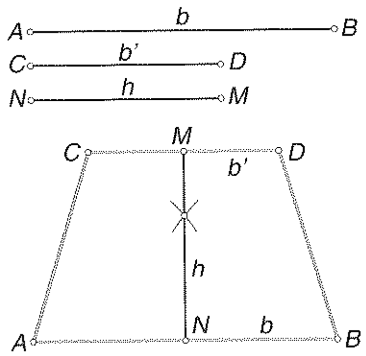


Fig. 15.

9. Construcción de un trapecio rectángulo dadas las bases y la altura (Fig. 16)

Se dan las bases $b = \overline{AB}$ y $b' = \overline{CD}$ y la altura $h = \overline{AC}$. Se dibuja la base mayor $\overline{AB}$ y por un extremo, el A, se traza la perpendicular a ella, sobre la cual se lleva la altura $\overline{AC}$; por C se dibuja la paralela a $\overline{AB}$ y sobre ella se lleva la base menor $b' = \overline{CD}$; al unir D con B se completa el polígono.

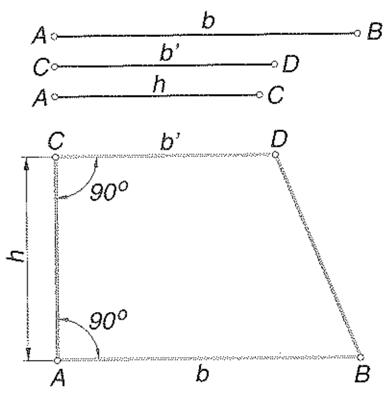


Fig. 16.

10. Construcción de un romboide dados sus lados y el ángulo que forman (Fig. 17)

Se conocen los lados $a = \overline{AB}$ y $b = \overline{AD}$ y el ángulo $\hat{A}$ que forman. Se toma $a = \overline{AB}$ y se construye el ángulo $\hat{A}$ con ayuda del arco $\overset{\frown}{1\text{-}2}$; sobre el lado obtenido de este ángulo se toma $b = \overline{AD}$; finalmente, por paralelas a los lados por los vértices B y D se completa el romboide $ABCD$.

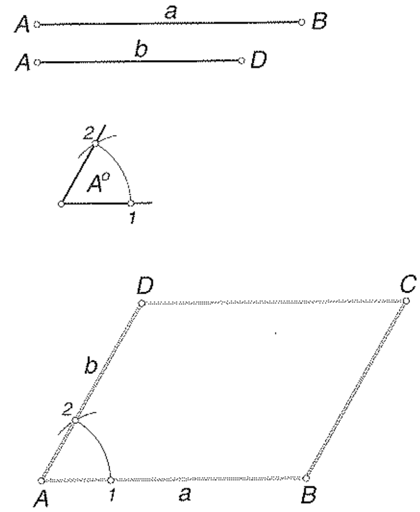


Fig. 17.

11. Polígonos. Definiciones y clases

- **Polígono** es la porción de plano limitada por rectas que se cortan.
- **Polígono regular**: tiene todos los lados y todos los ángulos iguales.
- **Polígono irregular**: no son iguales todos los lados y todos los ángulos.
- **Polígono inscrito**: es el que tiene sus vértices en una circunferencia.
- **Polígono circunscrito**: sus lados son tangentes a una circunferencia.

Los polígonos regulares se designan por el número de sus lados:

Cuadrado (4), pentágono (5), hexágono (6), heptágono (7), octógono (8), eneágono (9), decágono (10), undecágono (11), dodecágono (12)... y polígono de n lados.

En este tema se resuelven dos tipos de ejercicios:

- Dividir una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales, o lo que es igual, inscribir polígonos regulares en una circunferencia, pues para ello, basta unir los puntos de división obtenidos.
- Construir un polígono regular de cualquier número de lados a partir del lado conocido.

12. División de una circunferencia en tres y en seis partes iguales (Fig. 18)

Para dividir en seis partes, es decir, para construir el hexágono regular inscrito en una circunferencia, basta tomar el radio R e ir llevando cuerdas consecutivas; uniendo los puntos de división A, B, C, D, E y F se tiene el hexágono; si se unen de dos en dos los puntos obtenidos, se obtiene el triángulo equilátero inscrito. Trazando las bisectrices de los ángulos centrales se pueden obtener 12, 24, 48, etc., partes iguales.

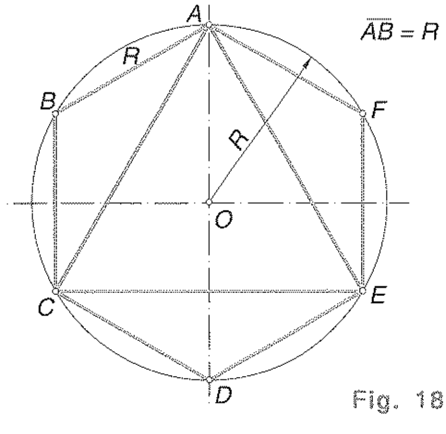


Fig. 18.

13. División de la circunferencia en cuatro y en ocho partes iguales (Fig. 19)

Para dividir la circunferencia en cuatro partes iguales, basta trazar una pareja de diámetros perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$; uniendo los extremos se obtiene el cuadrado $ACEG$. Dibujando la bisectriz del ángulo central $\overset{\frown}{AOG}$ se tiene el punto H, medio del arco $\overset{\frown}{AG}$; el segmento $\overline{AH} = \overline{HG}$ es el lado del octógono regular inscrito. Trazando nuevas bisectrices de los ángulos centrales, se pueden obtener 16, 32, 64, etc., partes iguales.

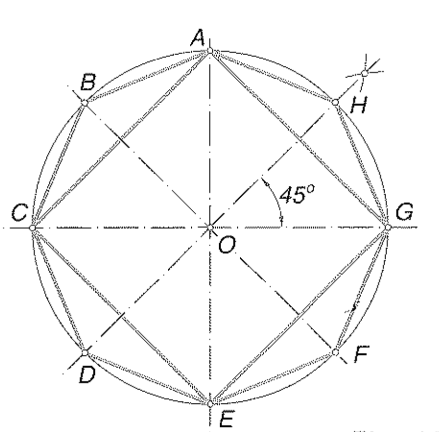


Fig. 19.

14. División de la circunferencia en cinco y en diez partes iguales (Figs. 20 y 21)

Se trazan dos diámetros perpendiculares; con centro en M y radio $\overline{MO}$ se traza el arco $\overset{\frown}{ON}$; la perpendicular por N a $\overline{OM}$ da el punto medio L de $\overline{OM}$; con centro en L y radio $\overline{LA}$, se traza el arco $\overset{\frown}{AP}$; el segmento $\overline{AP}$ es el lado l_5 del pentágono inscrito, por lo que basta tomar la cuerda l_5 cinco veces para obtener el polígono. Esta construcción puede aprovecharse para construir el decágono, ya que el segmento $\overline{OP}$ es el lado l_{10} del polígono de diez lados (Fig. 20).

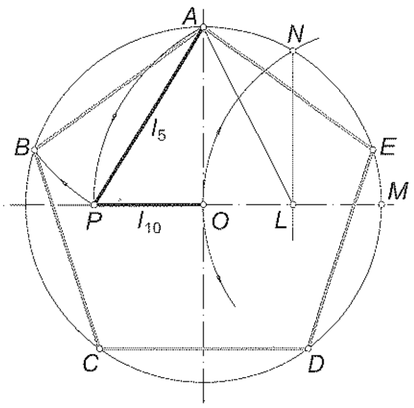


Fig. 20.

Para el decágono se puede utilizar otro procedimiento, que se indica en la Fig. 21. Se trazan dos diámetros perpendiculares $\overline{AF}$ y $\overline{PL}$; con centro en N, punto medio de $\overline{OL}$, se traza la circunferencia de radio $\overline{NO} = \overline{NL}$. Uniendo A y N se obtiene el punto M en esta circunferencia; el segmento $\overline{AM}$ es el lado del decágono.

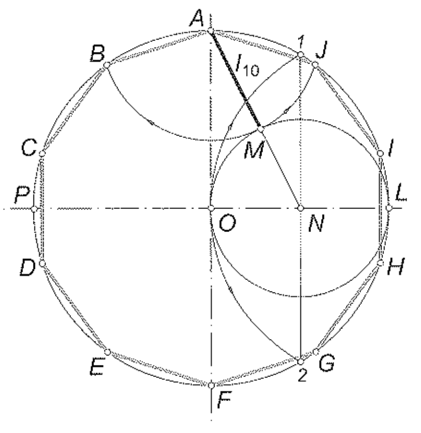


Fig. 21.

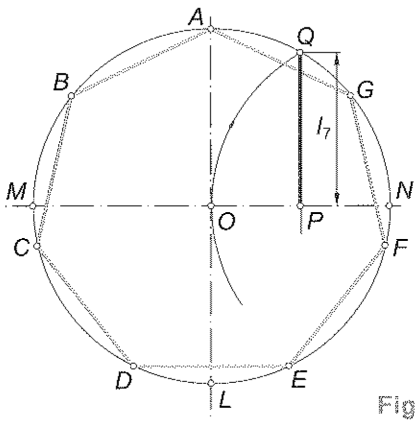


Fig. 22.

15. División de la circunferencia en siete partes iguales (Fig. 22)

Se halla el punto medio *P* del radio $\overline{ON}$, para lo cual se traza el arco $\widehat{OQ}$ de centro *N* y desde *Q* se traza la perpendicular a $\overline{ON}$. El segmento $\overline{PQ}$ es el lado l_7 del heptágono inscrito en la circunferencia; se lleva siete veces $\overline{AB} = \overline{PQ}$ y se obtiene el polígono.

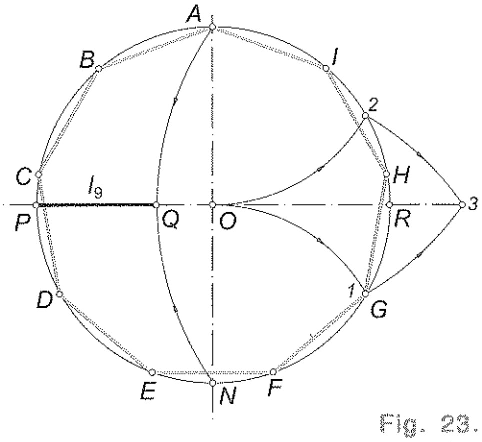


Fig. 23.

16. División de la circunferencia en nueve partes iguales (Fig. 23)

Se dibujan dos diámetros perpendiculares, $\overline{AN}$ y $\overline{PR}$; con centros en *A* y *N* se trazan los arcos $\widehat{O\text{-}2}$ y $\widehat{O\text{-}1}$, respectivamente; con centros en *A* y en *N* se trazan los arcos $\widehat{1\text{-}3}$ y $\widehat{2\text{-}3}$, los cuales se cortan en el punto *3*, en la prolongación de $\overline{PR}$; con centro en *3* se traza el arco $\widehat{AQN}$ y el segmento $\overline{PQ}$ es el lado del eneágono inscrito en la circunferencia, que se lleva nueve veces sobre ella.

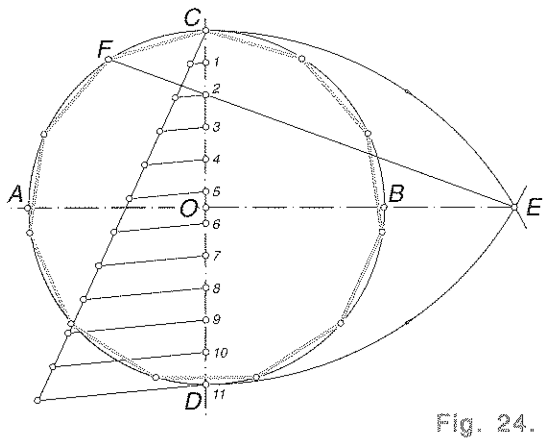


Fig. 24.

17. División de la circunferencia en un número *n* cualquiera de partes iguales (Fig. 24)

Se trazan dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD*, y se divide uno de ellos, *CD*, en tantas partes iguales como se desee dividir la circunferencia, en este caso, once partes; con centros en *C* y *D* se trazan los arcos $\widehat{DE}$ y $\widehat{CE}$, que se cortan en *E*, y este punto se une con la división *2* del diámetro; al prolongar la recta *E-2* se obtiene el punto *F* en la circunferencia. El segmento $\overline{CF} = l_{11}$ es el lado del polígono regular de once lados inscrito en dicha circunferencia.

> Esta construcción sirve para solucionar todos los problemas que se presenten en la división de la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales.

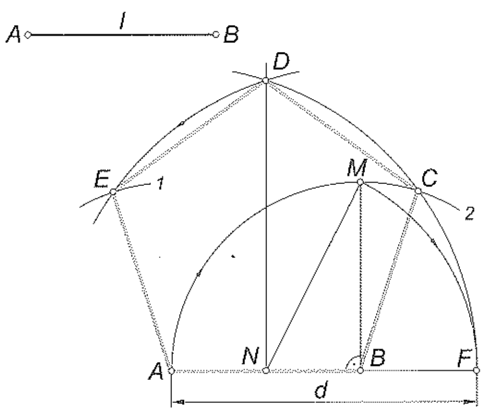


Fig. 25.

18. Construcción del pentágono regular a partir del lado (Fig. 25)

El lado conocido es $l = \overline{AB}$. Se toma $\overline{AB}$ y se traza la mediatriz de $\overline{AB}$; se toma $\overline{BM} = \overline{BA}$ con ayuda del arco *2*; con centro en *N* y radio $\overline{NM}$ se traza el arco $\widehat{MF}$; el segmento $\overline{AF}$ es la diagonal *d* del pentágono que se busca; con radio *d* y centros en *A* y *B* se trazan dos arcos que se cortan en *D*; con centro en *A* y radio $l = \overline{AB}$ se traza el arco *1*, que corta en *E* el arco $\widehat{DE}$ de centro en *B*; de la misma forma se obtiene el punto *C*, último vértice del pentágono.

19. Construcción del hexágono regular a partir del lado (Fig. 26)

El lado conocido es l. Se construye la circunferencia de radio $R = l$ y se inscribe en ella el hexágono. El lado de un hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él.

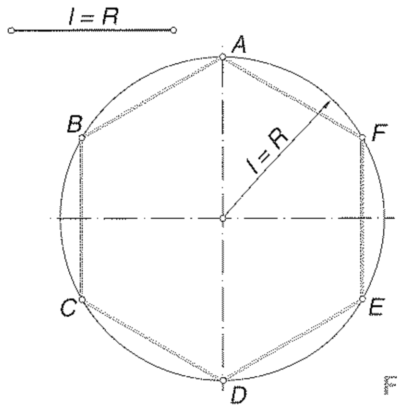


Fig. 26.

20. Construcción del heptágono regular a partir del lado (Fig. 27)

El lado es $l = \overline{AB}$. Se traza la mediatriz m de $\overline{AB}$ y se dibujan los arcos $\widehat{AN}$ y $\widehat{BN}$ con centros en B y A, respectivamente; se traza la bisectriz del ángulo $\widehat{NAB}$, la cual corta en M a la perpendicular a $\overline{AB}$ en el punto B; con centro en A y radio $\overline{AM}$, se traza el arco $\widehat{MO}$ y el punto O de la mediatriz es el centro de la circunferencia circunscrita al polígono; sobre esta circunferencia se lleva siete veces el lado $\overline{AB}$ y se obtiene el heptágono.

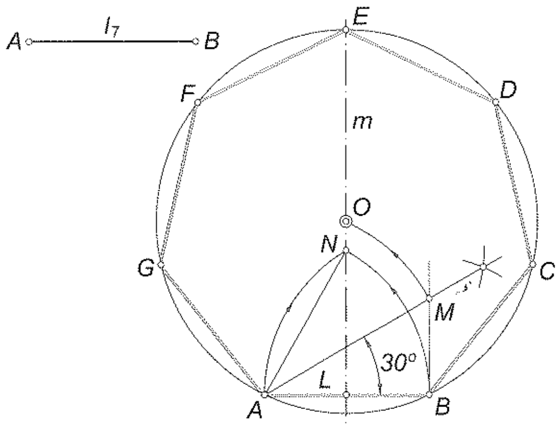


Fig. 27.

21. Construcción del octógono regular a partir del lado (Fig. 28)

Se coloca el lado $l_8 = \overline{AB}$ y se traza su mediatriz m; con el segmento $\overline{AB}$ como lado, se construye el cuadrado $ABCD$; se traza la circunferencia circunscrita al citado cuadrado, la cual corta en el punto O a la mediatriz m; con centro en O y radio $\overline{OA}$ se dibuja la circunferencia en la que está inscrito el octógono; sobre esta circunferencia se lleva ocho veces el lado $\overline{AB}$.

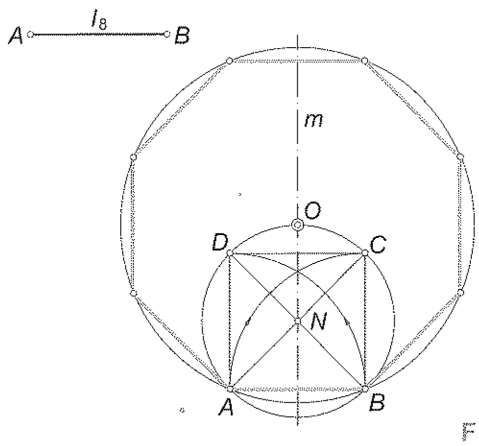


Fig. 28.

22. Construcción del eneágono regular a partir del lado (Fig. 29)

Se dibuja el lado conocido $\overline{AB} = l_9$; se traza la mediatriz de $\overline{AB}$ y se construye el triángulo equilátero ABM; se dibuja la bisectriz del ángulo $\widehat{MAB}$ y se tiene el punto N en la mediatriz; con centro en M y radio $\overline{MN}$ se dibuja la circunferencia que corta en P y Q a las prolongaciones de los lados $\overline{BM}$ y $\overline{AM}$; uniendo P con Q se obtiene el punto O en la mediatriz; este punto O es el centro de la circunferencia circunscrita al polígono, sobre la que se lleva nueve veces el lado $\overline{AB}$.

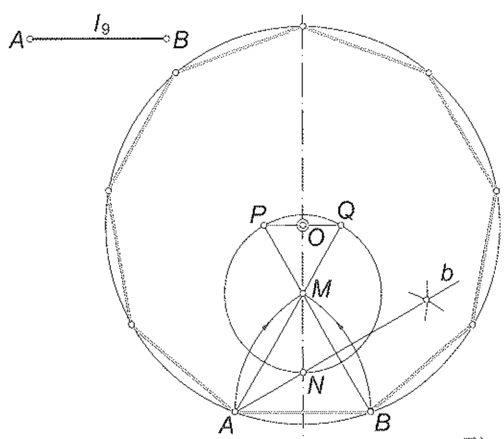


Fig. 29.

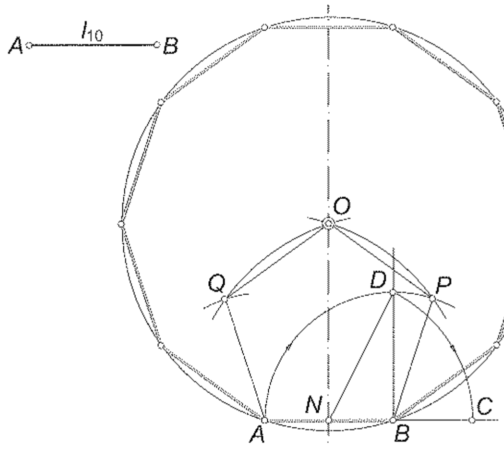


Fig. 30.

23. Construcción del decágono regular a partir del lado (Fig. 30)

A partir del lado $\overline{AB} = l_{10}$ conocido, se construye, como ya se ha visto, el pentágono regular *A-B-P-O-Q*; el vértice *O* de este polígono es el centro de la circunferencia circunscrita al decágono; por ello, con centro *O* y radio $\overline{OA} = \overline{OB}$, se traza la circunferencia y se lleva sobre ella el lado $\overline{AB}$ diez veces.

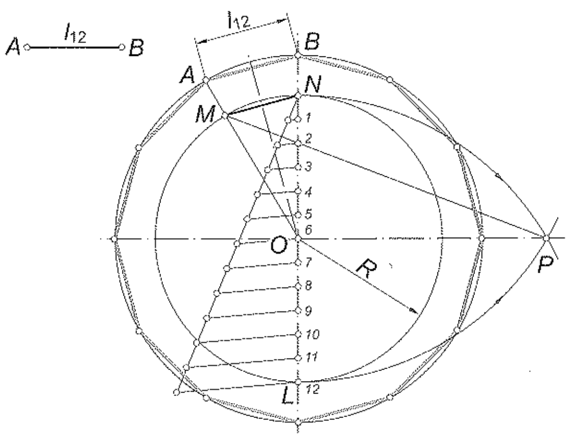


Fig. 31.

24. Construcción de un polígono regular de *n* lados a partir del lado (Figs. 31 y 32)

Se supone que el polígono ha de tener $n = 12$ lados, siendo el lado $l_{12} = \overline{AB}$. Por el procedimiento general ya visto, se divide una circunferencia cualquiera en doce partes iguales; en la figura se ha obtenido el lado *N-M*. Como el dato es $\overline{AB}$, se inscribe este segmento $\overline{AB}$ en el ángulo central $\widehat{NOM}$ del dodecágono y paralelo a $\overline{NM}$. Con centro en *O* y radio $\overline{OA} = \overline{OB}$ se traza la circunferencia en la que está inscrito el polígono (Fig. 31).

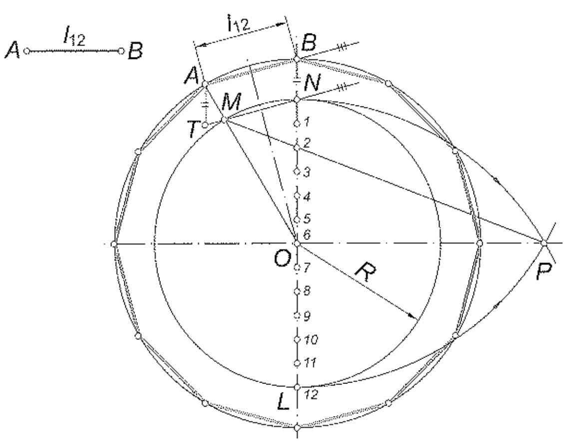


Fig. 32.

En la Fig. 32 se inscribe de otra forma el lado $\overline{AB}$ en el ángulo central $\widehat{NOM}$. Se toma $\overline{AB}$ sobre $\overline{NM}$, a partir de *N*; $\overline{NT} = \overline{AB}$ y por *T* se traza la paralela del diámetro $\overline{NL}$, la cual corta a la prolongación del radio $\overline{OM}$ en *A*.

Finalmente, un polígono regular de *n* lados se puede construir con el transportador de ángulos, fijando el ángulo central que corresponde a un lado; este ángulo central valdrá $360°/n$.

ACTIVIDADES

1. Construir el cuadrado cuya diagonal es $d = 40$ mm.
2. Construir el cuadrado sabiendo que su lado y su diagonal suman 70 mm. Ídem, si la diferencia es de 20 mm.
3. Construir un rectángulo conociendo un lado de 25 mm. y la suma de la diagonal y el otro lado de 80 mm.
4. Construir un rombo del que se sabe que la suma de las diagonales es 142 mm. y la diferencia 38 mm.
5. Composiciones gráficas en el plano.

Como ejercicio, podemos dibujar en el plano una serie de composiciones o redes formadas por polígonos regulares (triángulo equilátero, cuadrado y hexágono) o por tres polígonos no regulares, de forma que se cumplan estas dos condiciones:

1ª. que todos los polígonos utilizados tengan lados iguales.

2ª. que la suma de los ángulos de los polígonos ensamblados alrededor de un punto sea igual a 360°.

Indicamos a título de ejemplo algunas composiciones gráficas o redes, dejando a la imaginación del lector el diseño de otras combinaciones de formas poligonales (**Figs. 33, 34, 35 y 36**).

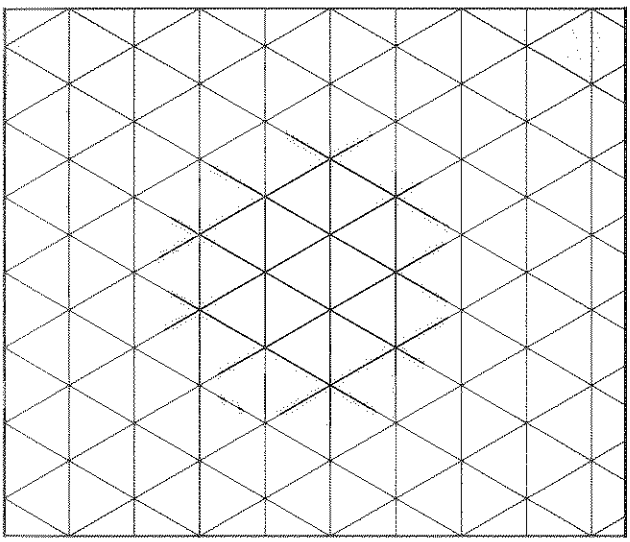


Fig. 33.

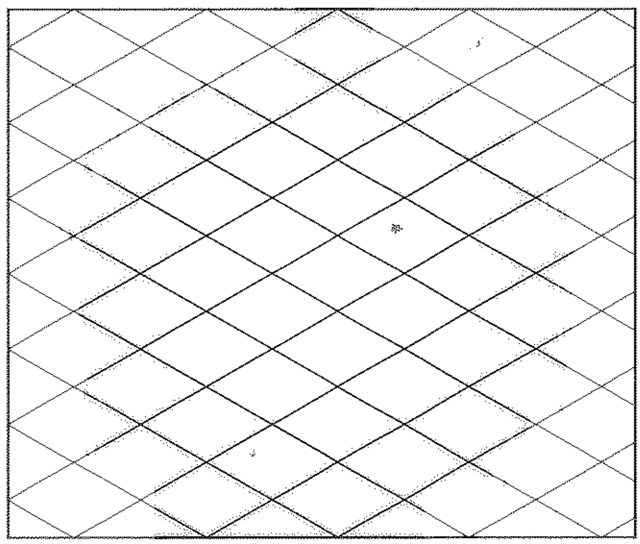


Fig. 35.

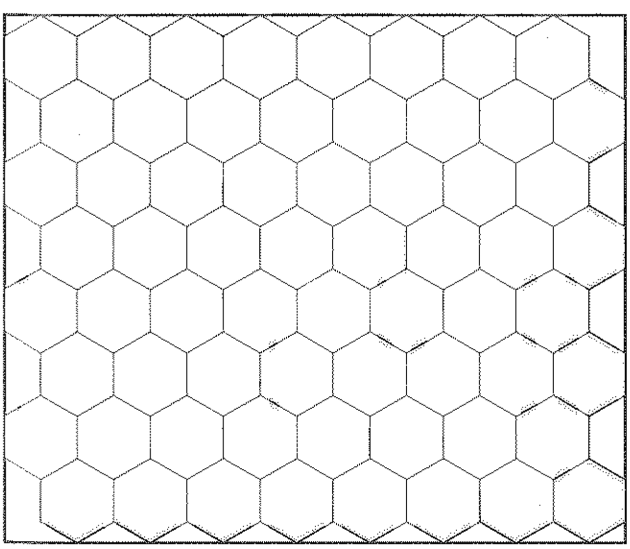


Fig. 34.

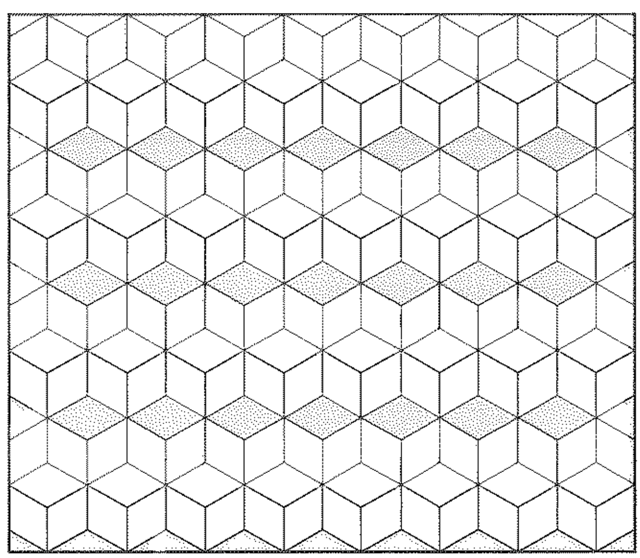


Fig. 36.

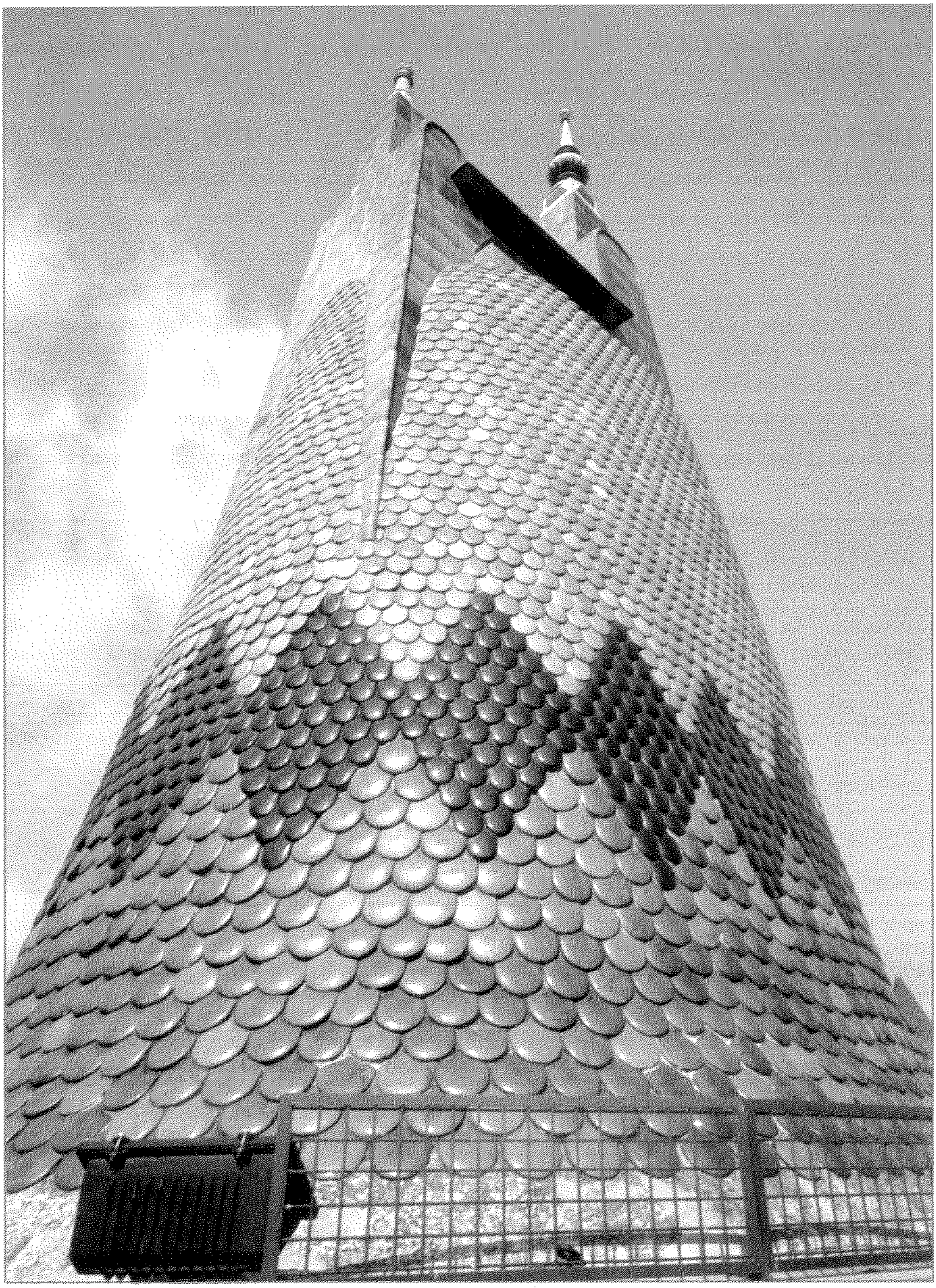


Fig. 37. Casa de la Punxa de Gerona.

Para un recubrimiento arquitectónico, es esencial aplicar soluciones formales utilizando siempre un mismo elemento geométrico dispuesto de manera repetida.

RELACIONES GEOMÉTRICAS
Proporcionalidad, semejanza, igualdad, equivalencia y simetría

TEMA 6

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática se enseña al alumno las leyes o relaciones geométricas que pueden presentar dos figuras planas entre sí. Se debe hacer ver al alumno, de la forma más sencilla y concisa posible, cuándo dos figuras son iguales, proporcionales (semejantes), equivalentes simétricas y las condiciones que deben cumplir ambas para que existan estas relaciones.

Las actividades se basarán en, a partir de una figura poligonal o curva, obtener otra figura que esté ligada con la primera por alguna de las relaciones citadas. En el caso de figuras iguales se pueden emplear diversos procedimientos; para las figuras semejantes se dará la razón de semejanza y en el caso de figuras simétricas se fijará el centro o el eje de simetría. Se indicarán ejemplos reales de este tipo de relaciones.

El desarrollo de esta actividad puede hacerse en dos clases.

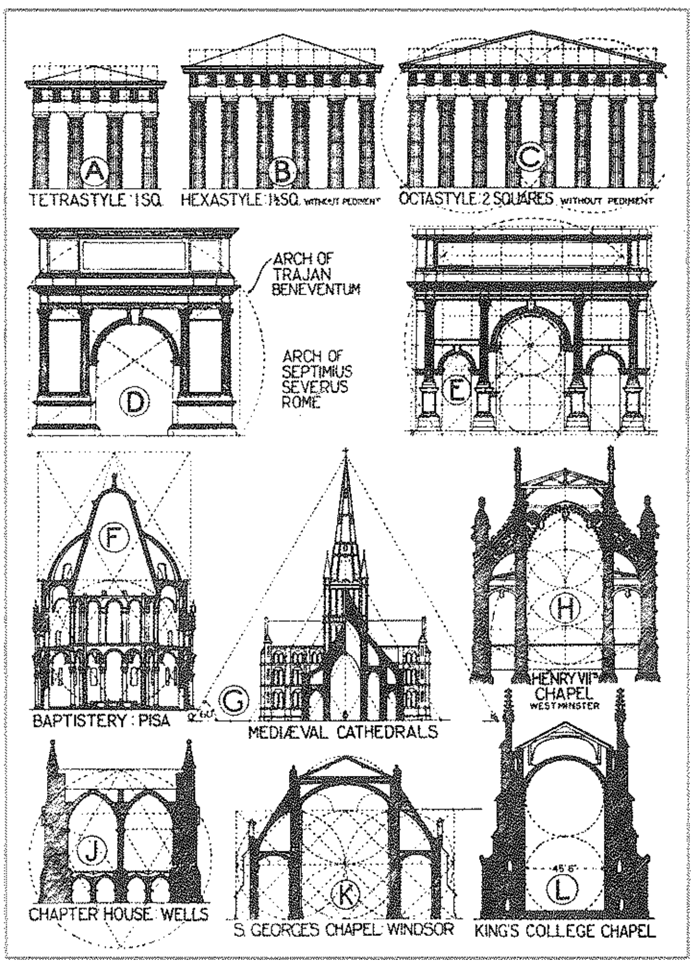


Fig. 1. Ejemplo de proporción en Arquitectura.

1. Proporcionalidad

Se denomina "**razón**" el resultado de la comparación de dos cantidades. Las dos cantidades comparadas se llaman "**términos**" de la razón.

Se llama "**proporción**" a la igualdad de dos razones:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

siendo **a**, **b**, **c** y **d** los términos de la proporción.

a y **d** son los términos **extremos**; **b** y **c** son los términos **medios**.

2. Cuarto proporcional (Fig. 2)

El segmento –**x**– que es cuarto proporcional a tres segmentos **a**, **b** y **c**, conocidos, se expresa así:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{x}}$$

siendo **x** el cuarto proporcional.

El valor de **x** se obtiene aplicando el teorema de Thales.

Sobre una recta *r* se toma el segmento **a** y a continuación el segmento **b**. A partir del punto *A* y sobre una recta cualquiera *s* se toma el segmento **c**, se unen los puntos *N* y *M* y por *P* se traza la paralela a $\overline{NM}$. El segmento **x** = $\overline{MQ}$ es el cuarto proporcional.

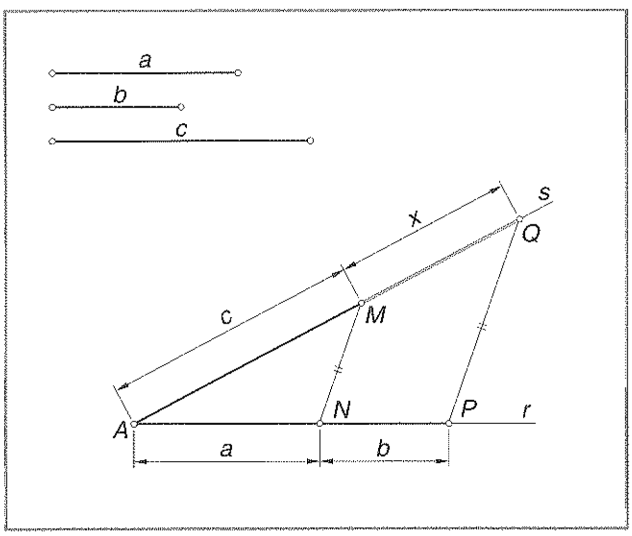


Fig. 2.

3. Tercero proporcional (Fig. 3)

Se denomina **proporción continua** aquella en la que los medios o los extremos se repiten: **a/b = b/c** en la que **b** es consecuente en la primera razón y antecedente en la segunda.

Tercero proporcional es uno de los términos no repetidos de una proporción continua.

El segmento –**x**– que es tercero proporcional a dos segmentos **a** y **b**, conocidos, se expresa así: **a/b = b/x**. En este caso se repite el medio **b**. Se conocen los segmentos **a** y **b** y hay que hallar el segmento **x**, tercero proporcional.

En la Fig. 3 se opera como en el caso anterior y se obtiene **x** = $\overline{MQ}$.

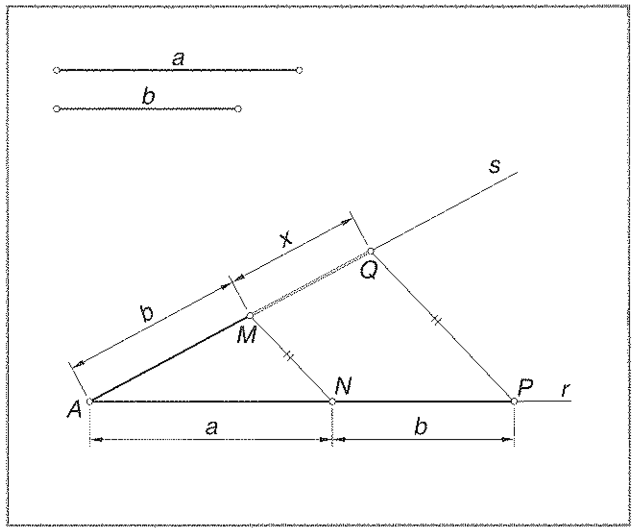


Fig. 3.

4. Medio proporcional (Figs. 4 y 5)

Cuando en una proporción continua se desconoce el término repetido, éste se llama "medio proporcional".

El segmento –**x**– que es medio proporcional a dos segmentos **a** y **b** se expresa así: **a/x = x/b**, o bien: $x^2 = a \cdot b$.

Se desconoce el medio común –**x**–.

Para hallar gráficamente el segmento **x**, se aplica el teorema relativo a triángulos rectángulos que dice: "Un cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella". Según esto (Fig. 4), se toma el segmento **a** y, superpuesto con él, el segmento **b**; se traza la semicircunferencia de diámetro **a** = $\overline{AB}$ y por *P*, la perpendicular a $\overline{AB}$. El segmento **x** = $\overline{AM}$ es el medio proporcional entre los segmentos **a** y **b**.

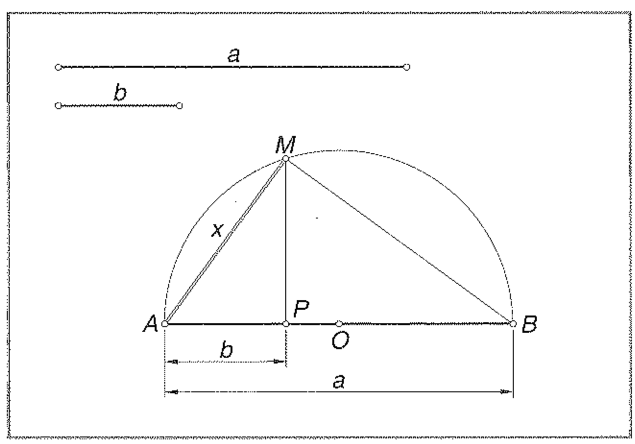


Fig. 4.

En la Fig. 5 se indica otro procedimiento para calcular el segmento **x**, medio proporcional. Se toman **a** y **b**, uno a continuación de otro, y se traza la semicircunferencia de diámetro **a + b**; el segmento $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{PM}}$ es la altura sobre la hipotenusa $\overline{AB}$. En este caso se aplica el teorema que dice: En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que la divide.

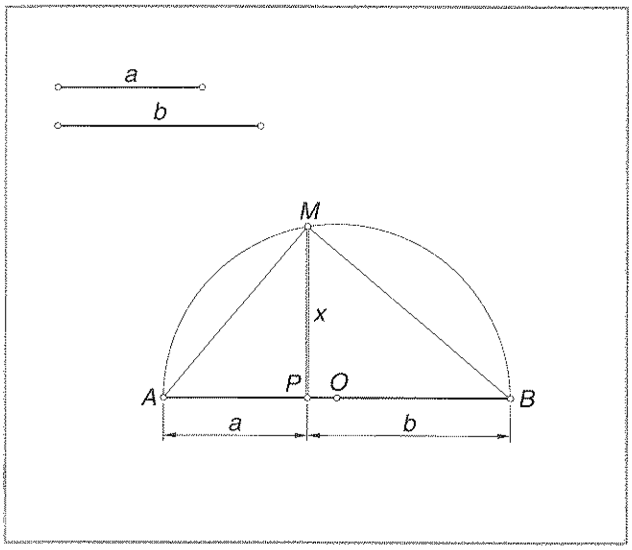


Fig. 5.

5. Semejanza

Dos figuras son semejantes o proporcionales cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados son proporcionales (Fig. 6).

Cada punto de una de ellas tiene su correspondiente en la otra y las líneas, que tienen la misma dirección relativa, están en la misma relación; esta relación es la **razón de semejanza**.

En la Fig. 6, las figuras semejantes tienen los ángulos iguales y los lados están en la misma proporción, $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{B'C'}$.

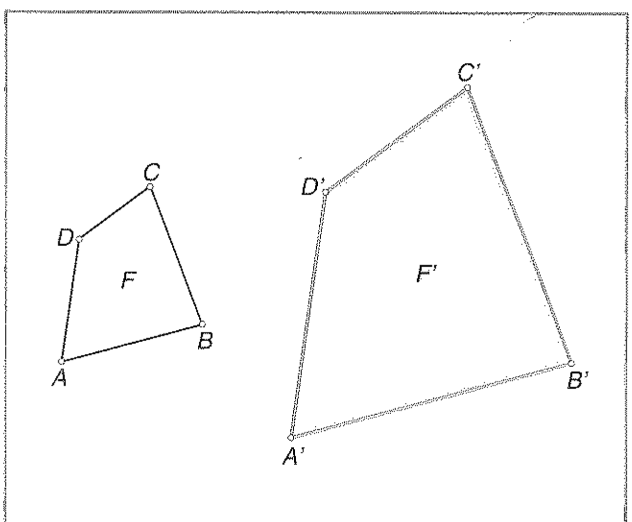


Fig. 6.

En geometría se estudian los siguientes teoremas relativos a semejanza de polígonos:

Dos triángulos son semejantes:

1°. Cuando dos ángulos de uno son iguales a dos del otro.

2°. Cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales.

3°. Cuando tienen sus lados homólogos proporcionales.

Dos polígonos son semejantes:

1°. Cuando se componen del mismo número de triángulos semejantes de dos en dos e igualmente dispuestos.

2°. Cuando sabemos que todos los lados menos uno en cada polígono son de dos en dos proporcionales e iguales y, del mismo modo, los ángulos en que no intervengan los lados exceptuados.

3°. Cuando sabemos que todos los ángulos menos uno del primero son iguales respectivamente a otros tantos del segundo y que los lados que forman estos ángulos, menos los del exceptuado, son proporcionales.

6. Construcción de la figura semejante a otra dada conociendo la razón de semejanza

Primer procedimiento (Fig. 7)

Se tiene el polígono $F = ABCDE$ y hay que construir el polígono semejante a él, siendo la razón de semejanza, por ejemplo, ½. Se toma un punto cualquiera P y se une con los vértices del polígono F. El segmento $\overline{PA}$ se divide en dos partes iguales y se fija el punto A', homólogo del A, siendo $\overline{PA'} = \frac{1}{2}\overline{PA}$. Por A' se traza la paralela a $\overline{AB}$ hasta que corte en B' a $\overline{PB}$; se sigue así por medio de paralelas construyendo el polígono F', que tiene los ángulos iguales y sus lados en la proporción respecto a los del polígono F. Se tiene $\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{B'C'} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, etc.

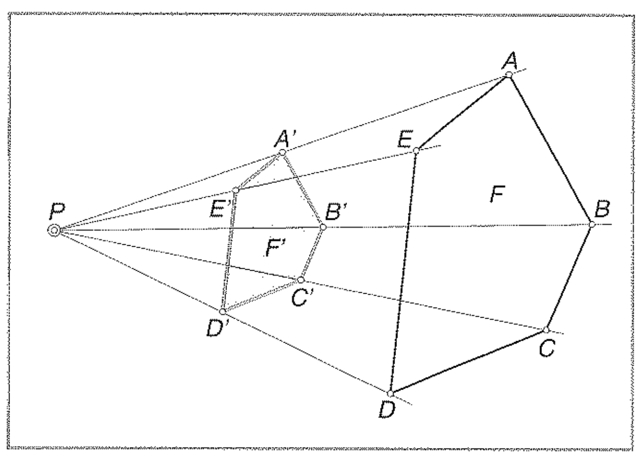


Fig. 7.

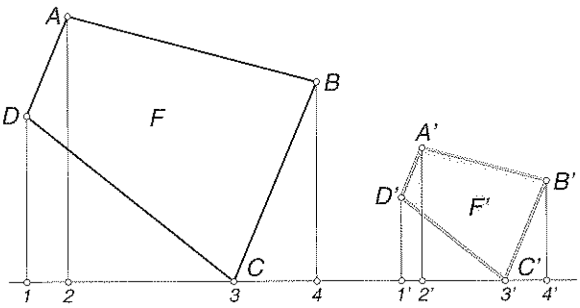


Fig. 8.

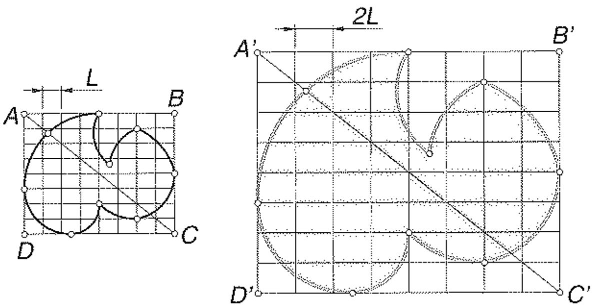


Fig. 9.

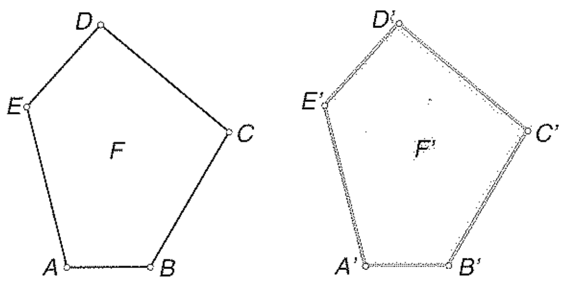


Fig. 10.

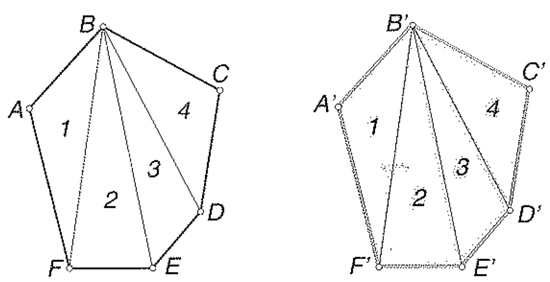


Fig. 11.

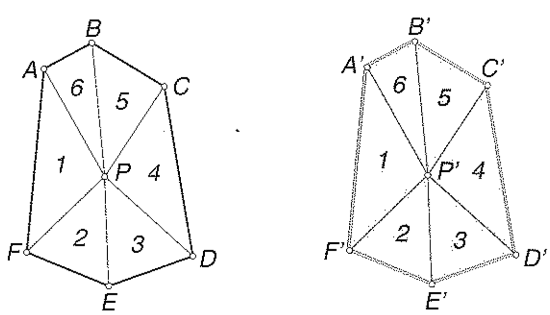


Fig. 12.

Segundo procedimiento (Fig. 8)

Se opera como en el caso de igualdad de figuras. Si la razón de semejanza es 2:1, se toma $\overline{1'\text{-}2'} = ½\,\overline{1\text{-}2}$ y $\overline{2'\text{-}A'} = ½\,\overline{2\text{-}A}$, es decir, se dividen por 2 las dos coordenadas y se obtiene el polígono F'; la razón de semejanza entre el polígono F dado y el F' es 2:1. La razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza, es decir, 4:1.

Tercer procedimiento. Sistema de cuadrícula (Fig. 9)

En la figura dada se construye una cuadrícula $ABCD$ de lado L; si la figura que se desea obtener ha de ser doble, se toma una cuadrícula $A'B'C'D'$ de lado $2L$; sobre esta cuadrícula se marcan los puntos necesarios para construir la figura. La razón de semejanza es la que existe entre los lados de las cuadrículas.

7. Igualdad (Fig. 10)

Dos figuras son iguales cuando sus lados y sus ángulos son iguales y están igualmente dispuestos (Fig. 10).

Los polígonos F y F' son iguales porque sus lados son iguales, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, etc., sus ángulos también son iguales, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, etc., y además están dispuestos en el mismo orden.

8. Procedimientos para construir una figura igual a otra (Figs. 11 y 12)

Primer procedimiento. Por triangulación (Fig. 11)

Se tiene una figura cualquiera $ABCDEF$; se descompone en triángulos por medio de las diagonales que parten de un vértice; en la Fig. 11 es el vértice B; a la derecha se van construyendo uno a uno, y en el mismo orden, los triángulos *1*, *2*, *3* y *4* de los que se conocen los tres lados.

Se puede tomar otro punto cualquiera exterior o interior a la figura para hacer la descomposición en triángulos. En la Fig. 12 se toma el punto P, que se une con todos los vértices, formándose así triángulos.

Segundo procedimiento. Por coordenadas (Fig. 13)

Se desea construir una figura igual al polígono *ABCDE*. Se toma una recta *r* cualquiera como eje o base y se proyectan sobre ella los puntos *A*, *B*...; esta proyección puede ser ortogonal u oblicua; se tienen así los puntos *1*, *2*, *3*... en la recta *r*; sobre otra recta *r'* se toman los puntos *1'*, *2'*, *3'*... a las mismas distancias que en la recta *r* y por ellos se trazan las perpendiculares a *r'*, llevando las alturas o cotas correspondientes; así $\overline{1'\text{-}A'} = \overline{1\text{-}A}$, $\overline{2'\text{-}B'} = \overline{2\text{-}B}$, etc. Este sistema se llama **de coordenadas** porque se emplea un sistema de coordenadas cartesianas, es decir, las distancias *x* e *y* a dos ejes que se indican en la figura.

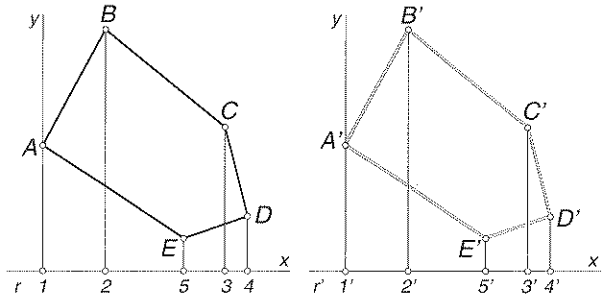


Fig. 13.

Tercer procedimiento. Por copia de ángulos o rodeo (Fig. 14)

Dado el polígono *ABCDE*, se toma $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ y en *B'* se construye el ángulo $\hat{B}$; sobre su lado se lleva $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ y en *C'* se lleva el ángulo $\hat{C}$; así sucesivamente se van situando los lados y los ángulos hasta cerrar el polígono. Este método resulta gráficamente inexacto pues se van acumulando pequeños errores en cada operación.

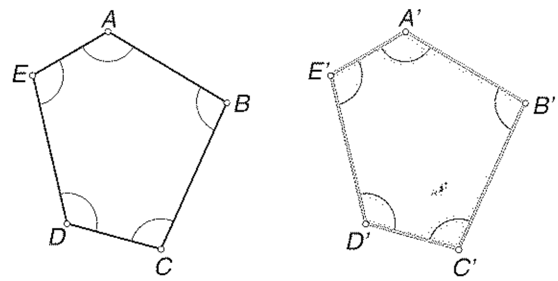


Fig. 14.

Cuarto procedimiento. Por translación (Fig. 15)

Dado el polígono *ABCDEF*, se trazan por sus vértices una serie de rectas paralelas *a*, *b*, *c*...; se toma un punto cualquiera *A'* en *a* y por *A'* se traza la paralela a $\overline{AB}$ hasta que corte en *B'* a la recta *b*; por *B'*, paralela a $\overline{BC}$ hasta que corte en *C'* a la recta *c* y así sucesivamente. Este procedimiento es una simple translación.

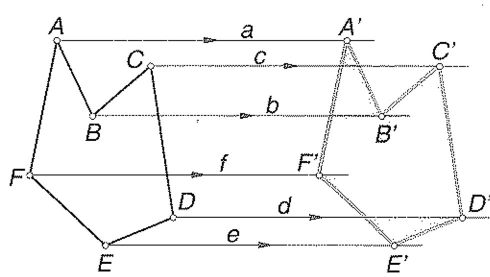


Fig. 15.

Quinto procedimiento. Con el empleo de una cuadrícula (Fig. 16)

Se dibuja una cuadrícula o retícula sobre la figura o bien se superpone una cuadrícula de papel transparente; se fijan los puntos donde la figura corta a las líneas de la retícula y luego se marcan sobre una cuadrícula igual. Realmente, este procedimiento se utiliza más para ampliar figuras, empleando cuadrículas de mayor tamaño que la original y sobre todo se utiliza para hacer cuadros grandes a partir de originales o fotografías pequeños.

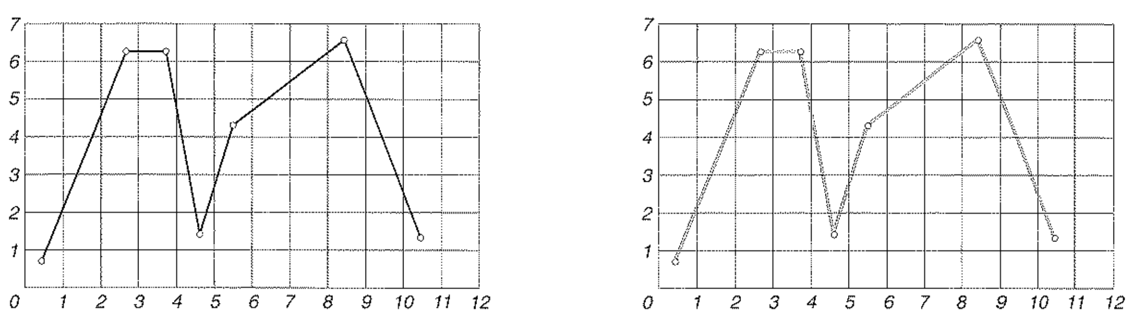


Fig. 16.

9. Equivalencia. Figuras equivalentes

Figuras equivalentes son aquellas que tienen la misma extensión.

Hay que distinguir los términos "**extensión**", "**superficie**" y "**área**".

La **extensión** es una magnitud, igual que longitud y volumen.

La **superficie** es el conjunto abarcado por la forma de la figura.

El **área** de la superficie es la medida de la extensión de la superficie. Su valor depende de la unidad que se emplee.

Se trata de, dada una figura, construir otra que sea equivalente a ella y que tenga una forma determinada. A título de ejemplo, se indica una construcción para dar idea de este tipo de problemas.

10. Construcción de un polígono equivalente a otro, pero que tenga un lado menos (Fig. 17)

Tenemos el polígono *ABCDEF*; se toma una diagonal cualquiera, por ejemplo, la $\overline{FB}$, tal que deje aislado a un solo vértice, el *A*; la parte *BCDEF* es común a las dos figuras; se prolonga el lado $\overline{CB}$ hasta que corte a la paralela a la diagonal $\overline{FB}$ trazada por el vértice *A*. Se obtiene así el vértice *G*. El polígono *GCDEF* es equivalente al dado y tiene un lado menos. Los triángulos *ABF* y *GBF* son equivalentes por tener la misma base $\overline{FB}$ e igual altura. De esta forma se pueden disminuir los lados uno a uno hasta tener un triángulo equivalente a la figura dada.

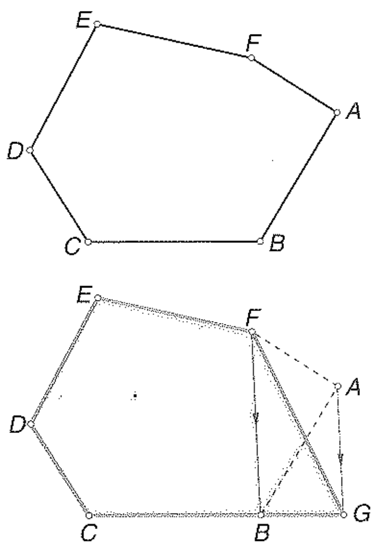


Fig. 17.

11. Simetría

Se dice que dos figuras son simétricas respecto a un punto (**centro de simetría**) o a una recta (**eje de simetría**) cuando al girar una de ellas alrededor del centro o del eje, coincide con la otra.

12. Simetría central (Fig. 18)

Dos puntos *A* y *A'* se dice que son simétricos respecto de un punto *C*, llamado *centro de simetría*, cuando están en línea recta con él y equidistan de dicho centro, $\overline{CA} = \overline{CA'} = d$. Estas dos condiciones las cumplen todas las parejas de puntos simétricos.

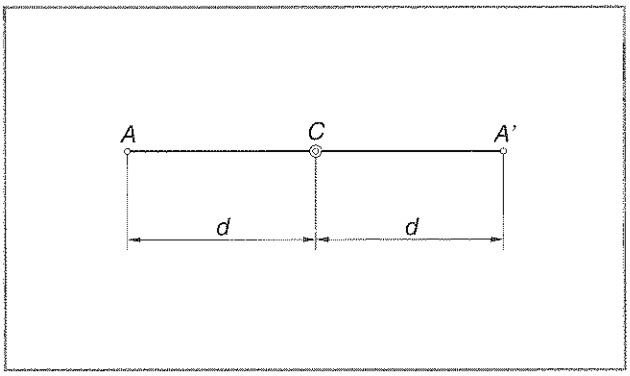


Fig. 18.

13. Construcción de la figura simétrica de otra respecto de un punto (Figs. 19 y 20)

Operamos primero con un segmento (Fig. 19).

Se tiene un segmento *r* cuyos extremos son *N* y *M*; si se quiere hallar su simétrico respecto del punto *C*, dado, que es el centro de simetría, basta hallar los puntos simétricos de los extremos; así, el simétrico de *N* es *N'*, tomando $\overline{CN'} = \overline{CN}$ y en la misma línea; el simétrico de *M* es *M'*, tomando $\overline{CM'} = \overline{CM}$. La solución es el segmento *r'* que resulta paralelo al *r*. **En la simetría central, los segmentos simétricos son paralelos.**

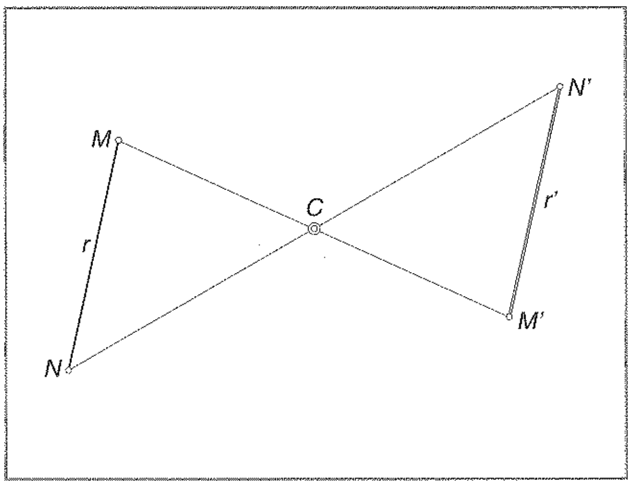


Fig. 19.

En el caso de una figura F, se repite la operación, punto a punto; se unen los vértices *1, 2, 3*... del polígono dado con el centro C de simetría y se toman $\overline{C\text{-}1'} = \overline{C\text{-}1}$, $\overline{C\text{-}2'} = \overline{C\text{-}2}$, etc. Los lados simétricos son paralelos (Fig. 20).

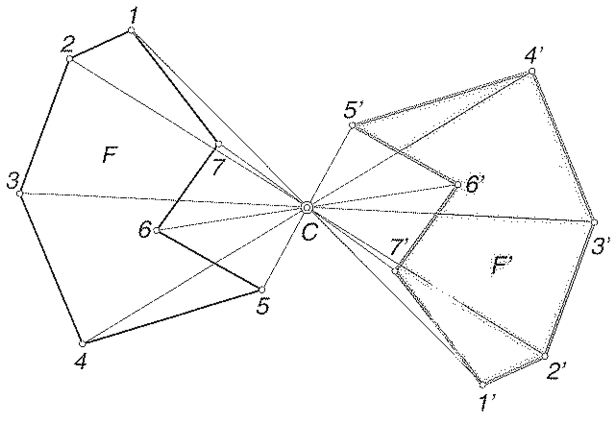


Fig. 20.

14. Simetría axial (Fig. 21)

La simetría axial o respecto de un eje, es, como la anterior, una relación geométrica que liga los puntos simétricos por dos condiciones: un punto A y su simétrico A' están en la misma perpendicular al eje de simetría; los dos puntos A y A' equidistan del eje, estando uno a cada lado del mismo.

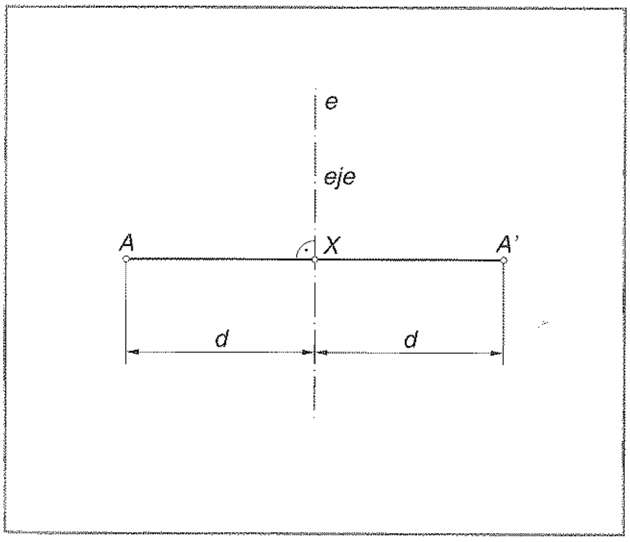


Fig. 21.

15. Construcción de la figura simétrica de otra dada respecto de un eje *e* (Figs. 22 y 23)

Operamos primero con un segmento (Fig. 22).

Se tiene el segmento s cuyos extremos son A y B; el simétrico de A es A' y el simétrico de B es B'; el segmento s' que une A' y B' es el simétrico de s. **En la simetría axial, las parejas de rectas simétricas se cortan en un punto del eje de simetría.**

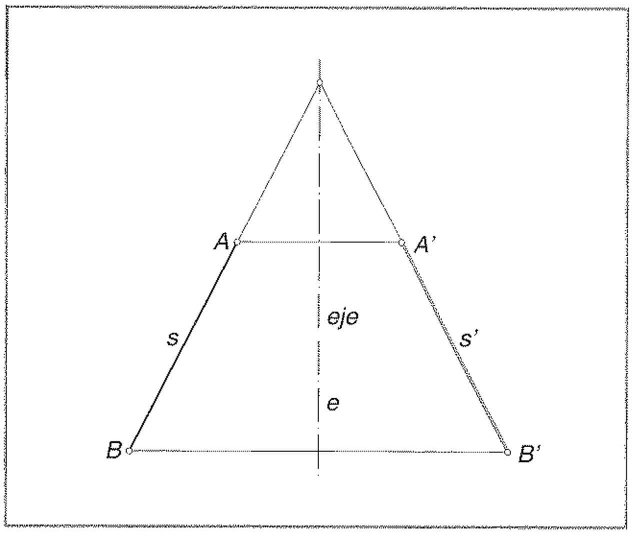


Fig. 22.

Para hallar la figura F', simétrica de otra F respecto de un eje, se repite la operación de hallar el simétrico de un punto respecto de un eje, se trazan perpendiculares a dicho eje por los vértices *1, 2, 3*... de la figura dada y se hallan los correspondientes simétricos *1', 2'*, etc. En la figura se comprueba que los lados simétricos se cortan en un punto del eje de simetría (Fig. 23).

> Las simetrías central y axial son las relaciones geométricas que permiten simplificar notablemente un dibujo industrial. Así, si una vista de una pieza es simétrica respecto de un eje, basta dibujar la mitad y si es simétrica respecto a dos ejes perpendiculares, es decir, respecto a un punto, basta dibujar la cuarta parte, indicando los ejes de simetría correspondientes.

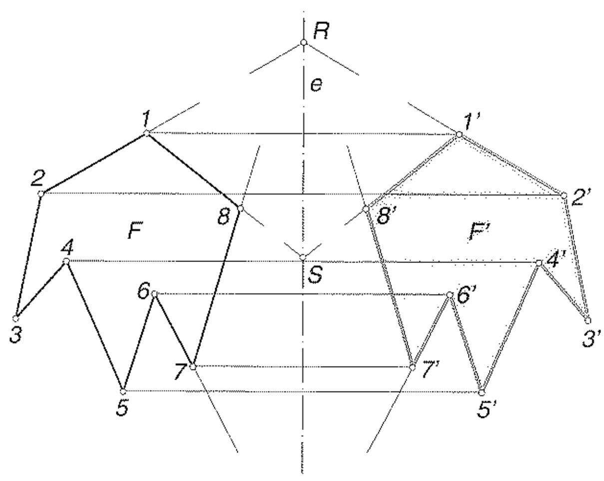


Fig. 23.

ACTIVIDADES

1. Construir gráficamente:

   1°. El segmento tercero proporcional a los segmentos $a = 40$ mm. y $b = 35$ mm.

   2°. El segmento cuarto proporcional a los segmentos $a = 40$ mm., $b = 30$ mm. y $c = 70$ mm.

   3°. El segmento medio proporcional a los segmentos $a = 35$ mm. y $b = 40$ mm.

2. Dividir un segmento de 120 mm. en partes proporcionales a 3, 5 y 7.

3. Dado un pentágono regular de 25 mm. de lado, construir el polígono semejante a él siendo la razón de semejanza 2/3 (emplear diversos procedimientos).

4. Cualquier figura que tengáis a mano (poligonal, curva...) incluso cualquier ilustración, reproducirla a tamaño natural empleando el procedimiento más adecuado de los cinco que se han explicado.

5. Construir un triángulo equivalente a un cuadrado de 50 mm. de lado.

6. Tenemos un polígono convexo irregular cualquiera de 6 lados. Construir un triángulo equivalente a él.

7. Dado un cuadrado de 60 mm. de lado, construir el rectángulo equivalente a él, uno de cuyos lados mida 40 mm.

8. Los siete polígonos de la figura forman un cuadrado (Fig. 24). Se propone, utilizando siempre las siete figuras dadas, dibujar las figuras que se indican a continuación y que, como es lógico, resultarán equivalentes al cuadrado de la figura (Figs. 25 a 29).

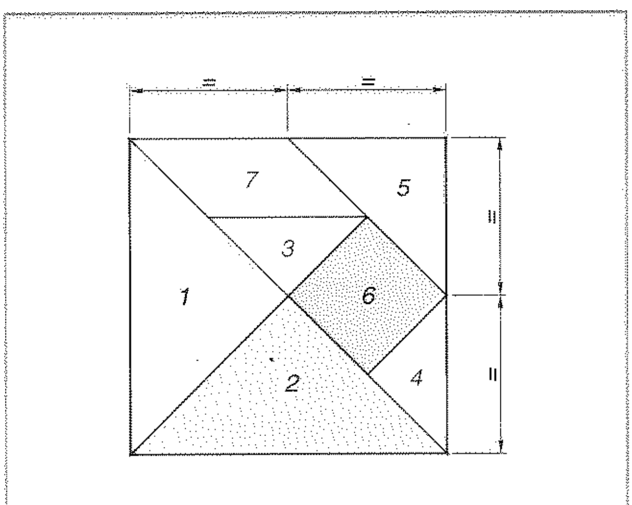


Fig. 24.

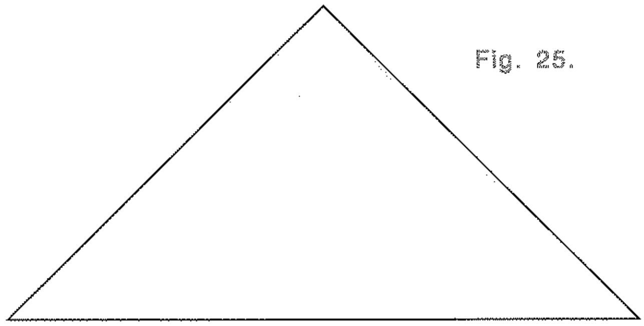


Fig. 25.

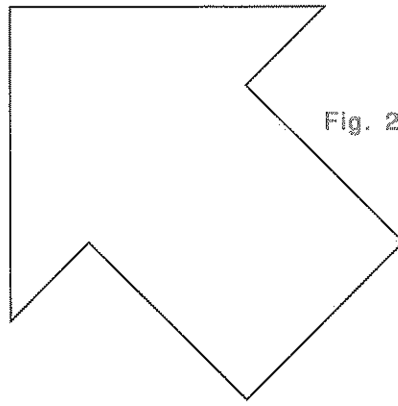


Fig. 26.

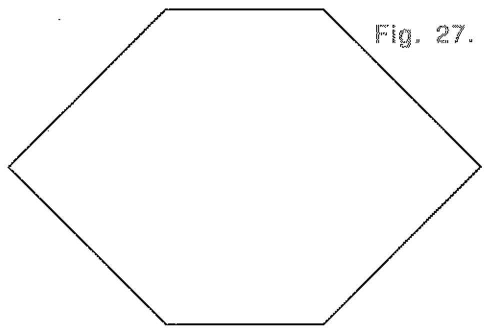


Fig. 27.

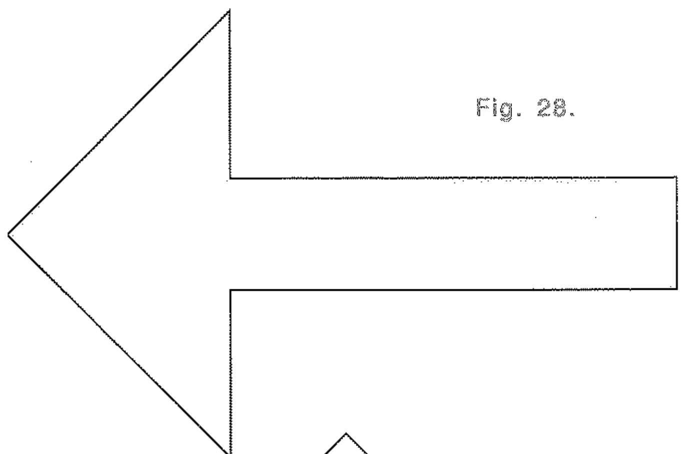


Fig. 28.

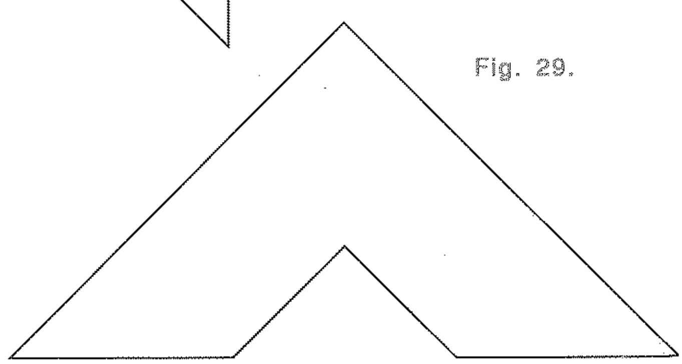


Fig. 29.

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS
Traslación, giro y homotecia

TEMA 7

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática se explicará de forma sucinta en qué consisten los movimientos en el plano: traslación, giro y homotecia, y se harán actividades que pueden ser a mano alzada. El alumno, con este procedimiento, puede perfectamente darse idea de lo que es una traslación, lo que es un giro y cuándo dos figuras son homotéticas.

El desarrollo de esta actividad puede hacerse a lo largo de una clase.

1. Transformaciones geométricas

Una transformación es una correspondencia entre dos elementos de un conjunto cualquiera.

Vamos a hacer un estudio del grupo de transformaciones geométricas más sencillo, como son la traslación, el giro y la homotecia.

2. Traslación en el plano (Fig. 1)

Dado un vector $d \equiv \overrightarrow{VV'}$ de un plano α, se llama "traslación" la transformación T de α en sí mismo, de forma que a todo punto A de la figura F le corresponde otro punto A' de la figura F' tal que el vector $\overrightarrow{AA'}$ es equipolente con el $\overrightarrow{VV'}$.

Los vectores equipolentes son iguales en dirección, magnitud y sentido.

Dado un punto A, su transformado A' en la transformación T se representa: $T(A) \equiv A'$.

Al vector $d \equiv \overrightarrow{VV'}$ que define la traslación se le llama "**vector traslación**" y a su módulo o magnitud, dirección y sentido se les denomina "**amplitud**", "**dirección**" y "**sentido de la traslación**".

En la Fig. 1 se deduce que si $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ también $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ pues $AA'B'B$ es un paralelogramo. Según esto, en toda traslación la figura transformada de un vector es un vector equipolente a él.

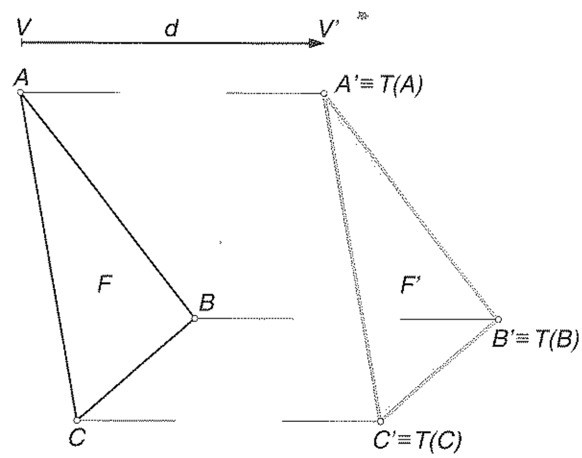


Fig. 1.

En toda traslación:

- La figura transformada de una recta es otra recta paralela a ella.
- La figura transformada de un ángulo es otro ángulo igual (congruente con él).
- Cualquier figura poligonal se transforma en otra igual.
- La figura transformada de un círculo es otro círculo igual a él y cuyo centro es el transformado del centro de aquél en la traslación.

Una recta paralela al vector traslación se transforma en sí misma.

Una traslación queda determinada conociendo la posición de una pareja de puntos homólogos A y A'.

También, dado un vector $\overrightarrow{VV'}$ en un plano, una traslación de vector $\overrightarrow{VV'}$ quedará determinada si, conociendo la posición de un par B y B' de puntos homólogos, los vectores $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{VV'}$ son equipolentes.

La aplicación sucesiva de traslaciones produce otra traslación.

La traslación se aplica cuando es necesario aproximar los datos de un problema. También, con el empleo de traslaciones se puede resolver una gran variedad de problemas geométricos.

3. Giro o rotación

Supongamos un punto fijo O de un plano α y dos puntos distintos de dicho plano, tales que $\overline{OA} = \overline{OA'}$. Se llama "**giro o rotación**" de centro O la transformación biunívoca R del plano α en sí mismo, tal que al punto A le hace corresponder el A' y a todo punto B de α le corresponde un punto B', tal que $\overline{OB} = \overline{OB'}$ y el ángulo orientado y convexo $\widehat{BOB'}$ sea congruente (igual) con el ángulo orientado y convexo $\widehat{AOA'}$ (Fig. 2).

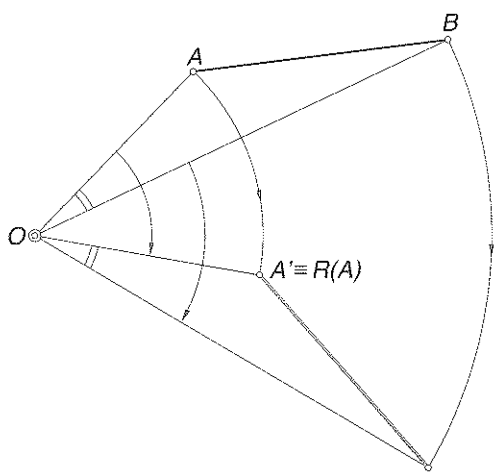


Fig. 2.

El punto O es el centro del giro y el único punto doble (no gira) de la rotación.

El ángulo $\widehat{AOA'}$ es la amplitud del giro o rotación.

En un giro se ha de conocer el ángulo de giro y el sentido del mismo.

En esta transformación todos los elementos de una figura giran el mismo ángulo y en el mismo sentido.

Se verifica: $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$ y $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ y por ello los triángulos AOB y $A'OB'$ son directamente iguales.

En todo giro:

- La figura transformada de una recta es una recta.

  En la Fig. 3, para girar una recta r, con centro de giro el punto O, se traza la perpendicular por O a la recta r y se gira el punto A la amplitud α hasta el punto A'; se traza la recta r', perpendicular por A' al radio de giro OA' y tendremos la recta girada r' de la dada. Obsérvese que el ángulo recto en A se conserva recto en A'. Cualquier otro punto B de la recta r, en el giro irá a estar en r' según B'. Esto es debido a que los triángulos OAB y $OA'B'$ son iguales.

- La figura transformada de una circunferencia es otra circunferencia igual a ella y cuyo centro es el girado del centro de la primera. Para girar una circunferencia es suficiente con girar el centro y trazar la misma con radio igual.

El producto de dos rotaciones del mismo centro es otra rotación de dicho centro.

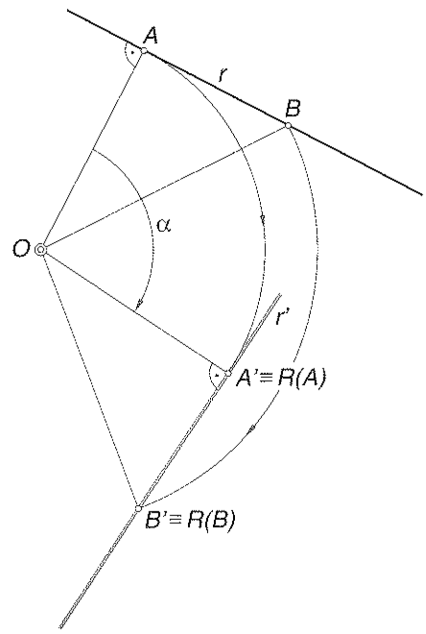


Fig. 3.

4. Homotecia

Se dice que dos figuras son homotéticas cuando se corresponden punto a punto y recta a recta, de forma que parejas de puntos homólogos estén en línea recta con un punto fijo, llamado *"centro de homotecia"*, y que una pareja de rectas homólogas sean paralelas (Fig. 4).

La figura $ABDE$ es homotética de la $A'B'D'E'$. Las rectas AA', BB', DD' y EE', que unen puntos homólogos, pasan por el punto fijo C, centro de homotecia. Las rectas homólogas AB y $A'B'$, BD y $B'D'$, DE y $D'E'$ son paralelas, es decir, se cortan en un punto del infinito, punto impropio.

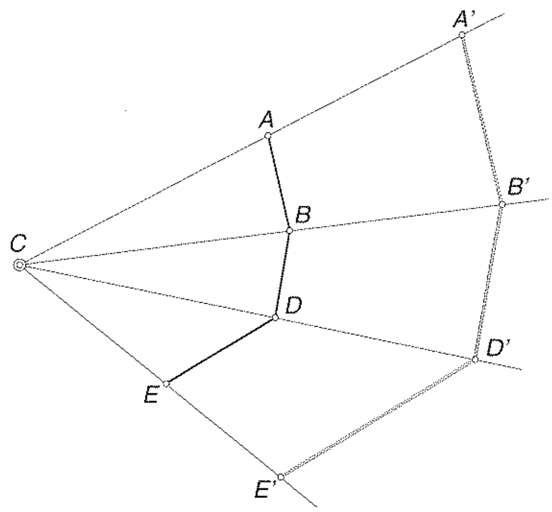


Fig. 4.

En las figuras homotéticas las rectas homólogas son paralelas y, por lo tanto, son figuras semejantes. Dos figuras semejantes son homotéticas cuando sus rectas homólogas son paralelas.

La relación constante $\overline{CA}:\overline{CA'} = \pm\ K$ se llama **característica** o **razón de la homotecia**. En la Fig. 5, la razón es positiva y la homotecia se llama **directa**. En la Fig. 6, la razón es negativa y la homotecia se llama **inversa**.

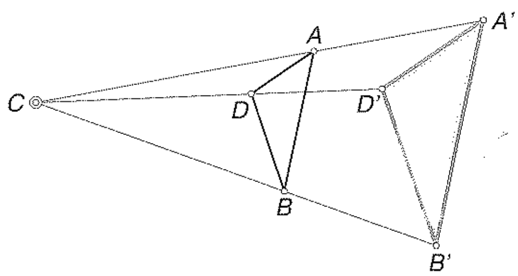


Fig. 5.

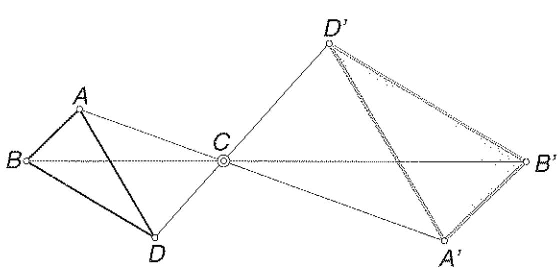


Fig. 6.

La homotecia queda definida por su centro C y la razón K.

Si $K = 1$, la homotecia es una **identidad**.

Si $K = -1$, la homotecia es una **simetría central**, ya que A y A', B y B', etc., son simétricos respecto de C (Fig. 7).

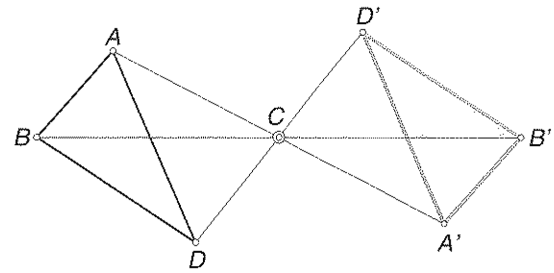


Fig. 7.

Las rectas que pasan por el centro de homotecia son dobles.

En las figuras homotéticas los ángulos homólogos son iguales por la condición de paralelismo de las rectas homólogas.

Dos segmentos paralelos AB y $A'B'$ son homotéticos respecto de dos centros C_1 y C_2 en una homotecia directa y en otra inversa (Fig. 8).

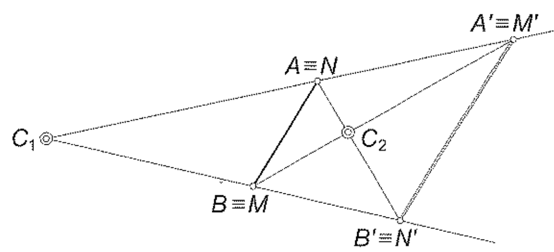


Fig. 8.

Dos circunferencias son siempre homotéticas, siendo los centros de homotecia directa C_1 e inversa C_2 puntos de intersección de las tangentes comunes exteriores o interiores a ellas (Fig. 9).

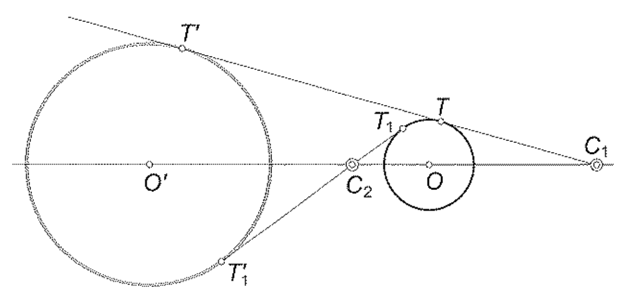


Fig. 9.

ACTIVIDADES

1. Dados una figura poligonal y el vector traslación $\overrightarrow{VV'}$ de 5 cm., hallar la figura transformada.

2. Tenemos una recta *r* y un punto *O* que dista de ella 4 cm. Girar la recta *r* hasta que su transformada forme con ella un ángulo de 60°.

3. Citar algún ejemplo donde se haga aplicación práctica de una traslación o de un giro.

4. Tenemos un segmento $\overline{PQ}$ y otro segmento igual $\overline{P'Q'}$, transformado del primero en un giro. Hallar el centro de giro de la transformación.

5. Dado un pentágono regular, dibujar el polígono homotético de él cuya razón de homotecia sea 2/3, –3/2 ó –1.

TANGENCIAS
Rectificaciones

TEMA 8

DIBUJO GEOMÉTRICO

Objetivos y orientaciones metodológicas

Fundándose en los dos casos únicos de tangencias, entre recta y circunferencia y entre dos circunferencias, el alumno resolverá los problemas más sencillos que se presentan en la práctica del DIBUJO TÉCNICO. Las construcciones no deben memorizarse sino deducir "el porqué" de cada uno de los pasos. Pondrá especial cuidado en la determinación de los puntos de tangencia y en la precisión para la correcta unión de las líneas.

El profesor, según su criterio y el tiempo disponible, propondrá todos o parte de los casos que se estudian. Unas construcciones se harán con instrumentos y otras a mano alzada.

Se puede completar el estudio con la rectificación de la circunferencia o de partes de ella.

A esta unidad temática se debe dedicar un mínimo de tres clases.

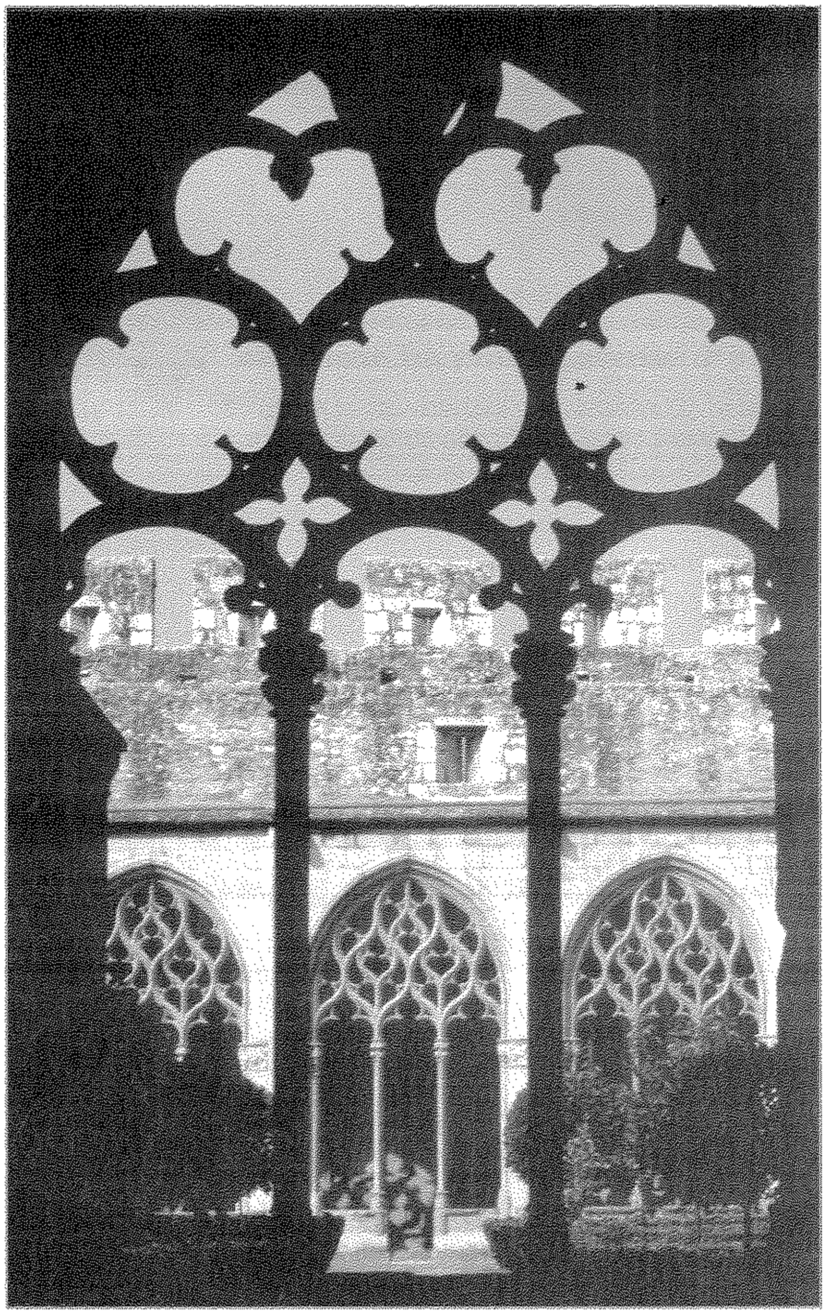
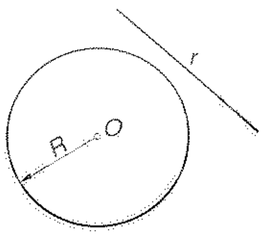


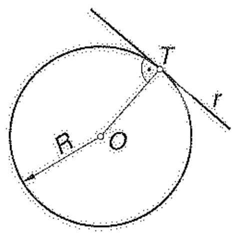
Fig. 1. Tracerías de los ventanales del Monasterio de Santes Creus.

1. Posiciones relativas de recta y circunferencia



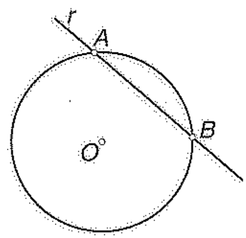
Exteriores

Fig. 2.



Tangentes

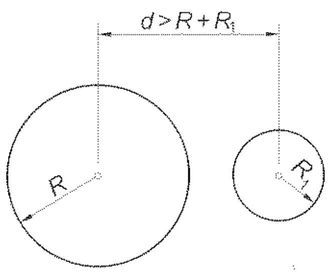
Fig. 3.



Secantes

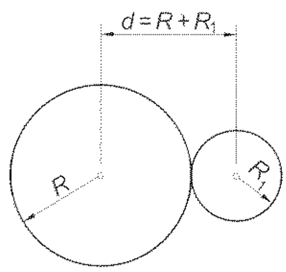
Fig. 4.

2. Posiciones relativas de dos circunferencias



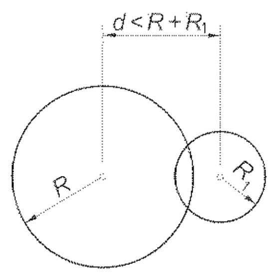
Exteriores

Fig. 5.



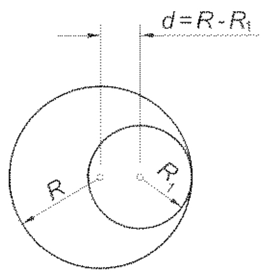
Tangentes exteriores

Fig. 6.



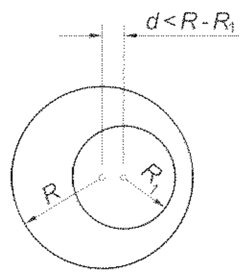
Secantes

Fig. 7.



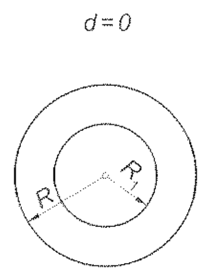
Tangentes interiores

Fig. 8.



Interiores

Fig. 9.



Concéntricas

Fig. 10.

3. Consideraciones sobre tangencias

En la práctica del Dibujo Técnico los problemas de tangencias o de enlace de líneas que se presentan son muy sencillos. Según esto, nos limitamos a la resolución de aquellos casos de aplicación práctica. Los demás problemas tienen un interés puramente geométrico.

Una recta y una circunferencia o dos circunferencias son tangentes cuando tienen un solo punto común.

Las tangencias o enlaces de líneas se fundan en las propiedades siguientes:

1. Si dos circunferencias son tangentes, el punto *T* de tangencia está en la línea de centros (Fig. 11).
2. Si una recta es tangente a una circunferencia, el punto de tangencia *T* es el pie de la perpendicular trazada por el centro *O* a la recta tangente (Fig. 12).

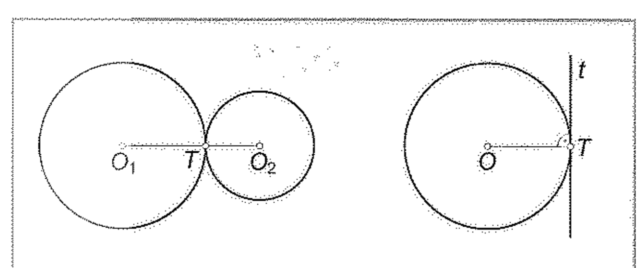


Fig. 11. Fig. 12.

También hay que tener en cuenta lo siguiente: "*El radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales, así como también el arco que ésta subtiende, de donde se deduce que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro*" (Fig. 13).

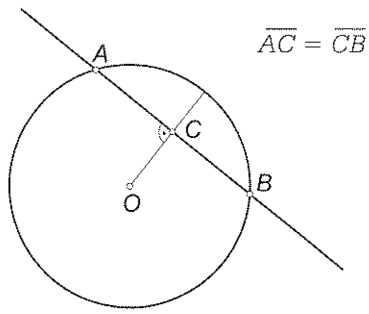
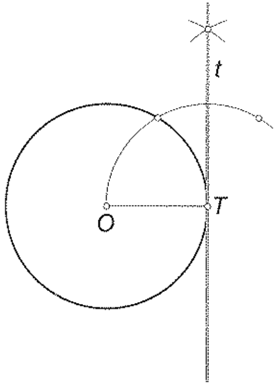


Fig. 13.

Para resolver los problemas de tangencias basta fijarse en los datos y en lo que se desea obtener, razonando las construcciones paso a paso y el "porqué de ellas". También debe estudiarse si los problemas tienen una o más soluciones.

4. Recta tangente a una circunferencia en un punto *T* de ella (Fig. 14)

La tangente t en un punto T a una circunferencia es la perpendicular al radio $\overline{OT}$. Este problema ya se ha resuelto.



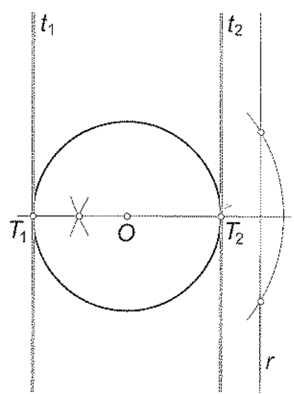


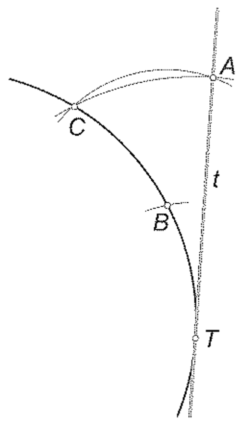
Fig. 14. Fig. 15.

5. Rectas tangentes a una circunferencia paralelas a una dirección dada (Fig. 15)

Sea la dirección r. Por el centro O se traza la perpendicular a la dirección r, la cual corta a la circunferencia en los puntos T_1 y T_2 de tangencia; por estos puntos se trazan las tangentes t_1 y t_2 paralelas a r.

6. Trazado de la tangente a un arco de circunferencia en un punto *T* de ella, no conociendo el centro del arco (Fig. 16)

Se toman dos arcos iguales $\overset{\frown}{TB}$ y $\overset{\frown}{BC}$; con centro en T y radio $\overline{TC}$ se traza un arco y con centro en B y radio $\overline{BC}$ se traza otro arco; estos dos arcos se cortan en el punto A; la recta $\overline{AT}$ es la tangente buscada.



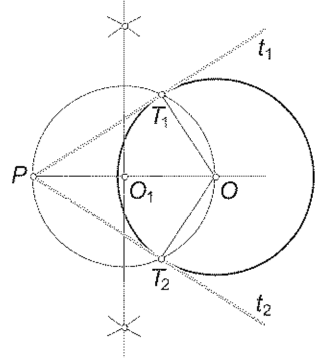


Fig. 16. Fig. 17.

7. Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior *P* (Fig. 17)

Se une el punto exterior P con el centro O y se traza la circunferencia de diámetro $\overline{O\text{-}P}$, la cual corta en T_1 y T_2 a la dada. Las tangentes t_1 y t_2 son las rectas PT_1 y PT_2.

8. Rectas tangentes comunes exteriores a dos circunferencias (Fig. 18)

Las circunferencias dadas de centros O y O_1 tienen de radios r y R, respectivamente. Con centro en O_1 se traza la de radio $\overline{R-r}$, y desde O se trazan las tangentes a ella, rectas OT_0 y OT'_0; las rectas tangentes soluciones son paralelas a ellas; los puntos de tangencia T'_1, T_1, T_2 y T'_2 se obtienen trazando por O y O_1 las perpendiculares a las tangentes auxiliares.

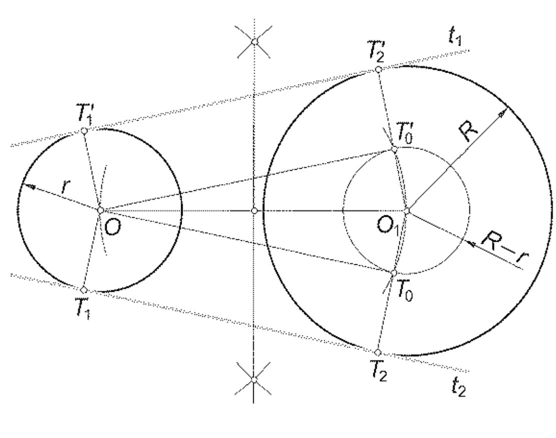


Fig. 18.

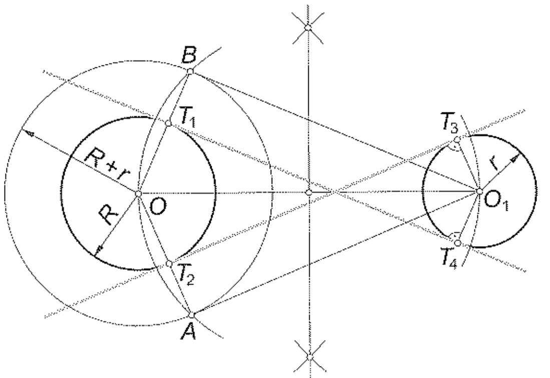


Fig. 19.

9. Rectas tangentes comunes interiores a dos circunferencias (Fig. 19)

Este problema se resuelve de forma similar al anterior. Con centro en O se traza la circunferencia auxiliar de radio $\overline{R+r}$ y desde O_1 se trazan las tangentes a esta circunferencia; los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ permiten obtener los puntos T_1 y T_2; las soluciones son paralelas a $\overline{O_1A}$ y $\overline{O_1B}$.

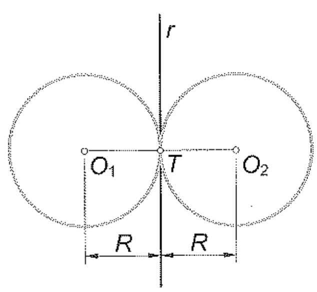


Fig. 20.

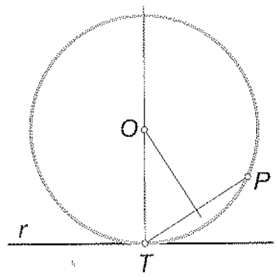


Fig. 21.

10. Circunferencias tangentes a una recta r en un punto de ella T, conocido el radio R de las soluciones (Fig. 20)

Tiene dos soluciones. Sobre la perpendicular a la recta r por T, se toma el radio R en los dos sentidos, y se obtienen así los puntos O_1 y O_2, centros de las soluciones.

11. Circunferencia tangente a una recta r en un punto T de ella y que pasa por un punto P (Fig. 21)

El centro O estará en la perpendicular a la recta r por T y en la mediatriz del segmento $\overline{TP}$.

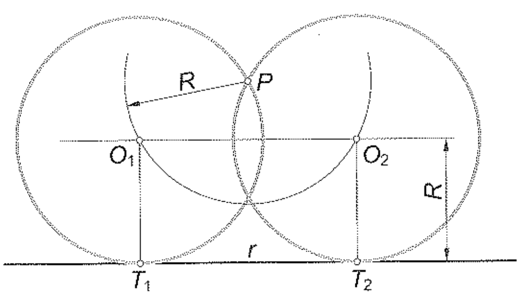


Fig. 22.

12. Circunferencias tangentes a una recta r, que pasan por un punto P y que tienen un radio R dado (Fig. 22)

El problema tiene dos soluciones. Los centros de las soluciones han de equidistar de la recta r y del punto P; por ello, se trazan la paralela a la recta r a la distancia R y la circunferencia de centro P y radio R; los puntos de intersección de ambas, O_1 y O_2, son los centros de las soluciones, cuyos puntos de tangencia con r son T_1 y T_2.

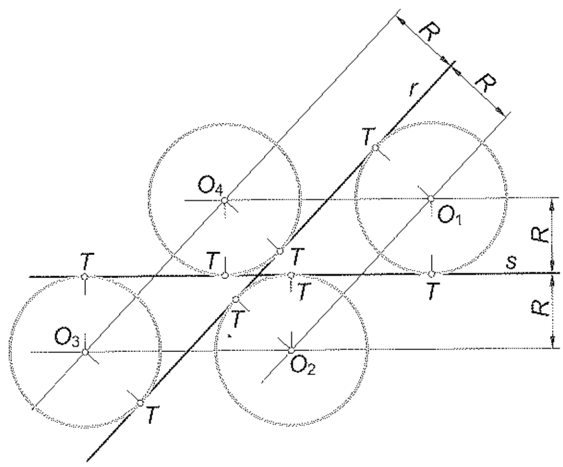


Fig. 23.

13. Circunferencias tangentes a dos rectas r y s que se cortan, conocido el radio R de las soluciones (Fig. 23)

Se trazan rectas paralelas a las dadas a una distancia igual al radio R, las cuales se cortan en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4, centros de las soluciones. En la figura se indican todos los puntos de tangencia con las rectas dadas.

14. Circunferencias tangentes a dos rectas r y s, dado el punto de tangencia T en una de ellas (Fig. 24)

El problema tiene dos soluciones. Los centros O y O_1 son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos que forman r y s con la perpendicular a la recta s en el punto T.

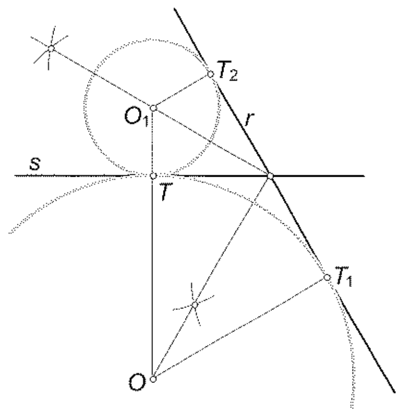


Fig. 24.

15. Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan dos a dos (Fig. 25)

El problema tiene cuatro soluciones. Las circunferencias pedidas son la inscrita y las exinscritas al triángulo que forman las tres rectas. Sus centros son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores del triángulo.

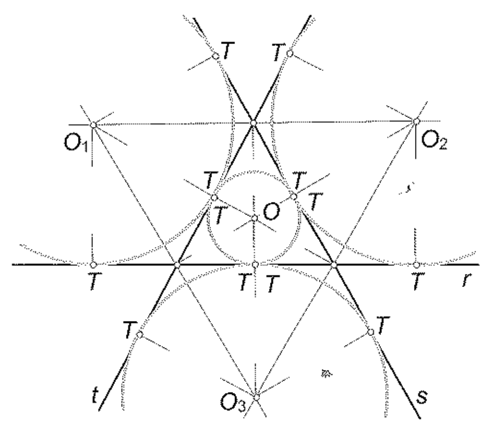
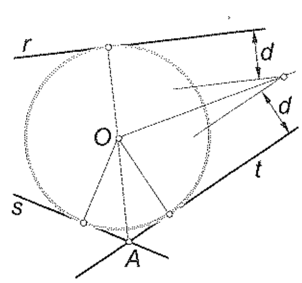


Fig. 25.

16. Circunferencias tangentes a tres rectas r, s y t cuando al menos dos rectas se cortan fuera del dibujo (Fig. 26)

Las rectas dadas no se cortan dos a dos en los límites del dibujo; el centro O estará en la bisectriz del ángulo A y en la bisectriz de dos rectas paralelas a las r y t trazadas a la misma distancia d de ellas.



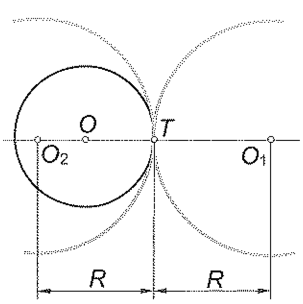


Fig. 26. Fig. 27.

17. Circunferencias tangentes a otra, dados el punto de tangencia T y el radio R de las soluciones (Fig. 27)

El problema tiene dos soluciones. Los datos son la circunferencia de centro O, el punto T y el radio R de las soluciones. Sobre la recta OT prolongada, se toma $\overline{TO_1} = \overline{TO_2} = R$. Los centros son O_1 y O_2.

18. Circunferencia tangente a otra, dado el punto de tangencia T y que pasa por un punto exterior P (Fig. 28)

El centro O_1 de la solución es la intersección de la recta OT, prolongada, y la mediatriz del segmento $\overline{TP}$.

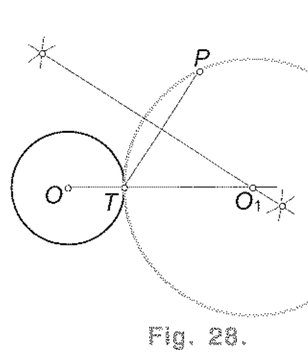


Fig. 28.

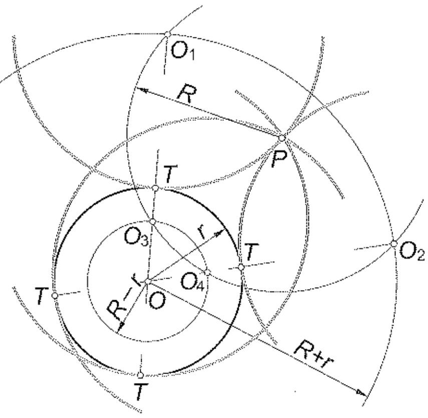


Fig. 29.

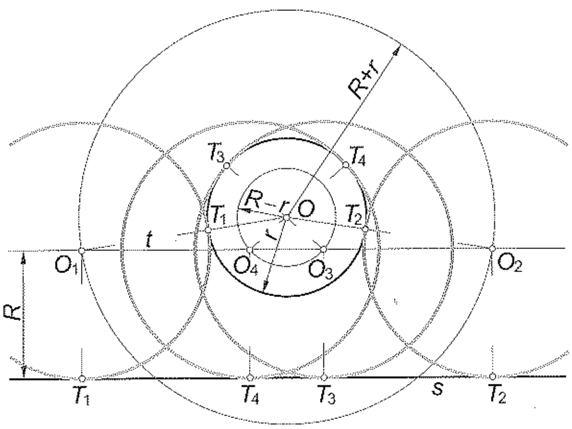


Fig. 30.

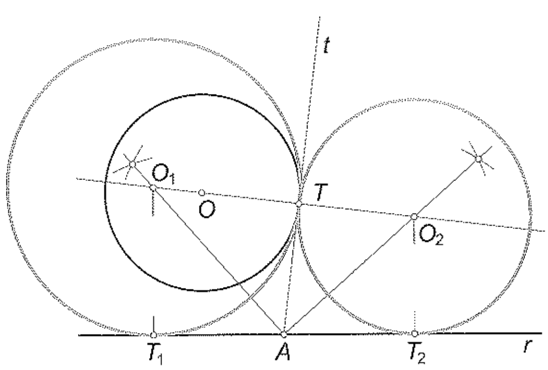
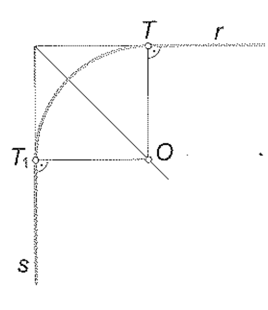


Fig. 31.



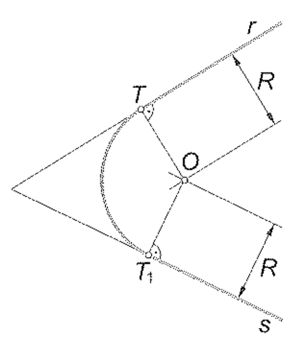


Fig. 32. Fig. 33.

19. Circunferencias tangentes a otra, que pasen por un punto *P*, dado el radio *R* de las soluciones (Fig. 29)

Según los datos, el problema puede tener hasta cuatro soluciones. Con centro en *O*, centro de la circunferencia dada, se trazan las circunferencias de radio $\overline{R+r}$ y $\overline{R-r}$, y con centro en *P*, otra circunferencia de radio *R*. Los puntos de intersección de estas circunferencias O_1, O_2, O_3 y O_4 son los centros de las soluciones.

20. Circunferencias tangentes a otra y a una recta *s*, dado el radio *R* de las soluciones (Fig. 30)

El problema puede tener hasta ocho soluciones. La circunferencia dato es la de centro *O* y radio *r*. Se traza la recta *t* paralela a la *s*, a la distancia *R*, y con centro en *O*, las circunferencias de radio $\overline{R+r}$ y $\overline{R-r}$.

Los centros de las soluciones son los puntos de intersección de la paralela y las dos circunferencias auxiliares trazadas, puntos O_1, O_2, O_3 y O_4.

21. Circunferencias tangentes a otra y a una recta *r*, dado el punto de tangencia *T* en la circunferencia (Fig. 31)

El problema tiene dos soluciones. Se dan la circunferencia de centro *O* y la recta *r*, así como el punto de tangencia *T* en la primera. Los centros de las soluciones estarán en la recta *OT*; la tangente en *T* a la circunferencia dada también lo será a las soluciones y, por lo tanto, los centros estarán también en las bisectrices de los ángulos que forman las rectas *r* y *t*.

22. Enlace de líneas

La aplicación real de las tangencias en el dibujo industrial es el enlace de líneas. Virtualmente, en todos los planos hay que unir repetidamente dos rectas con un arco de circunferencia (excepcionalmente con un arco parabólico) o bien una recta y una circunferencia por medio de otro arco. Por ello, se indican a continuación algunos ejemplos de aplicación.

Vamos a unir dos rectas por medio de un arco de circunferencia.

En la Fig. 32 se conoce el punto de tangencia *T* en *r*. El centro del arco está en la bisectriz de *r* y *s* y en la perpendicular por *T* a *r*.

En la Fig. 33 se conoce el radio *R* del arco de unión de *r* y *s*. El centro es el punto *O* de intersección de las paralelas a *r* y *s* trazadas a la distancia *R*.

En la Fig. 34 se conoce el punto T de tangencia. El centro O es el de intersección de la bisectriz de r y s con la perpendicular por T a r.

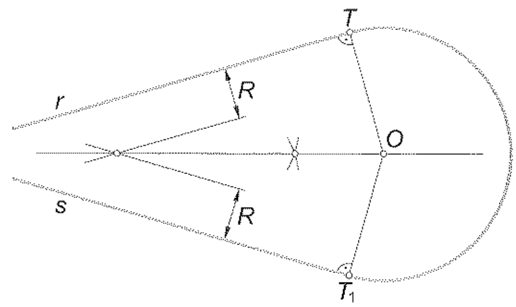
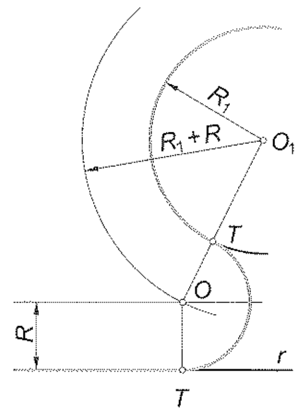


Fig. 34.

En las Figs. 35 y 36 se enlazan una recta y un arco de circunferencia de radio R_1 por medio de un arco de radio R.

Se trazan la paralela a r a la distancia R y las circunferencias de radio $R_1 + R$ o $R_1 - R$, que se cortan en los centros O de los arcos de enlace. Se indican los puntos T de tangencia.



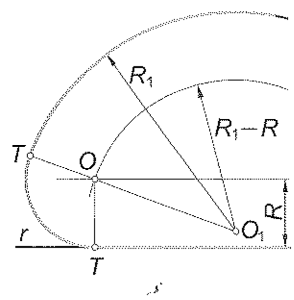


Fig. 35. Fig. 36.

En la Fig. 37 se traza un arco tangente a otro en un punto T y que pasa por el punto P.

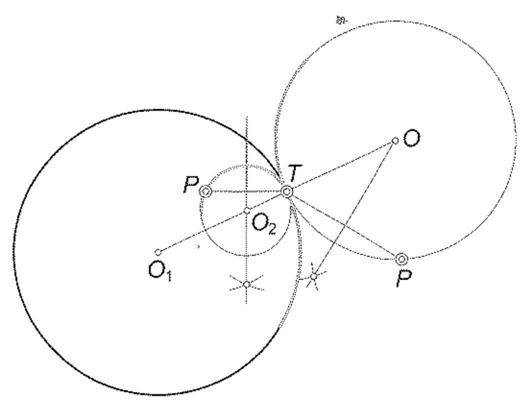


Fig. 37.

En la Fig. 38 se enlaza un arco de radio R con una recta r sabiendo que el punto T es de tangencia. Se traza por T la perpendicular a r y se toma $TN = R$. La mediatriz de $\overline{O_1 - N}$ corta en O a la perpendicular. El punto O es el centro del arco de enlace.

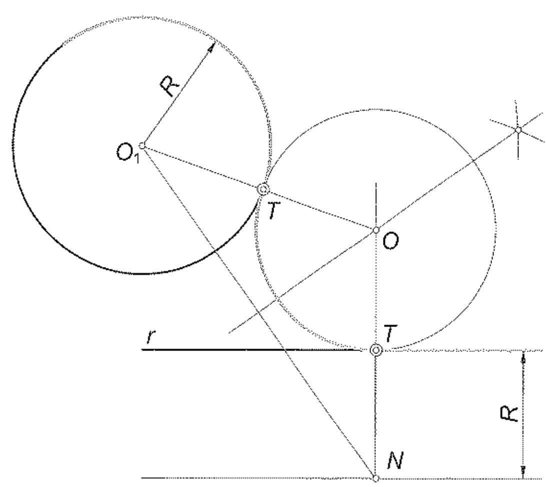


Fig. 38.

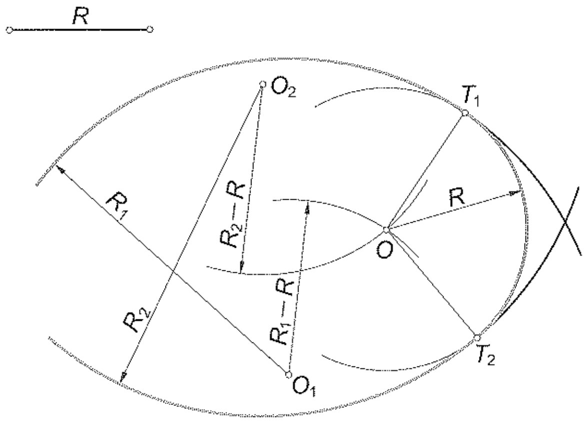


Fig. 39.

En la Fig. 39 se unen dos arcos de circunferencia por medio del arco de radio R.

Con centros en O_1 y O_2 se trazan dos arcos de radio $\overline{R_1-R}$ y $\overline{R_2-R}$, los cuales se cortan en el centro O del arco solución. Uniendo O con O_1 y O_2 se obtienen los puntos de tangencia T_1 y T_2.

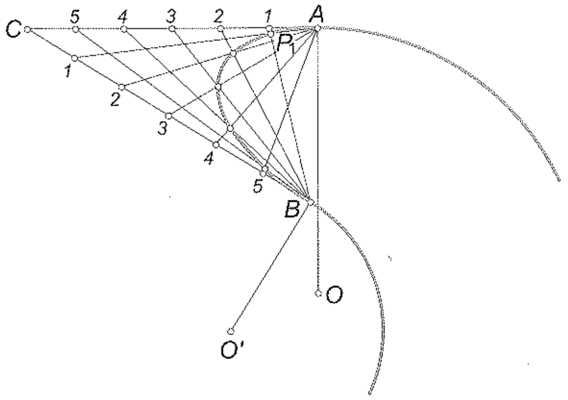


Fig. 40.

23. Unión de dos curvas por medio de una curva parabólica, dados los puntos *A* y *B* de tangencia (Fig. 40)

Se tienen dos arcos de circunferencia de centros O y O' y hay que unirlos por medio de un arco parabólico, siendo A y B los puntos de tangencia. Se trazan las tangentes en A y B, que se cortan en C. Se dividen los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ en el mismo número de partes iguales, seis en la figura; se numeran y se unen estas divisiones de la forma que indica la figura; las rectas $\overline{1\text{-}A}$ y $\overline{1\text{-}B}$ se cortan en el punto P_1 del arco parabólico; de la misma forma se obtienen otros puntos del citado arco.

En el caso de que haya que unir dos rectas r y s (Fig. 41) se opera como en el caso anterior.

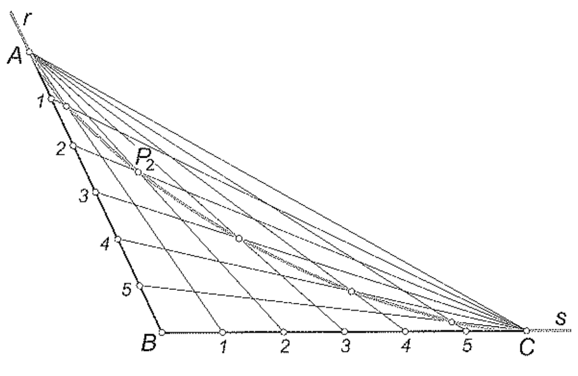


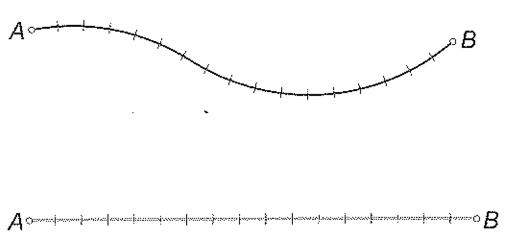
Fig. 41.

24. Rectificaciones

En la práctica se presenta el caso de tener que rectificar una curva cualquiera o un arco de circunferencia. A continuación se indica la forma de resolver este tipo de problemas.

25. Rectificación de una curva cualquiera (Fig. 42)

Sobre la curva dada se toman cuerdas lo más pequeñas posible y se van llevando, una a continuación de otra, sobre una recta. De esta forma, al no tomar los arcos, el error es pequeño, por ser pequeñas las divisiones que se toman. La física enseña el manejo del curvímetro para medir la longitud de una curva.



Longitud de la curva

Fig. 42.

26. Rectificación de la circunferencia (Fig. 43)

Se divide el diámetro en siete partes iguales y sobre una recta se llevan 22 de dichas partes, es decir, tres diámetros y una séptima parte del diámetro.

La longitud de la circunferencia es $2\pi r = \pi d$; el número π es aproximadamente igual a $22/7 = 3 \cdot 1/7$, de aquí, el tomar tres diámetros más una séptima parte del diámetro.

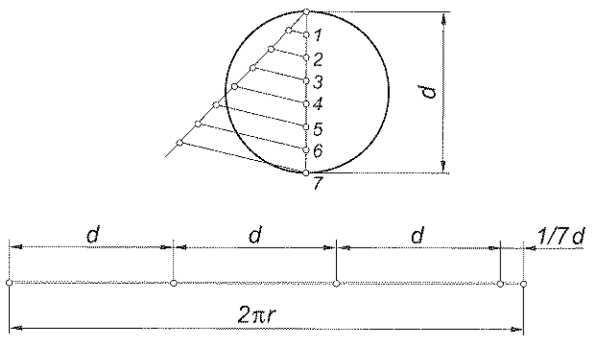


Fig. 43.

27. Rectificación de la semicircunferencia (Fig. 44)

Primer procedimiento (Fig. 44)

La longitud de la semicircunferencia es igual a la suma de los lados del triángulo y del cuadrado inscritos en ella. Esto es lo que se hace en la figura al poner l_3 y l_4 uno a continuación de otro.

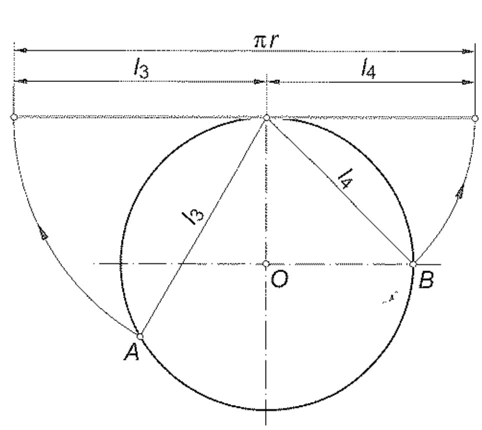


Fig. 44.

Segundo procedimiento (Fig. 45)

Por el centro O se traza la recta OA que forma 30° con el diámetro $\overline{BD}$; esta recta encuentra en A a la tangente en B a la circunferencia. Se toma $\overline{AC} = 3r$ (tres radios) y se unen C y D. El segmento $\overline{CD}$ es la rectificación de la semicircunferencia.

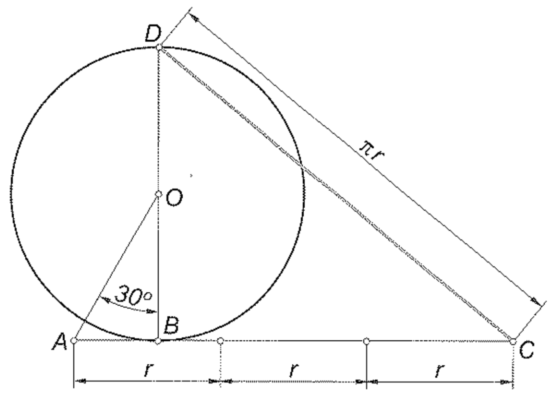


Fig. 45.

28. Rectificación de un cuadrante de circunferencia (Fig. 46)

Se toma un diámetro $\overline{AB}$. Con centros en A y B se trazan los arcos $\widehat{OD}$ y $\widehat{OC}$, respectivamente. Con centro en B se traza el arco $\widehat{DE}$, y con centro en C, el arco $\widehat{EF}$. El segmento $\overline{FB}$ es la longitud de un cuadrante de circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$.

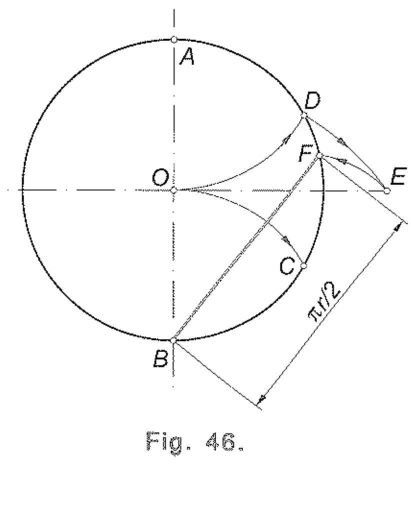
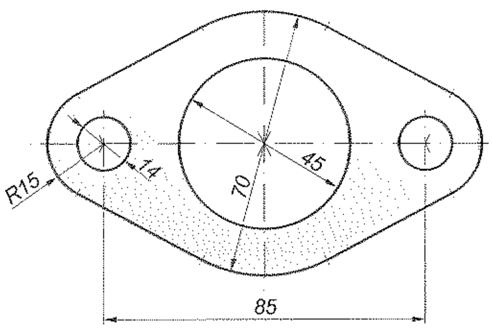
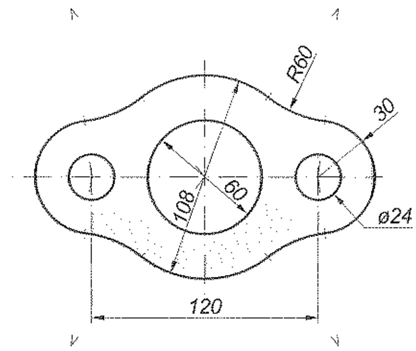


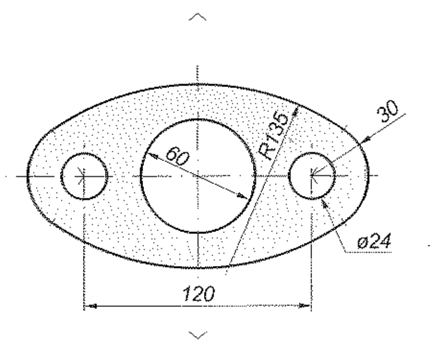
Fig. 46.

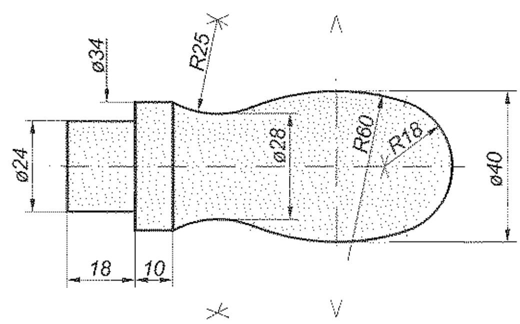
ACTIVIDADES

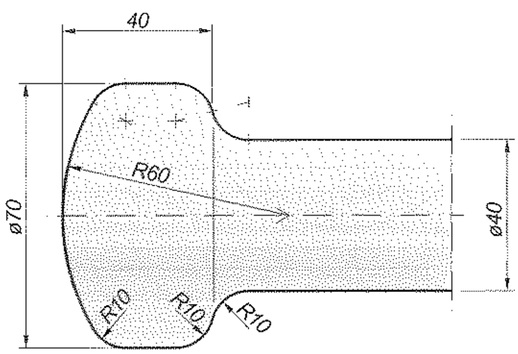
Presentamos a continuación una serie de piezas reales en las que aparecen enlaces de líneas. El lector debe resolver estos problemas determinando los centros de los arcos y los puntos de tangencia. Elegir en cada caso una escala para el dibujo de forma que pueda hacerse en el formato disponible.

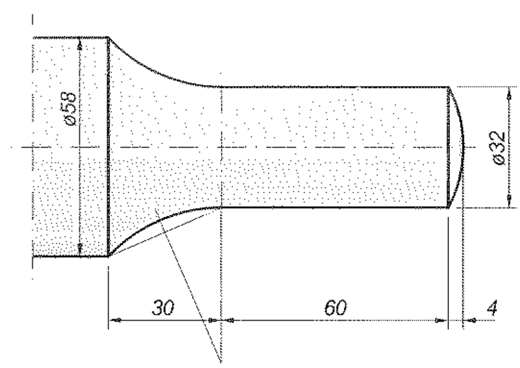


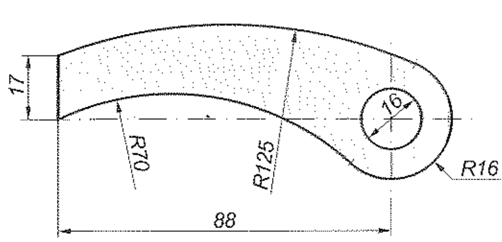


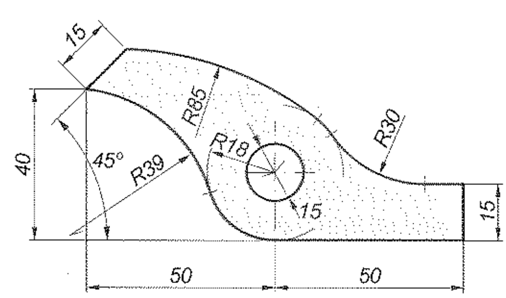












CURVAS TÉCNICAS
Óvalo, ovoide, espiral y voluta. Trazado como aplicación de tangencias

TEMA 9

Objetivos y orientaciones metodológicas

Se trata de una unidad temática corta y sencilla. El alumno aprenderá, al menos, un procedimiento de construcción de cada una de las curvas. El dibujo debe hacerse con precisión a fin de conseguir un correcto enlace entre los diversos arcos que forman las curvas, determinando los puntos de tangencia. Sin aumentar el trabajo manual, se indicarán algunas aplicaciones prácticas tanto en órganos de máquinas como en arquitectura.

El desarrollo de esta unidad temática puede hacerse en una clase.

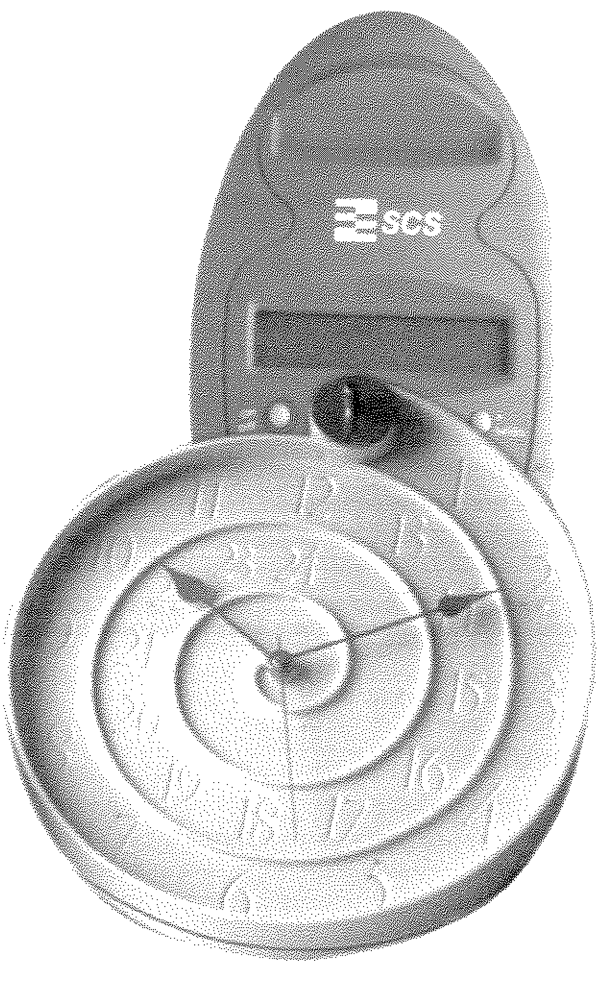


Fig. 1. Aplicaciones de las curvas técnicas.

1. Óvalo

El óvalo es una curva cerrada formada por arcos de circunferencia y simétrica respecto a dos ejes perpendiculares. Su aplicación práctica más importante en dibujo industrial es el trazado de perspectivas, ya que puede sustituir a una elipse de forma aproximada.

2. Construcción de un óvalo dado el eje mayor $\overline{AB}$ (Fig. 2)

Se divide $\overline{AB}$ en tres partes iguales, con lo cual se obtienen los puntos O_1 y O_2; con centro en estos puntos se trazan las circunferencias de radios $\overline{O_1\text{-}A}$ y $\overline{O_2\text{-}B}$ y los puntos de intersección O_3 y O_4 son los otros dos centros que permiten completar el óvalo.

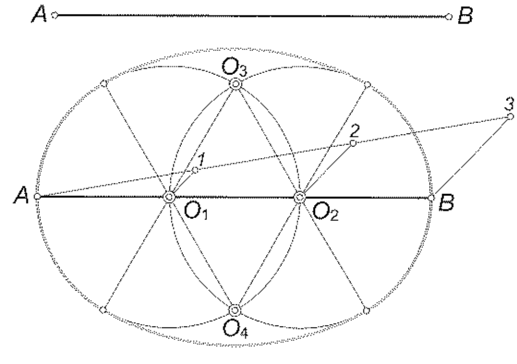


Fig. 2.

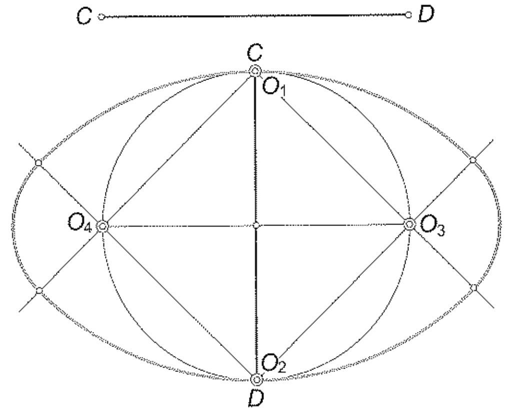


Fig. 3.

3. Construcción de un óvalo dado el eje menor $\overline{CD}$ (Fig. 3)

Se construye la circunferencia de diámetro $\overline{CD}$ y se trazan dos diámetros perpendiculares. Los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 son los centros de los arcos de circunferencia que permiten construir el óvalo.

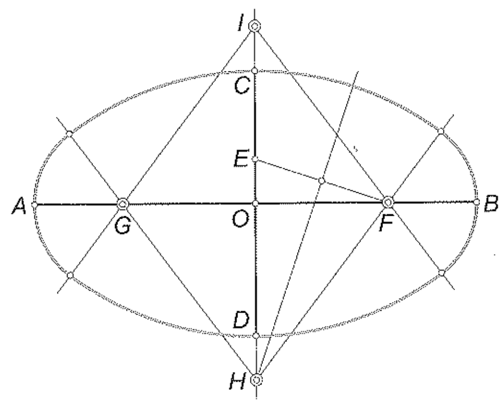


Fig. 4.

4. Construcción de un óvalo de cuatro centros conociendo los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

Primer procedimiento (Fig. 4)

Se dibujan los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ perpendiculares y cortándose en el punto medio O; se toman en OB y OC dos segmentos iguales $\overline{BF} = \overline{CE}$; se une E con F y la mediatriz de $\overline{EF}$ corta en H a la prolongación del eje menor; se hallan los simétricos de F y H respecto de O y se tienen los puntos G e I. Los puntos F, H, G e I son los centros de los arcos.

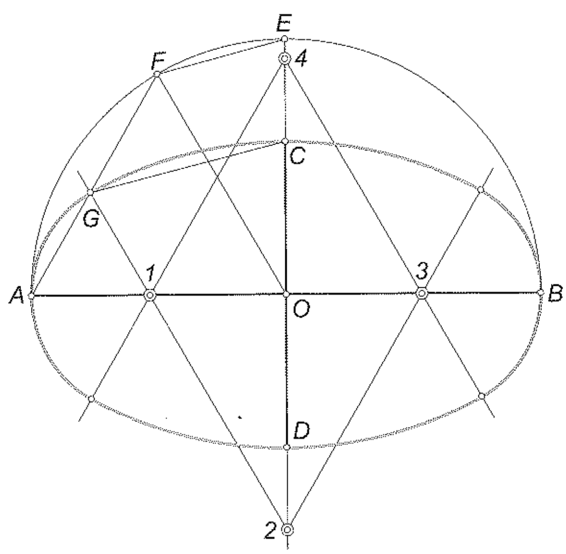


Fig. 5.

Segundo procedimiento (Fig. 5)

Se sitúan como antes los dos ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; se traza la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y se lleva el lado del hexágono inscrito $\overline{AF}$; se une E con F y F con O; por C se traza la paralela a $\overline{EF}$, la cual corta en G a $\overline{AF}$, y por G, la paralela a $\overline{FO}$, que corta en *1* y *2* a los dos ejes del óvalo; los puntos *1* y *2* y sus simétricos *3* y *4* son los centros de los arcos de circunferencia que permiten construir el óvalo.

Existen otras construcciones para hacer un óvalo con un mayor número de centros.

5. Ovoide

El ovoide es una curva cerrada formada por arcos de circunferencia y simétrica respecto a un solo eje. Se utiliza en arquitectura y esporádicamente aparece en dibujo industrial.

6. Construcción de un ovoide dado el eje mayor $\overline{AB}$ (Fig. 6)

Se divide $\overline{AB}$ en seis partes iguales y sobre la perpendicular a $\overline{AB}$ por la división *2* se toman cuatro partes en los dos sentidos. Los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 que indica la figura son los centros del ovoide.

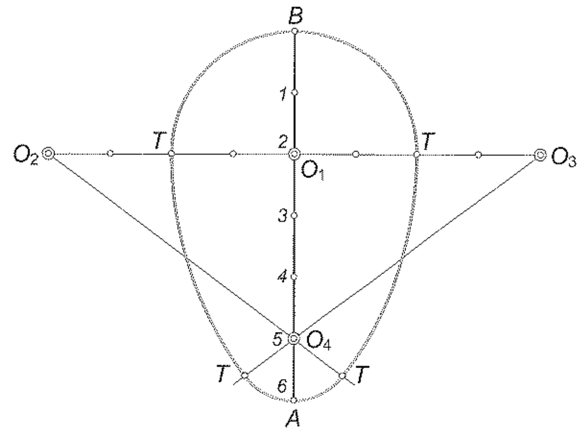


Fig. 6.

7. Construcción de un ovoide dado el eje menor $\overline{CD}$ (Fig. 7)

Con $\overline{CD}$ como diámetro se traza la circunferencia de la figura y el diámetro perpendicular a $\overline{CD}$. Los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 son los centros de los arcos que forman el ovoide.

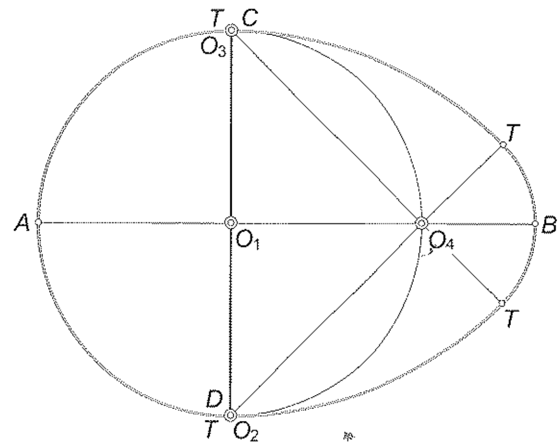


Fig. 7.

8. Voluta

La voluta es una curva formada por arcos de circunferencias tangentes entre sí, siendo los centros sucesivos de estos arcos los vértices de un polígono determinado, p. ej., un triángulo, un cuadrado, etc.

9. Construcciones de la voluta (Fig. 8)

Se supone una circunferencia, p. ej., la de diámetro $\overline{A\text{-}5}$ y se construye el cuadrado *1-2-3-4*, siendo el vértice 4 el centro de la circunferencia anterior. Los puntos *1, 2, 3, 4, 5*, etc., van a ser los centros de los arcos de circunferencia que forman la voluta. Con centro en *1* y radio $\overline{1\text{-}A}$ se traza el arco $\overset{\frown}{AB}$, estando *B* en la prolongación del segmento $\overline{2\text{-}1}$; con centro en *2* y radio $\overline{2\text{-}B}$ se traza el arco $\overset{\frown}{BC}$; con centro en *3*, el arco $\overset{\frown}{CD}$, y así sucesivamente.

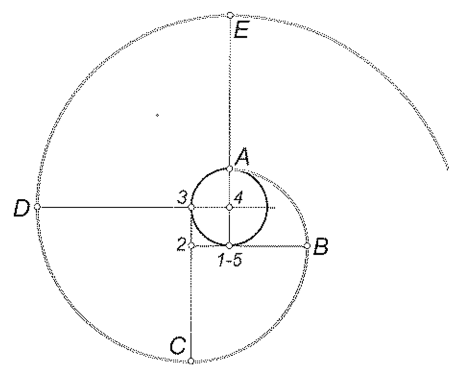


Fig. 8.

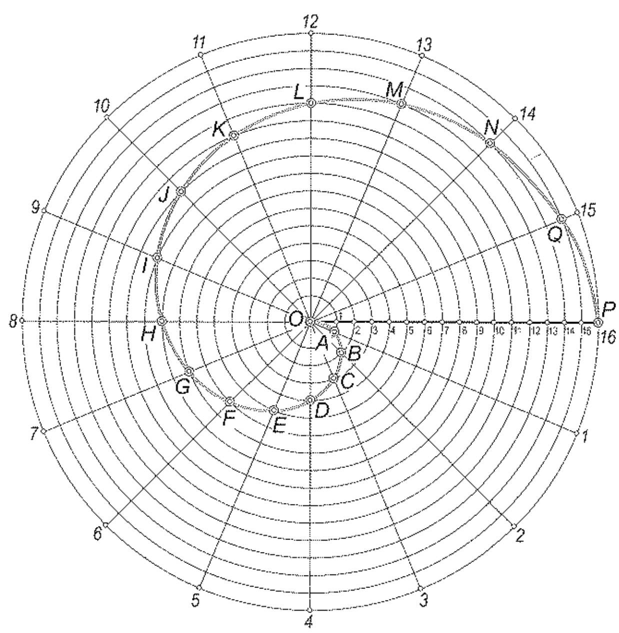


Fig. 9.

10. Construcción de la espiral de Arquímedes (Fig. 9)

Se considera un segmento $\overline{OP}$ que es el paso de la espiral. Con centro en *O* y radio $\overline{OP}$ se traza la circunferencia de la figura, la cual se divide en un número de partes iguales, p. ej., 16 partes. Se divide el paso en el mismo número de partes iguales; los puntos de la espiral se obtienen al cortarse las circunferencias concéntricas con los radios que pasan por los mismos puntos de división.

Los puntos se unen con plantilla de curvas.

11. La hélice cilíndrica (Figs. 10, 11 y 12)

La hélice cilíndrica es una curva alabeada (no plana) situada sobre una superficie cilíndrica de revolución. Su aplicación en mecánica y construcción es muy importante.

En la Fig. 10, tenemos un cilindro de revolución en perspectiva. Su radio es R y la altura es p = paso de la hélice.

Paso p de la hélice: es la longitud entre dos pasos sucesivos de la hélice por una misma generatriz del cilindro. En la Fig. 10 es el segmento de la generatriz *1'-1"*.

La hélice está engendrada por un punto *1-1'*, situado en este caso en la base, que se mueve en la superficie del cilindro, de forma que existe proporcionalidad entre los giros y los desplazamientos lineales (ordenadas) del punto generador. Es, pues, la trayectoria del movimiento helicoidal componente de un movimiento circular y de otro rectilíneo, ambos uniformes.

Se llama **espira** a la parte de la hélice comprendida en un paso, es decir, correspondiente a una parte completa de la curva.

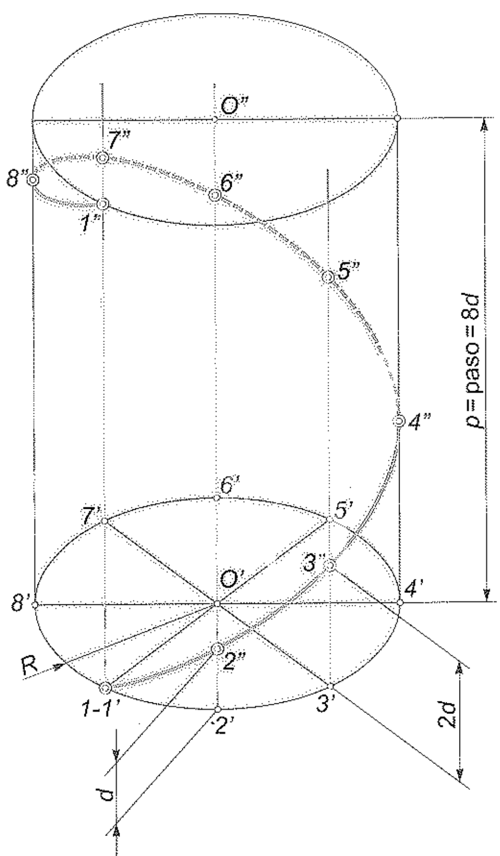
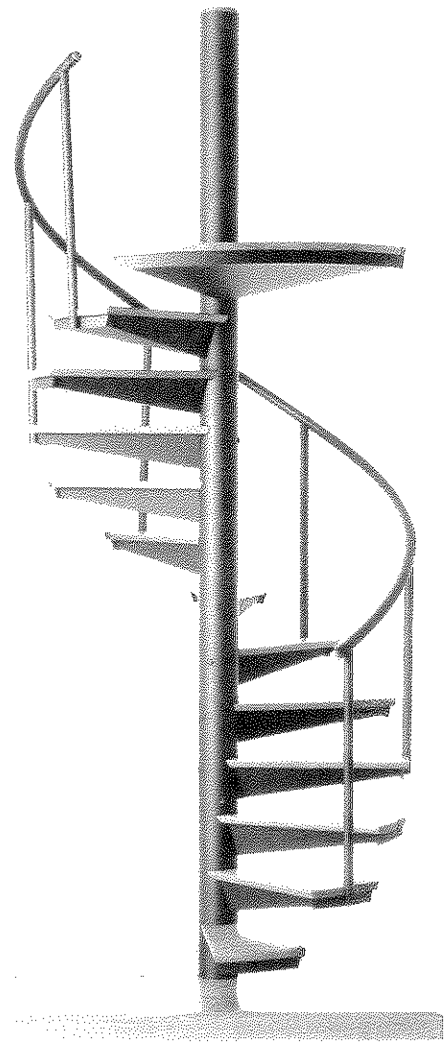
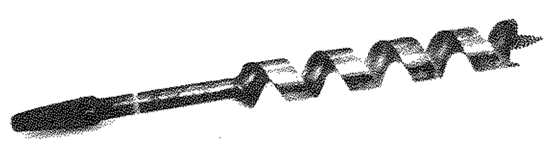
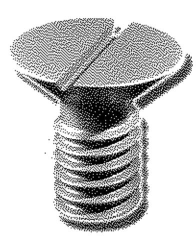


Fig. 10.







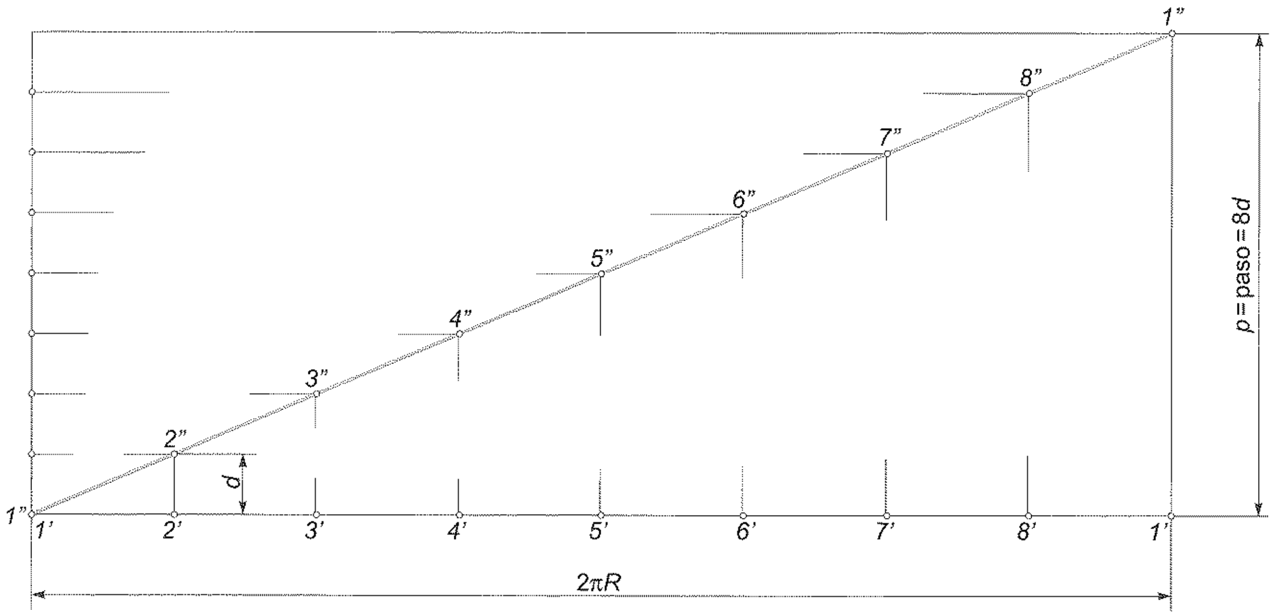


Fig. 11.

La Fig. 12 representa la hélice en proyecciones.

El eje *O'-O"* del cilindro es perpendicular al plano horizontal de la base, y el punto generador de la curva es el punto *1-1'* de la base. Según el sentido de giro del punto *1* alrededor del eje *O'-O"*, la hélice será izquierda o *sinistrorsum* cuando el observador situado en el eje y mirando al punto *1*, lo vea ascender de izquierda a derecha; la hélice será derecha o *dextrorsum* si el giro es el contrario.

La proyección horizontal de la curva, es la circunferencia base del cilindro. Para obtener la proyección vertical, basta recordar la *ley de generación de la curva*. Dividimos la base y el paso en el mismo número de partes iguales, ocho en la figura, y los puntos se refieren a la proyección vertical por medio de paralelas al eje hasta que corten a las correspondientes paralelas a la base que pasan por los puntos de división del paso.

El punto generador *1-1'*, al girar un ángulo de 360°/8 = 45°, asciende a la vez la octava parte del paso y se sitúa en la posición *2'-2"*, y así sucesivamente hasta llegar a la posición *1"* en la misma generatriz del punto *1-1'*.

Parte de la hélice se dibuja con línea de trazos, pues es oculta, ya que está por la parte de atrás del cilindro.

Si desarrollamos el cilindro abriéndole por la generatriz *1'-1"*, la transformada de la hélice en el desarrollo del cilindro es la diagonal del rectángulo cuyos lados son: base = $2\pi R$ y altura *1'-1"*. Según esto, la hélice es el camino más corto entre dos puntos de la superficie cilíndrica (Fig. 11).

Resaltamos la importancia de esta línea por su aplicación en los *helicoides de plano director* o de *cono director* que son las superficies de las roscas.

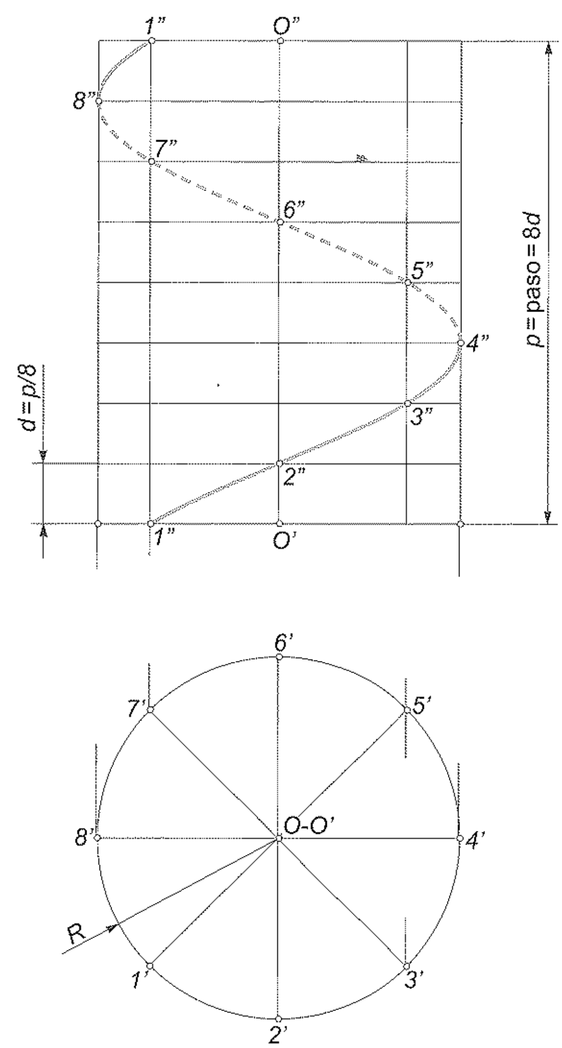


Fig. 12.

ACTIVIDADES

1. Dibujar a escala 1:1 los medios óvalos de la Fig. 10 con las cotas indicadas.

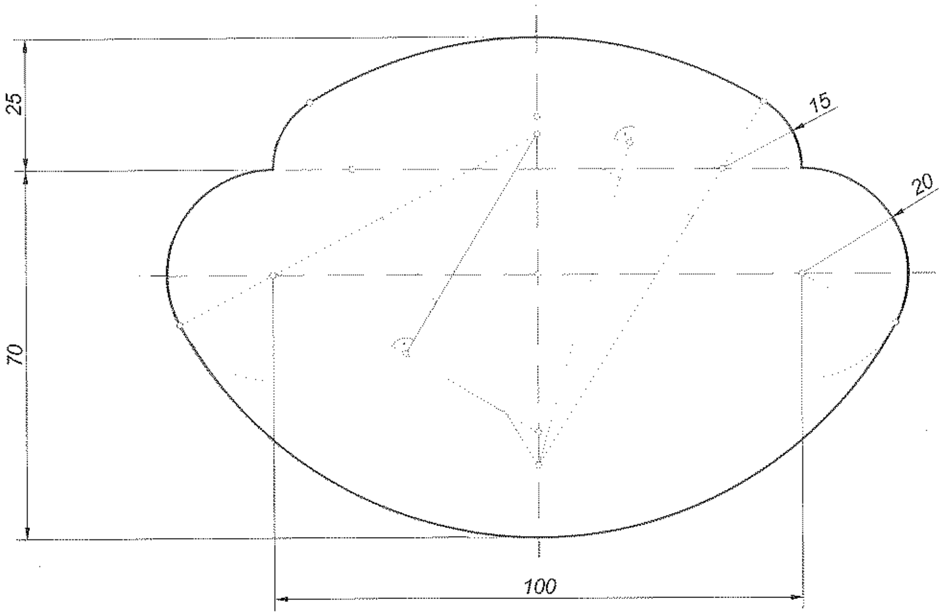


Fig. 13.

2. Dibujar a escala 1:1 el arco carpanel o medio óvalo conocidas las longitudes de sus ejes.

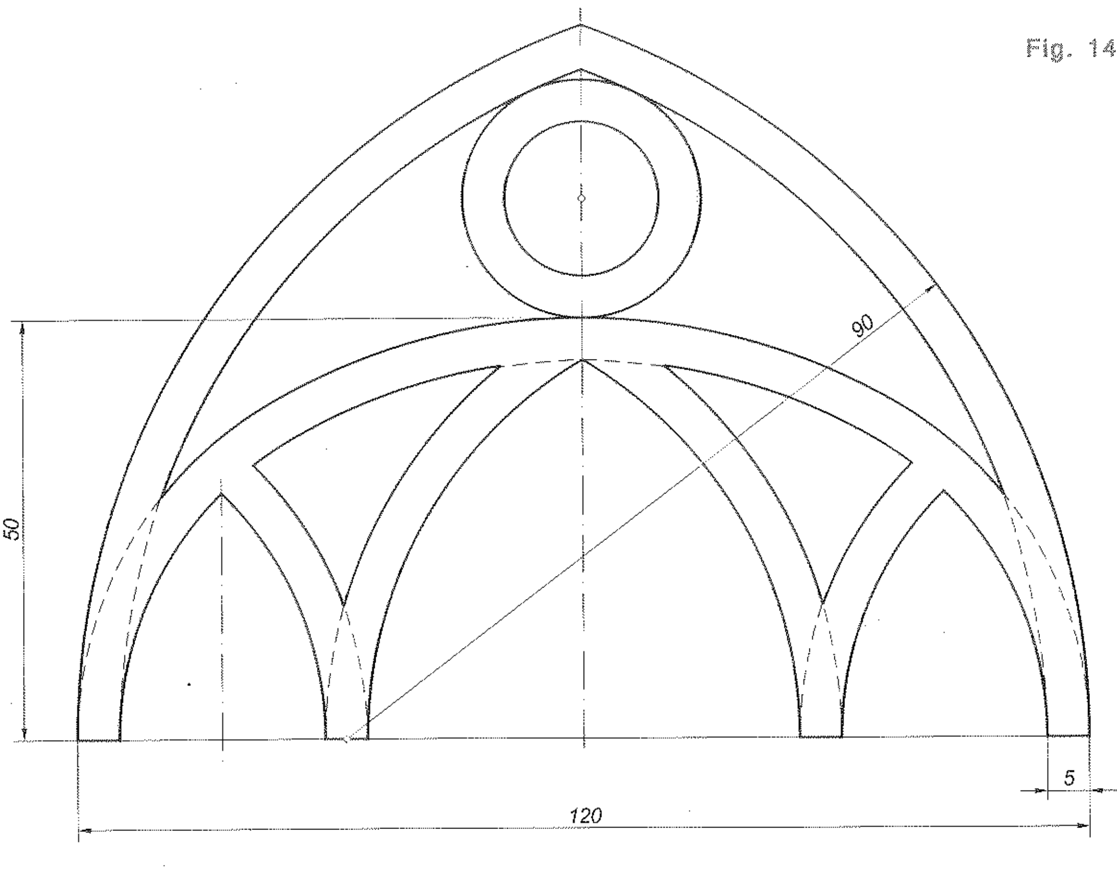


Fig. 14.

CURVAS CÓNICAS
Elipse, hipérbola y parábola. Definición y trazado

TEMA 10

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática se dará una explicación de las principales propiedades de estas cónicas: definición como lugar geométrico, ejes, diámetros conjugados, vértices, focos, simetrías que presentan, circunferencias focales, radios vectores, etc.

Se harán prácticas sobre la construcción de las curvas por puntos en diversos casos para que el alumno se acostumbre al empleo de las plantillas de curvas.

El profesor decidirá sobre la posibilidad de reducir el número de construcciones que se presentan o bien hacer su estudio con dibujos a mano alzada.

Al desarrollo de esta unidad temática se pueden dedicar cuatro clases.

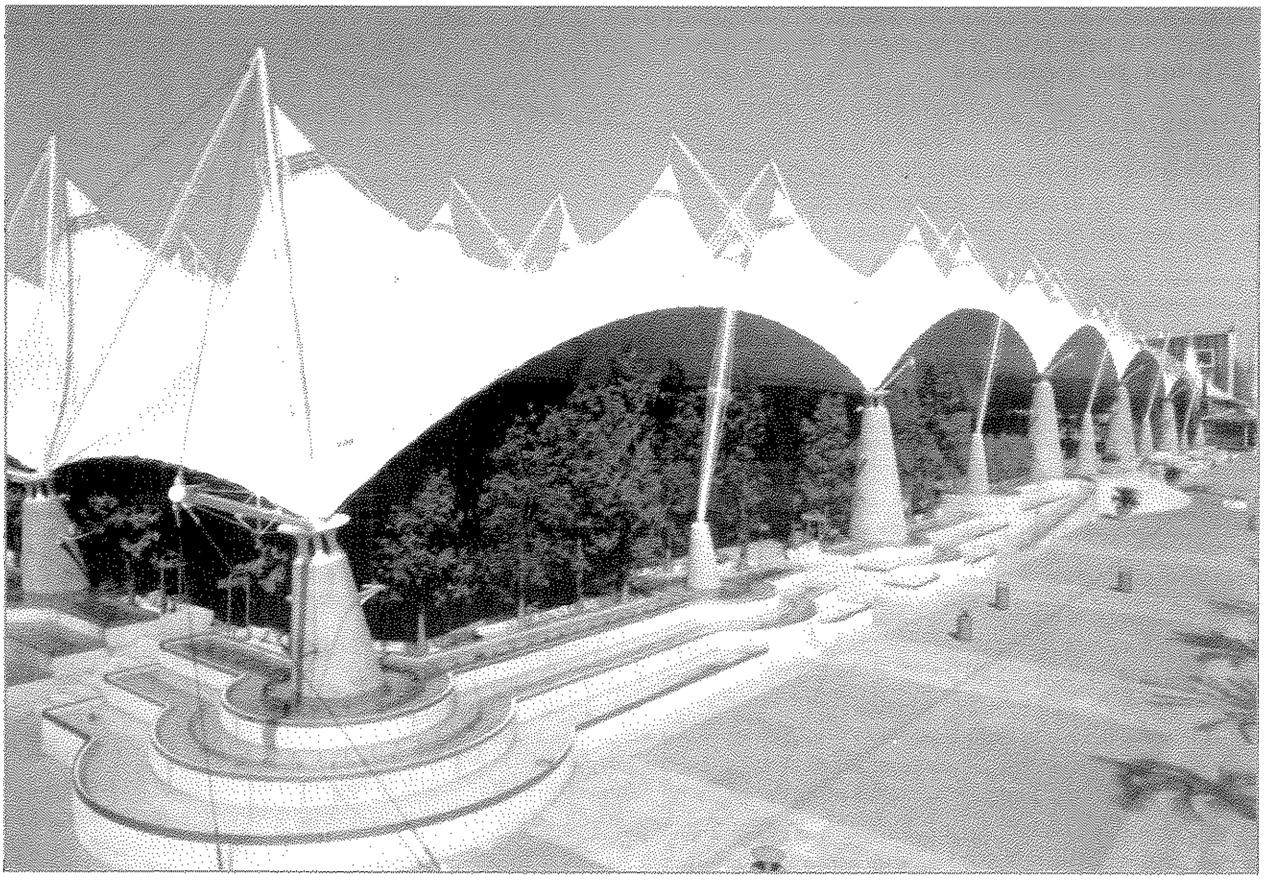


Fig. 1. Aplicaciones de las curvas técnicas en arquitectura.

Reciben el nombre de **cónicas** las curvas que resultan de la intersección de una superficie cónica por un plano.

1. Curvas cónicas

La superficie cónica de revolución está engendrada por una recta que gira alrededor de otra a la que corta. Esta segunda recta es el **eje** de la superficie y la recta que gira es la **generatriz**. El punto de intersección de ambas es el **vértice** de la superficie.

La recta s que gira alrededor del eje *e*, al que corta en el punto *V*, engendra una superficie de revolución (Fig. 2).

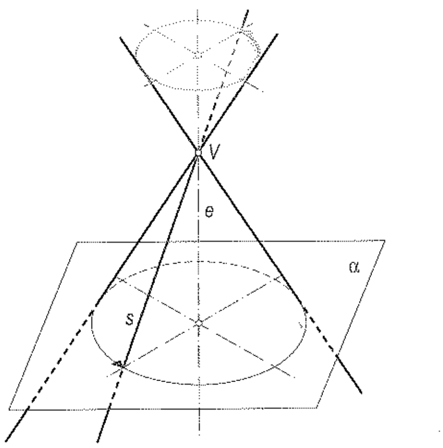


Fig. 2.

2. Clases de cónicas

La circunferencia (Fig. 3)

Si el plano secante a la superficie cónica de revolución es **perpendicular al eje de la misma** y no pasa por el vértice, la sección que se obtiene es **una circunferencia**.

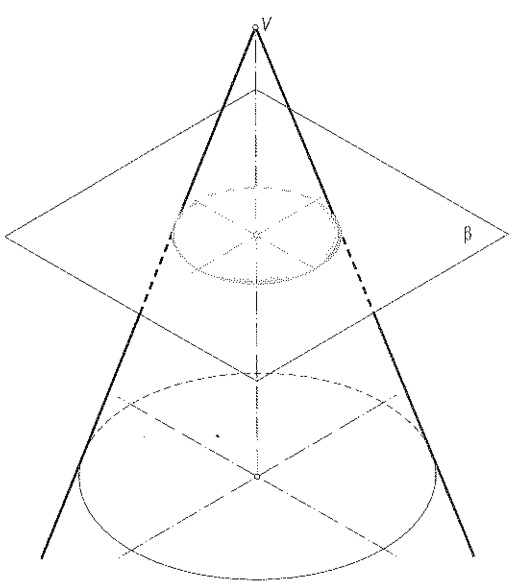


Fig. 3.

La elipse (Fig. 4)

Si el plano secante es **oblicuo al eje de la superficie cónica**, corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice, la sección que produce es una curva cerrada que recibe el nombre de **elipse**.

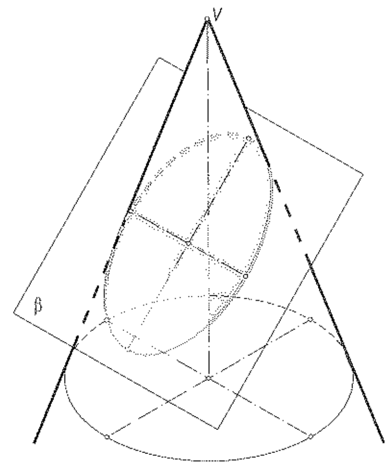


Fig. 4.

La hipérbola (Fig. 5)

Si el plano secante es **paralelo al eje de la superficie cónica** o es **paralelo a dos generatrices**, la sección es una curva abierta con dos ramas que se llama **hipérbola**. En este caso se considera la superficie cónica con dos ramas.

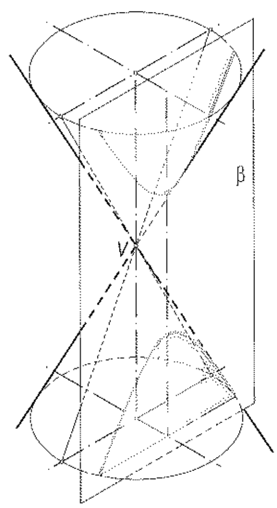


Fig. 5.

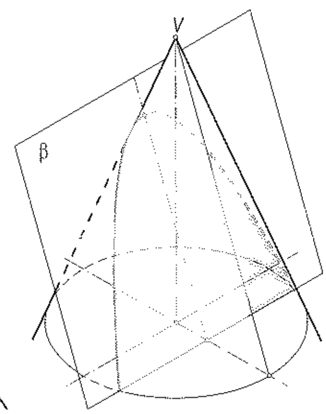


Fig. 6.

La parábola (Fig. 6)

Si el plano secante es **paralelo a una sola generatriz** de la superficie, la curva será abierta con un punto en el infinito; la sección que se produce es una **parábola**.

Cónica degenerada

Si el plano secante **pasa por el vértice de la superficie**, la sección obtenida es una **cónica degenerada** y puede ser **un punto, una recta o un par de rectas que se cortan** según que el plano secante tenga menor, igual o mayor inclinación que las generatrices de la superficie respecto a un plano perpendicular al eje.

3. La elipse. Definición, elementos y propiedades más importantes (Figs. 7 y 8)

Dado el carácter eminentemente gráfico de este estudio se indican solamente las propiedades más importantes de las cónicas.

La elipse es una curva cerrada y plana cuyos puntos constituyen un lugar geométrico que tiene la propiedad de que *la suma de distancias* de cada uno de sus puntos a otros dos, fijos, F y F', llamados **focos**, es constante e igual a $2a$, siendo $2a$ la longitud del eje mayor $\overline{AB}$ de la elipse (Fig. 7).

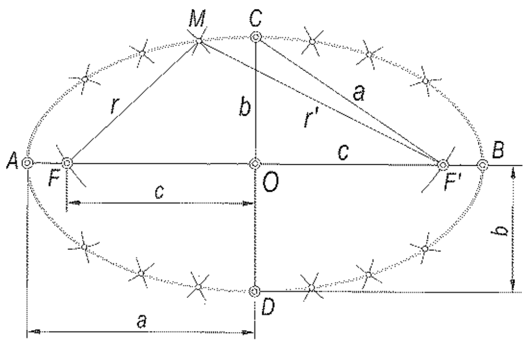


Fig. 7.

Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio O, centro de la curva. El **eje mayor** $\overline{AB}$ se llama **eje real** y se representa por $2a$. El **eje menor** $\overline{CD}$ se representa por $2b$. Los focos están en el eje real. La **distancia focal** F-F' se representa por $2c$.

Entre a, b y c existe la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

La elipse es simétrica respecto de los dos ejes y, por tanto, respecto del centro O. Las rectas que unen un punto M de la curva con los focos se llaman **radios vectores** r y r' y por la definición se verifica:

$$r + r' = 2a$$

La **circunferencia principal** C_p de la elipse es la que tiene por centro el de la elipse y radio a. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes (Fig. 8). Las **circunferencias focales** C_f y $C_{f'}$ de la elipse tienen por centro uno de los focos y radio $2a$.

La elipse se puede definir también como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

Si tenemos un diámetro de la elipse, el **diámetro conjugado** con él es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas al primero. Los ejes son dos diámetros conjugados y los únicos que son perpendiculares. En la circunferencia todas las parejas de diámetros conjugados son perpendiculares (Fig. 14).

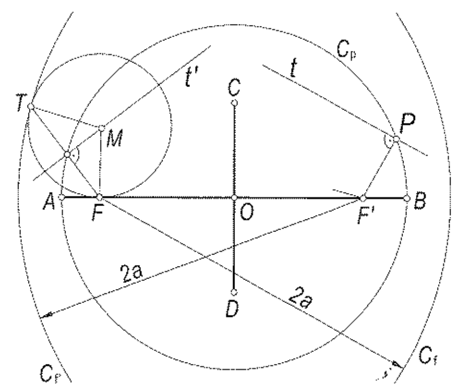


Fig. 8.

4. Construcción de la elipse por puntos a partir de los ejes (Fig. 9)

Se conocen los ejes $\overline{AB} = 2a$ y $\overline{CD} = 2b$. Con centro en C o D y radio a, se corta el eje mayor en F y F', focos de la curva.

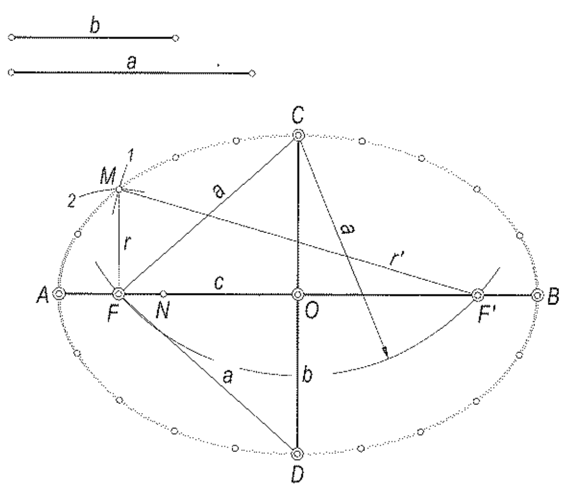


Fig. 9.

Se toma un punto N cualquiera en el eje mayor; con radio $\overline{AN}$ y centro en F se traza el arco 2 y con radio $\overline{NB}$ y centro en F' se traza el arco l; estos dos arcos se cortan en el punto M de la elipse. De esta forma, la suma de las distancias de M a F y F' es igual a $\overline{AB} = \overline{AN} + \overline{NB} = 2a$. Repitiendo esta operación y tomando otros puntos en el eje mayor entre F y F' se van determinando puntos de la curva, que se unen con plantilla.

5. Trazado de la elipse por haces proyectivos a partir de los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ (Fig. 10)

Se construye el rectángulo *OAEC* y se dividen los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{AE}$ en el mismo número de partes iguales, cinco en la figura. Los rayos *C1*, *C2*, *C3* y *C4* se cortan respectivamente con los rayos *D1*, *D2*, *D3* y *D4* en puntos de la elipse.

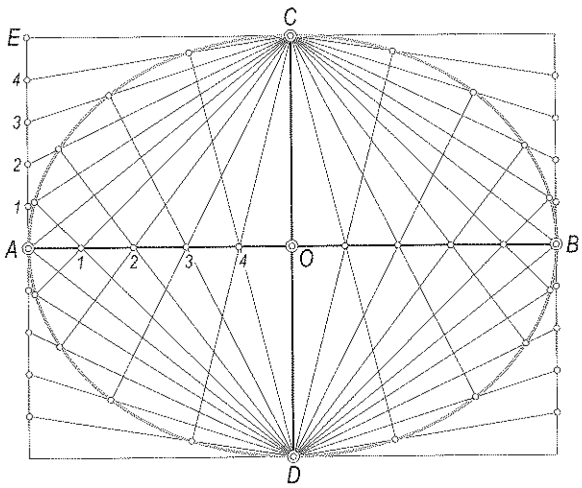


Fig. 10.

6. Trazado de la elipse por haces proyectivos a partir de una pareja de diámetros conjugados $\overline{A'B'}$ y $\overline{C'D'}$ (Fig. 11)

Se opera como en la Fig. 10. En este caso, el rectángulo se transforma en el romboide *O'A'E'C'* formado por las tangentes a la elipse en los extremos de los diámetros conjugados y que son paralelas a ellos.

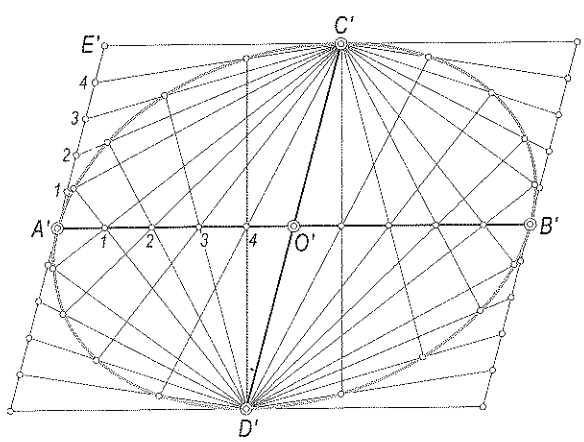


Fig. 11.

7. Trazado de la elipse por envolventes (Fig. 12)

Esta construcción se funda en que la circunferencia principal de diámetro *2a* y centro *O* es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por cada foco a las tangentes. Las envolventes son, pues, las tangentes.

Por ejemplo, se toma un punto cualquiera *L* de la circunferencia principal, se une con *F* y se traza la perpendicular *t* por *L* a $\overline{FL}$; la recta *t* es tangente a la elipse; repitiendo esta operación se tienen una serie de tangentes que van envolviendo la curva.

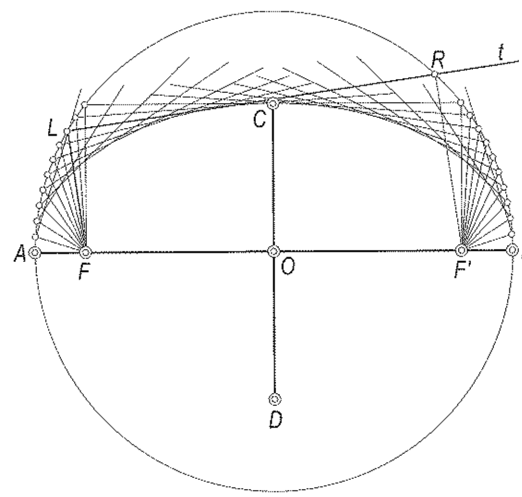


Fig. 12.

8. Trazado de la elipse por puntos mediante la circunferencia principal y la de diámetro *2b* (Fig. 13)

Se traza un radio cualquiera que corta en *R'* y *R''* a las dos circunferencias; por *R'* se traza la paralela a $\overline{AB}$ y por *R''*, la paralela a $\overline{CD}$, que se corta con la anterior en el punto *R* de la elipse. En la figura se repite esta operación numerosas veces.

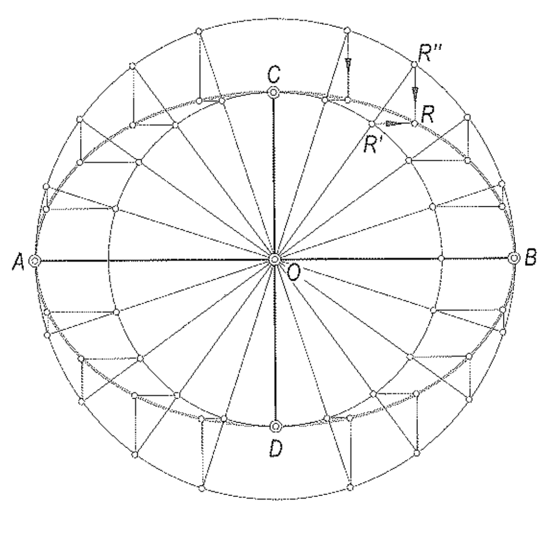


Fig. 13.

9. Otra construcción de la elipse a partir de una pareja de diámetros conjugados (Fig. 14)

Se conocen los diámetros conjugados $A'B'$ y $C'D'$; se traza la circunferencia de diámetro $A'B'$; la perpendicular por O a $A'B'$ corta en D_1 a la circunferencia. Los puntos de la elipse se obtienen construyendo triángulos semejantes al OD_1D', tales como el MNP, de lados paralelos a los del triángulo OD_1D'.

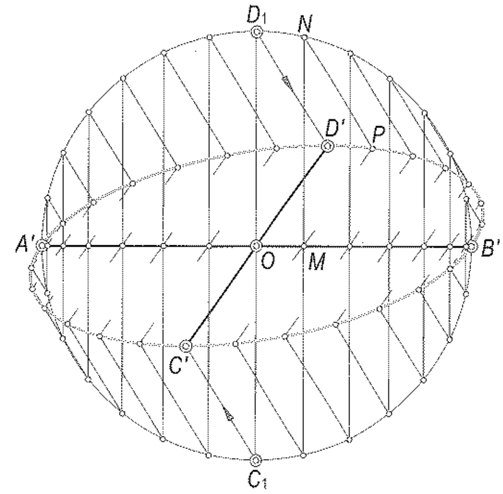


Fig. 14.

LA HIPÉRBOLA

10. La hipérbola. Definición, elementos y propiedades más importantes (Fig. 15)

La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas; se define como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos fijos es constante e igual a $2a$, siendo $2a = \overline{AB}$ la longitud del eje real. Los puntos fijos son los focos F y F'.

La hipérbola, como la elipse, se puede definir como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio O, centro de la curva. El eje $\overline{AB}$ se llama **eje real** y se representa por $2a$; el eje CD se representa por $2b$ y se llama **imaginario** porque no tiene puntos comunes con la curva. Los focos están en el eje real. La distancia focal F-F' se representa por $2c$.

Entre a, b y c existe la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

Las asíntotas de la hipérbola son las tangentes a la curva en los puntos del infinito. Estas asíntotas son simétricas respecto de los ejes y pasan por el centro de la curva.

La hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes y, por lo tanto, respecto del centro O. Las rectas que unen un punto M de la curva con los dos focos se llaman **radios vectores** r y r' y por la definición se verifica:

$$r - r' = 2a$$

La **circunferencia principal** de la hipérbola es la que tiene por centro O y radio a. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes. Las **circunferencias focales** tienen por centros los focos y radio $2a$.

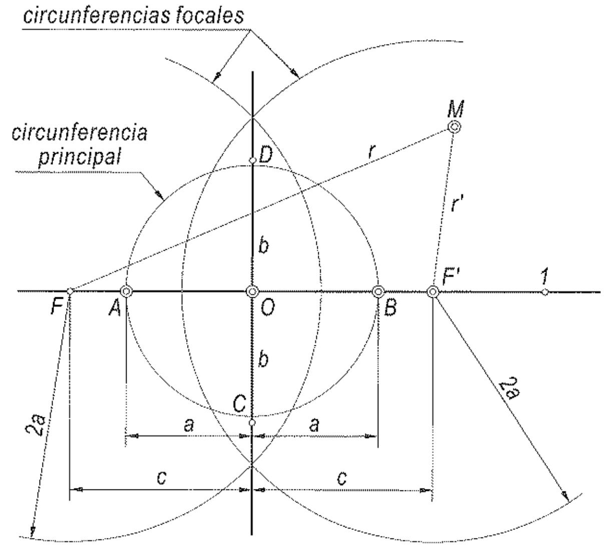


Fig. 15.

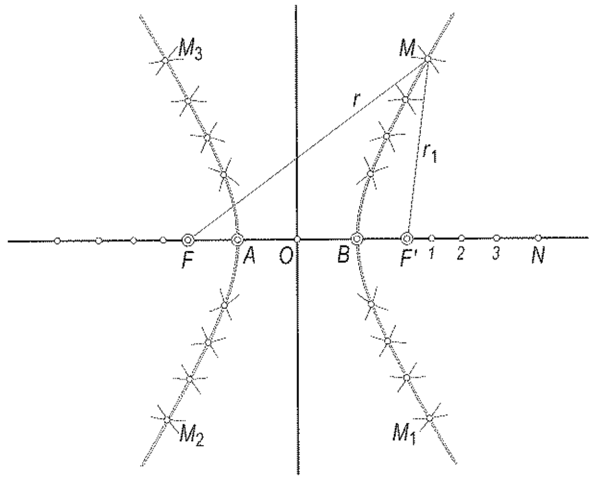


Fig. 16.

11. Construcción de la hipérbola por puntos a partir de los ejes (Fig. 16)

Los datos son $2a = \overline{AB}$ y $2c = \overline{FF'}$. Se toma un punto N en el eje real $\overline{AB}$ y con radios $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$ y centros en F y F' se trazan dos arcos que se cortan en M, punto de la hipérbola; de esta forma, $\overline{MF} - \overline{MF'} = 2a = \overline{AB}$. En la figura se obtienen otros puntos de la curva tomando los puntos *1*, *2* y *3* del eje real.

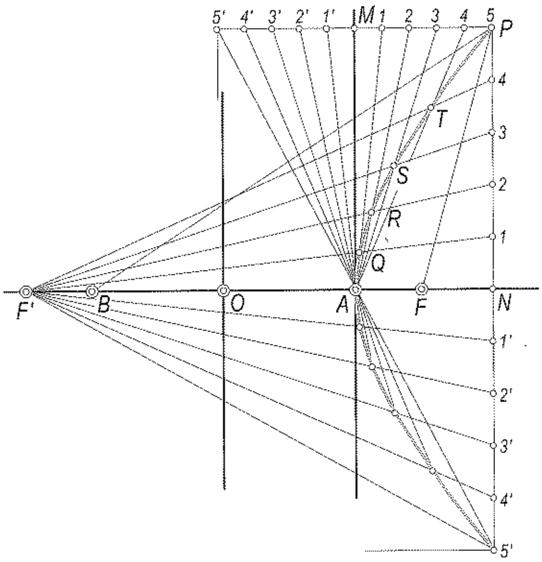


Fig. 17.

12. Construcción de la hipérbola por haces proyectivos (Fig. 17)

Se conocen $2a = \overline{AB}$ y $2c = \overline{FF'}$; se halla un punto cualquiera P de la curva y se construye el rectángulo $AMPN$; se dividen los lados $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$ en un número cualquiera de partes iguales que se unen con los puntos A y F', respectivamente. Los puntos de intersección de los rayos homónimos u homólogos de estos dos haces son puntos de la hipérbola. Así, $\overline{F'\text{-}4}$ y $\overline{A\text{-}4}$ se cortan en el punto T de la curva; de la misma forma se construye la parte inferior de la curva.

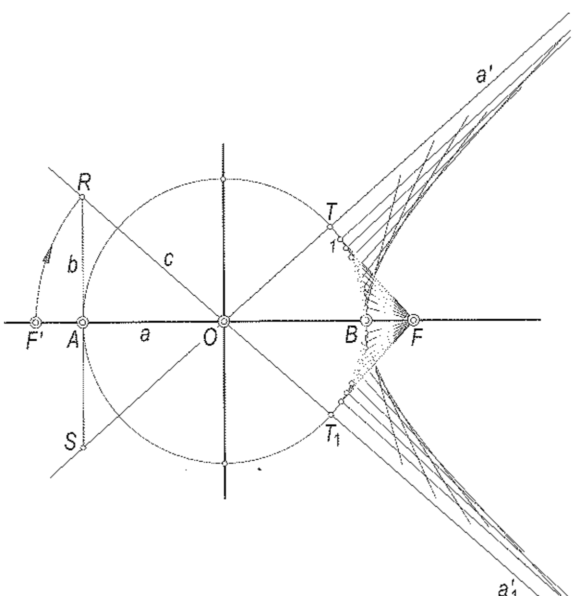


Fig. 18.

13. Trazado de la hipérbola por envolventes (Fig. 18)

Se conocen los vértices A y B y los focos F y F'; se construye la circunferencia principal de centro O y radio $a = \overline{OA} = \overline{OB}$. Al igual que en la elipse, basta tomar puntos en la circunferencia principal, unirles con F y trazar las correspondientes perpendiculares, que son tangentes a la curva. En la figura sólo está trazada una rama.

Las asíntotas a' y a'_1 de la hipérbola son tangentes a ella en el infinito, son simétricas respecto de los ejes y pasan por el centro O y por el vértice R y su simétrico S del triángulo cuyos catetos son a y b y la hipotenusa c.

14. La parábola. Definición, elementos y propiedades más importantes (Fig. 19)

La parábola es una curva plana, abierta y de una rama. Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado **foco**, y de una recta fija d, llamada **directriz**. Tiene un **vértice** V y un **eje de simetría** que pasa por V y por el foco y es perpendicular a la directriz. La tangente en el vértice a la curva es paralela a la directriz.

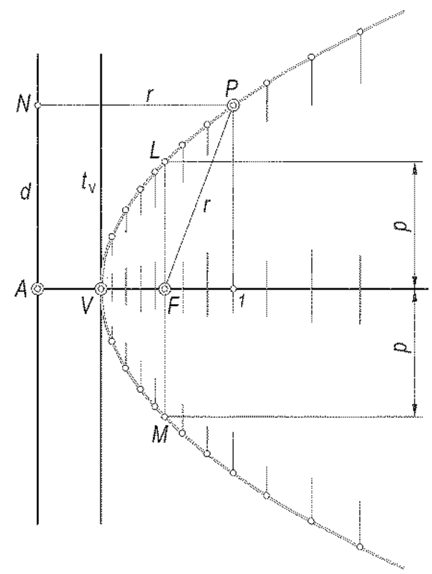


Fig. 19.

El vértice, como otro punto cualquiera, equidista de la directriz y del foco, es decir, $\overline{VA} = \overline{VF} = p/2$. Los radios vectores del punto P son $\overline{PN}$ y $\overline{PF}$.

Se llama **parámetro** $2p$ de la parábola, al igual que en la elipse y en la hipérbola, a la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje en el foco.

La **directriz** d de la curva hace de **circunferencia focal** de la parábola, en este caso de radio infinito. Según esto, la directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de cada tangente.

La **tangente en el vértice**, que es una recta, hace de **circunferencia principal** y se define como en las curvas anteriores.

El foco equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde ésta corta al eje de la curva.

15. Construcción de la parábola por puntos (Fig. 19)

Se conocen la directriz d, el eje y el foco. El vértice V es el punto medio del segmento $\overline{AF}$. Se traza por un punto 1 del eje la perpendicular a éste y con centro en F y radio $\overline{A\text{-}1} = r$ se corta a dicha perpendicular, con lo cual se obtienen el punto P y su simétrico, que son puntos de la curva; se tiene así $r = \overline{PF} = \overline{PN}$, según la definición de la curva; esta operación se repite para obtener nuevos puntos, que se unen con plantilla de curvas.

16. Construcción de la parábola dados el eje, el vértice y un punto de la curva (Fig. 20)

Se trazan la tangente en el vértice, $\overline{VN}$, y la paralela $\overline{PN}$ al eje; se dividen $\overline{PN}$ y $\overline{VN}$ en un número de partes iguales; el rayo $\overline{V\text{-}5}$ y la paralela por 5 al eje se cortan en el punto M de la curva; de la misma forma se han obtenido otros puntos de la curva.

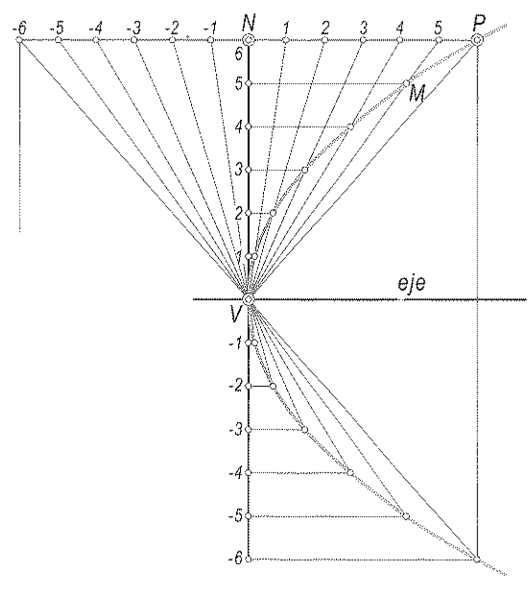


Fig. 20.

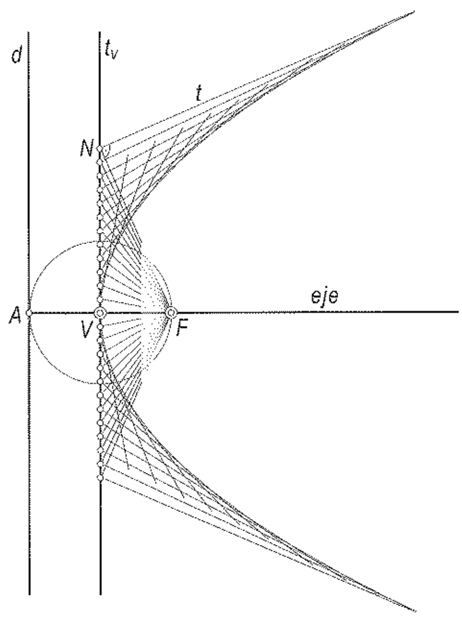


Fig. 21.

17. Construcción de la parábola por envolventes (Fig. 21)

Sabiendo que la tangente t_v en el vértice es la circunferencia principal de la curva, basta, como en la elipse, tomar puntos de ella, tal como el N, unirlo con el foco F y por N trazar la perpendicular a $\overline{FN}$; esta recta t es tangente a la curva. Repitiendo esta operación se obtienen rectas tangentes que envuelven a la curva y que a la vez la van construyendo.

ACTIVIDADES

1. Se da una elipse por su eje mayor $2a = 80$ mm y su eje menor $2b = 50$ mm. Se pide:
   - Determinar un punto A de la curva.
   - Dibujar un cuadrante de la curva por puntos aplicando su definición.
   - Dibujar otro cuadrante de la curva por medio de haces proyectivos.
   - Dibujar otro cuadrante de la curva por medio de envolventes.

2. Construir la elipse por cuatro procedimientos diferentes sabiendo que sus datos son: $a = 50$ mm y $c = 40$ mm.

3. Construir un cuadrante de elipse siendo los datos de la curva $b = 40$ mm y $c = 60$ mm.

4. Una hipérbola está definida por $2a = 20$ mm y $2c = 50$ mm. Se pide:
   - Determinar un punto P cualquiera de la curva.
   - Dibujar la curva por tres procedimientos diferentes.
   - Dibujar las asíntotas.

5. Dibujar por haces proyectivos la hipérbola cuyos datos son: $b = 40$ mm y $c = 45$ mm.

6. En una parábola el foco está a 15 mm del vértice V. Se pide:
   - Hallar la directriz.
   - Dibujar la tangente en el vértice.
   - Trazar los radios vectores de un punto de ella.
   - Obtener un punto de la curva.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
Fundamentos y características más importantes de cada uno de ellos

TEMA 11

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática el alumno debe conocer los dos tipos de proyecciones: paralela o cilíndrica y cónica o central. Dentro del primer tipo, hay que distinguir entre proyección ortogonal y proyección oblicua.

Seguidamente, debe conocer los cinco principales sistemas de representación, el tipo de proyección que utilizan y si se hacen sobre uno o varios planos.

Finalmente se le indicarán las aplicaciones prácticas de cada uno de ellos, bien sea en planos industriales o "dibujos de taller", en topografía, en diseño, en arquitectura, etc.

La actividad de esta unidad temática se realizará a lo largo del estudio de cada uno de los sistemas que se explican en los temas siguientes.

La dedicación de una clase debe ser suficiente para que el alumno adquiera una idea clara de los conceptos expuestos.

1. Definición

La Geometría Descriptiva es la parte de la geometría que tiene por objeto la representación de cuerpos mediante proyecciones planas. Por medio de estas proyecciones se ejecutan construcciones para muy diversos fines. Estos fines pueden ser, por ejemplo:

- La obtención de elementos geométricos.
- La determinación de verdaderas magnitudes de segmentos, ángulos o superficies.
- La determinación de secciones planas de cuerpos.
- La obtención del desarrollo de superficies.
- La determinación de líneas de intersección de superficies.
- La obtención de las sombras propia y arrojada que se producen al iluminar un cuerpo, etc.

La geometría descriptiva es una ciencia de aplicación. El primer tratado científico sobre ella es debido a Monge (1746-1818), que lo publicó en 1798. Según este científico, el problema fundamental de la geometría descriptiva es "***reducir las construcciones del espacio a construcciones en el plano***".

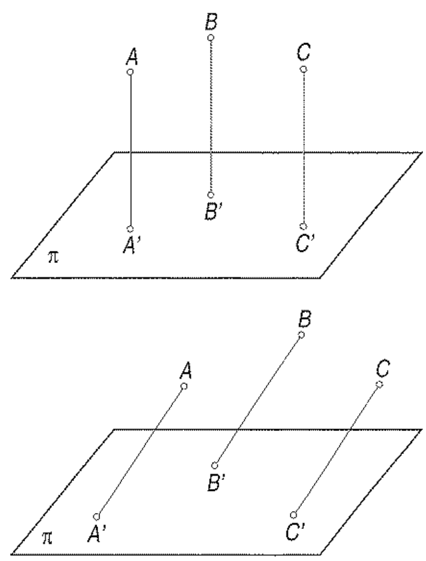
2. Sistemas de proyección

Los sistemas de proyección de los que se vale la geometría descriptiva son dos:

- **Proyección paralela o cilíndrica** (Figs. 1 y 2)

En este sistema de proyección las rectas o rayos proyectantes son paralelas y según sean perpendiculares u oblicuas al plano de proyección tendremos a su vez dos tipos de proyecciones:

- **Proyección paralela ortogonal** (Fig. 1).
- **Proyección paralela oblicua** (Fig. 2).



Figs. 1 y 2.

- **Proyección central o cónica** (Fig. 3)

  En este sistema de proyección las rectas o rayos proyectantes parten de un punto propio *V*, que es el punto de vista u ojo del observador.

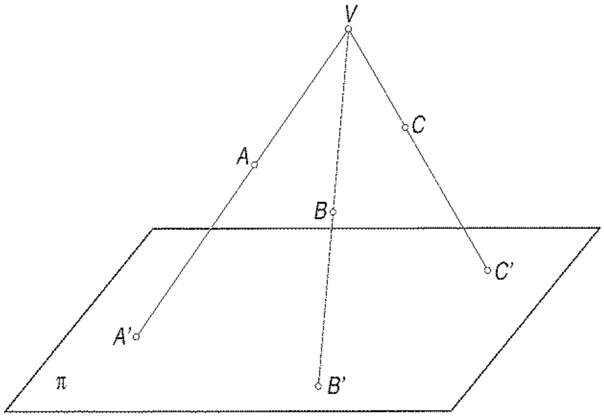


Fig. 3.

Los diversos sistemas de representación de la geometría descriptiva utilizan el siguiente sistema de proyección:

- **Sistema diédrico**: proyección paralela ortogonal.
- **Sistema de planos acotados**: proyección paralela ortogonal.
- **Sistema axonométrico**: proyección paralela ortogonal.
- **Sistema de perspectiva caballera**: proyección paralela oblicua.
- **Sistema de perspectiva cónica**: proyección central o cónica.

3. Sistema diédrico

Es el sistema que utiliza la proyección cilíndrica ortogonal sobre dos planos perpendiculares.

Las representaciones que se obtienen corresponden a los "dibujos de taller" por estar realizados en este sistema los planos industriales.

Este sistema tiene el inconveniente de que las caras perpendiculares a los planos de proyección (caras o planos de perfiles) se proyectan según una recta, por lo que no puede apreciarse su forma. Por ejemplo, las proyecciones de un cubo sobre los planos de proyección nos darían "la planta" y el "alzado" de la Fig. 4. Pero esto no basta para definir el cubo; hay muchos cuerpos que darían también estas proyecciones. Existe, pues, una indeterminación en las caras de perfil y esto se resuelve haciendo una nueva proyección sobre un tercer plano perpendicular a los anteriores. Obtenemos así una nueva proyección o "vista" llamada "perfil" y ahora sí podemos afirmar que el cuerpo representado es un cubo.

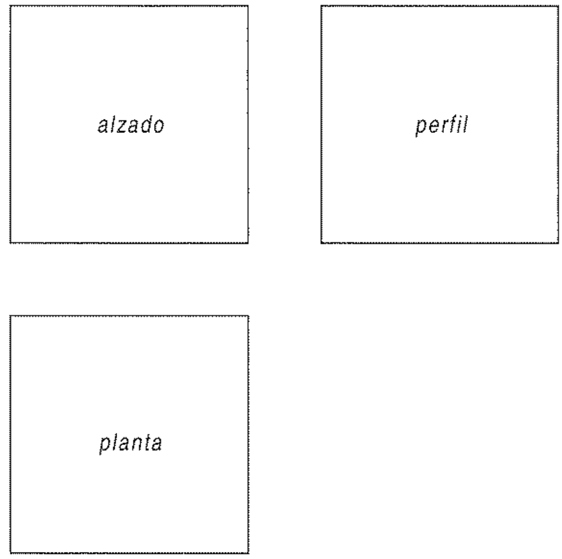


Fig. 4.

Cuando el cuerpo que se desea representar es complejo, se le supone inscrito en un paralelepípedo rectángulo y podemos obtener las proyecciones sobre las seis caras del mismo.

En el tema 16 se estudia la disposición de las seis "proyecciones" o "vistas" que podemos obtener al representar un cuerpo en "diédrico" o "dibujo de taller".

4. Sistema de planos acotados

Este sistema utiliza también el sistema de proyección cilíndrica ortogonal, pero **sobre un solo plano de proyección**, indicando las cotas, o alturas sobre este plano, de los diversos puntos.

Así, un cubo cuya arista es de 4 cm. y que tiene dos caras paralelas al plano de proyección se representa como indica la Fig. 5. La cara inferior *A-B-C-D* tiene una cota de 3 cm. y así se indica en cada vértice. La cara superior *E-F-G-H*, superpuesta con ella en proyección, tiene de cota 3 + 4 = 7 cm. y así se indica en cada vértice.

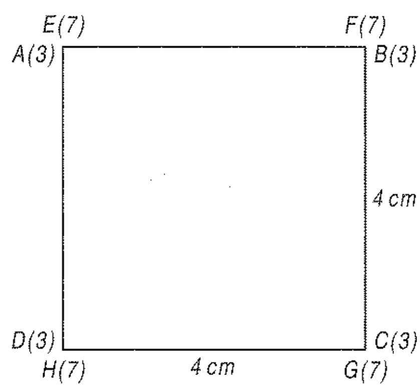


Fig. 5.

Este sistema permite, como cualquier otro, resolver problemas de todo tipo en el espacio. Sin embargo, su aplicación real es la representación de la superficie terrestre. La topografía utiliza este sistema para la ejecución de los planos topográficos.

Dado que la superficie terrestre es irregular, para representarla, la suponemos seccionada por una serie de planos paralelos acotados (de aquí el nombre del sistema), que producen unas líneas de sección llamadas "**curvas de nivel**", que se indican por la cota del plano que las produce (Fig. 6).

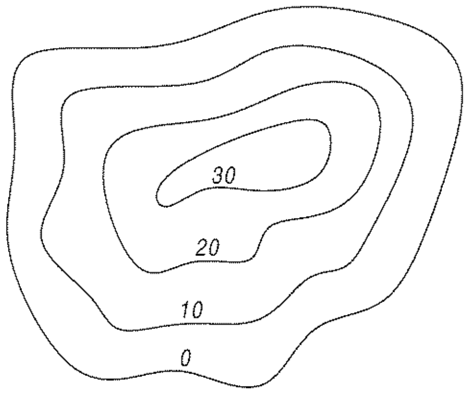


Fig. 6.

La forma de las curvas de nivel, su separación mayor o menor, la graduación de ellas hacia fuera o hacia dentro, etc., nos permiten conocer con exactitud el relieve del terreno y hacer todo tipo de operaciones en estos planos. Se pueden dar perfiles transversales y longitudinales, trazar vías de comunicación, calcular desmontes y terraplenes, etc. Si a los accidentes naturales del terreno agregamos, por medio de símbolos normalizados, los accidentes artificiales hechos por la mano del hombre, tendremos un plano topográfico completo. Estos planos incluyen unos u otros datos según sea el destino de los mismos.

5. Sistema axonométrico

Este sistema utiliza también la proyección cilíndrica ortogonal.

Dado un cuerpo, se proyecta ortogonalmente sobre un triedro trirrectángulo y, a su vez, el cuerpo y las tres proyecciones obtenidas se proyectan ortogonalmente sobre un plano de proyección, que no puede ni ser uno de los del triedro ni pasar por un eje del mismo.

Este es un sistema de perspectiva, dado que permite representar el cuerpo mediante una sola vista.

La Fig. 7 representa un cubo en este sistema. Como las tres aristas *AB*, *AD* y *AE* son oblicuas al plano de proyección, en el dibujo aparecen deformadas, es decir, reducidas.

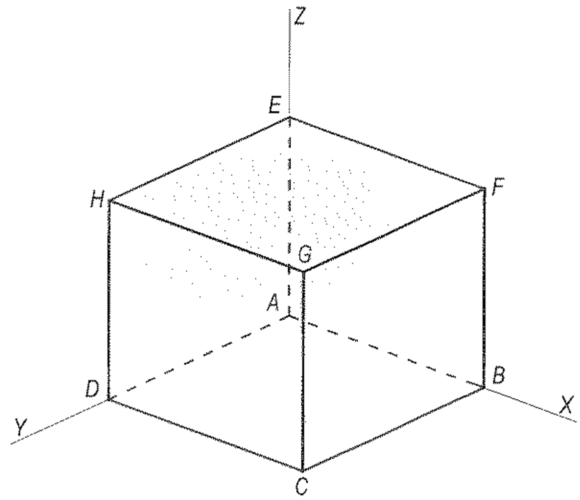


Fig. 7.

Según que la inclinación de las direcciones de los ejes sobre el plano de proyección sea igual para los tres o diferente, se tienen tres sistemas axonométricos: isométrico, dimétrico y trimétrico.

En la práctica se utiliza sobre todo el sistema isométrico por ser el más rápido. En este caso, el cubo se proyectaría como indica la Fig. 8.

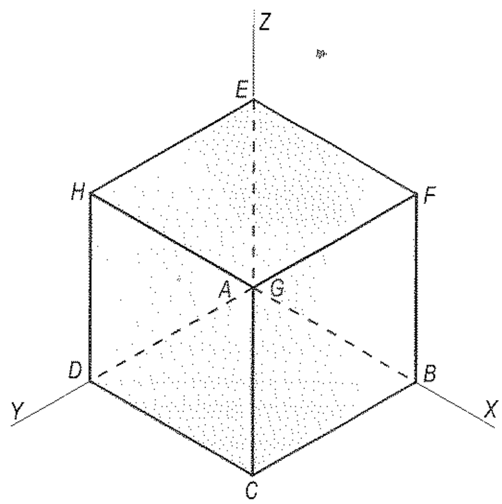


Fig. 8.

6. Sistema de perspectiva caballera

Este sistema es el único que emplea la proyección cilíndrica oblicua.

Dado el cuerpo, se proyecta primero ortogonalmente sobre un triedro trirrectángulo y, luego, el cuerpo y las tres proyecciones obtenidas se proyectan oblicuamente, según una dirección elegida, sobre un plano de proyección que es paralelo a uno de los del triedro. Según esto, todo lo que sea paralelo a este plano aparecerá sin deformarse en proyección. Dos ejes, en proyección, forman ángulo recto, detalle muy importante que no ocurría en el sistema axonométrico.

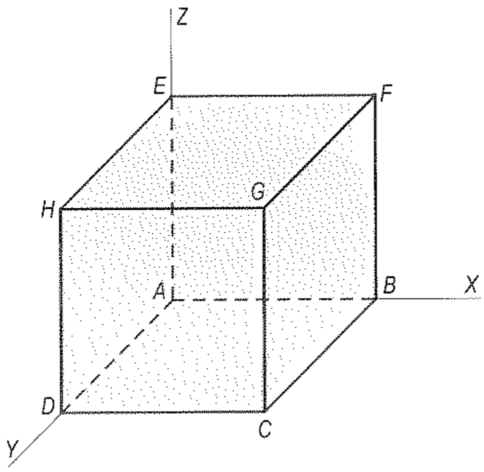


Fig. 9.

En la Fig. 9 se representa un cubo en perspectiva caballera. Se aprecia que las caras *ABFE* y *DCGH* son cuadrados, que aparecen sin deformar por ser paralelas sus caras al plano de proyección o del dibujo. Sin embargo, las aristas en profundidad *AD*, *BC*, *EH* y *FG* aparecen reducidas, reducción que dependerá del ángulo que forme la dirección de proyección con el plano del dibujo.

En este sistema no hay más que un coeficiente de reducción para las rectas paralelas al tercer eje, llamado eje *Y*.

Este sistema se llama también "**perspectiva rápida**" dada la simplificación que supone que las circunferencias situadas en planos paralelos al de proyección se proyecten según circunferencias.

Tanto el sistema axonométrico como el de caballera proporcionan perspectivas irreales, es decir, no como ve los objetos el ojo humano. Como de lo que se trata es de poner de manifiesto todos los detalles en una sola vista y que lo pueda interpretar incluso un profano, ambos sistemas se utilizan habitualmente.

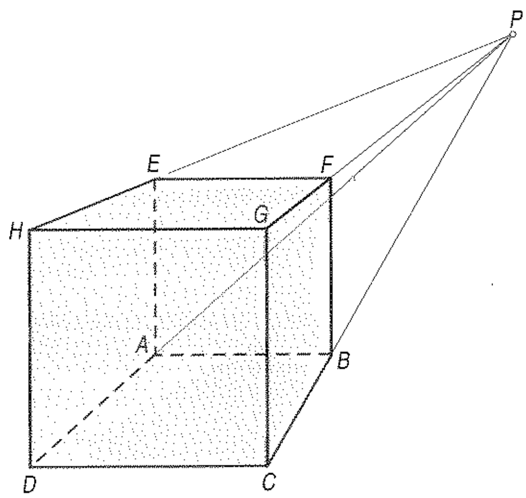


Fig. 10.

7. Sistema de perspectiva cónica

Este sistema utiliza la proyección central o cónica. Se trata de la proyección de un cuerpo sobre un plano desde un punto de vista que hace de ojo del observador.

Las perspectivas obtenidas en este sistema son las más reales pues resultan como lo que vería un ser humano con visión monocular.

En este sistema las rectas que son paralelas en el espacio y que no lo son al plano de proyección o "cuadro" convergen o "fugan" en un punto que es el punto de fuga *P* de todas las paralelas entre sí. En la Fig. 10 se representa un cubo en cónico en la posición más sencilla.

ACTIVIDADES

Como actividad de esta unidad temática el alumno puede representar, a mano alzada, en los diversos sistemas indicados, objetos sencillos que estén a su alcance: un libro, el frasco de Tipp-Ex, un taburete, la mesa de dibujo, etc.

La mano del hombre con un portaminas (en este caso con mina blanda, HB) puede llegar a hacer maravillas en cuanto a dejar volar su imaginación y diseñar lo que desee. Estamos empezando, pero en el buen camino.

SISTEMA DIÉDRICO I
Representación del punto, la recta y el plano

TEMA 12

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática el alumno debe aprender a representar los tres elementos geométricos, punto, recta y plano, en las posiciones más sencillas y favorables respecto a los planos de proyección.

En cuanto al "punto", debe distinguir los conceptos de "cota" y "alejamiento" teniendo en cuenta sus signos y saber hallar las proyecciones de un punto cualquiera del espacio.

En cuanto a la "recta", debe saber poner un punto en ella, como primera operación de la geometría descriptiva, conocer lo que son las trazas de una recta y la forma de hallarlas y saber, a la vista de las proyecciones de dos rectas, si éstas se cortan o se cruzan. Finalmente se hará un estudio detallado de las proyecciones de una recta en diversas posiciones, **dedicando especial atención a las rectas de perfil** y a la forma de pasarlas a tercera proyección.

En lo referente al plano, saber lo que son sus trazas, situar primero una recta y luego un punto en un plano. A continuación debe aprender a situar en un plano una recta horizontal, una frontal, una línea de máxima pendiente y una de máxima inclinación. Finalmente debe saber representar planos en diversas posiciones, fijando especial atención en los planos proyectantes, horizontal y vertical.

La determinación de las proyecciones de una figura plana será el resumen final de la representación de los tres elementos geométricos.

Las actividades se centrarán en representar los tres elementos geométricos.

Esta unidad temática abarcará un mínimo de cuatro clases.

1. Fundamentos del sistema diédrico

El sistema diédrico es un sistema de proyecciones cilíndricas ortogonales. Está constituido por dos planos perpendiculares y sobre cada uno de ellos se hallan las proyecciones ortogonales del cuerpo o figura que se desea representar (Fig. 1).

Uno de los planos es ***horizontal*** y lo designaremos por ***plano H*** *o P.H.* El otro plano es ***vertical***, por ser paralelo a la dirección de la plomada; al que designaremos por ***plano V*** *o bien P.V.*

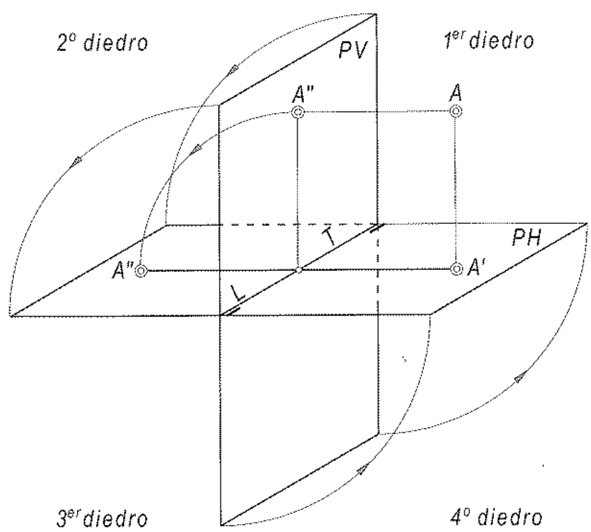


Fig. 1.

La intersección de estos dos planos es una recta que recibe el nombre de **línea de tierra** y que la designaremos abreviadamente por ***L.T.*** La línea de tierra se representa con dos trazos gruesos dibujados por debajo de ella y en sus extremos.

Los planos se consideran **ilimitados** y **opacos**.

La proyección de un punto, de una figura o de un cuerpo sobre el plano *H* se llama **proyección horizontal** o **planta**.

La proyección sobre el plano *V* se llama **proyección vertical** o **alzado**.

Los planos horizontal y vertical dividen el espacio en cuatro diedros rectos, es decir, de 90°. Cada uno de los planos de proyección queda dividido en dos semiplanos separados por la *L.T.* La parte del plano *H* situada por delante del plano *V*, es decir, en el primer diedro, es el plano **horizontal anterior**; el otro semiplano es el **horizontal posterior**. De la misma forma, el plano *V* queda dividido en dos semiplanos, **vertical superior** y **vertical inferior**.

Los diedros se llaman **primero**, **segundo**, **tercero** y **cuarto diedro**, cuyo orden y posición es la que indica la vista de perfil de la Fig. 3.

Los **planos bisectores** de estos diedros dividen al espacio en ocho diedros de 45°, que podemos llamar "octantes". El plano bisector del primero y del tercer diedro se llama **primer bisector** y el plano bisector del segundo y cuarto diedro se llama **segundo bisector**.

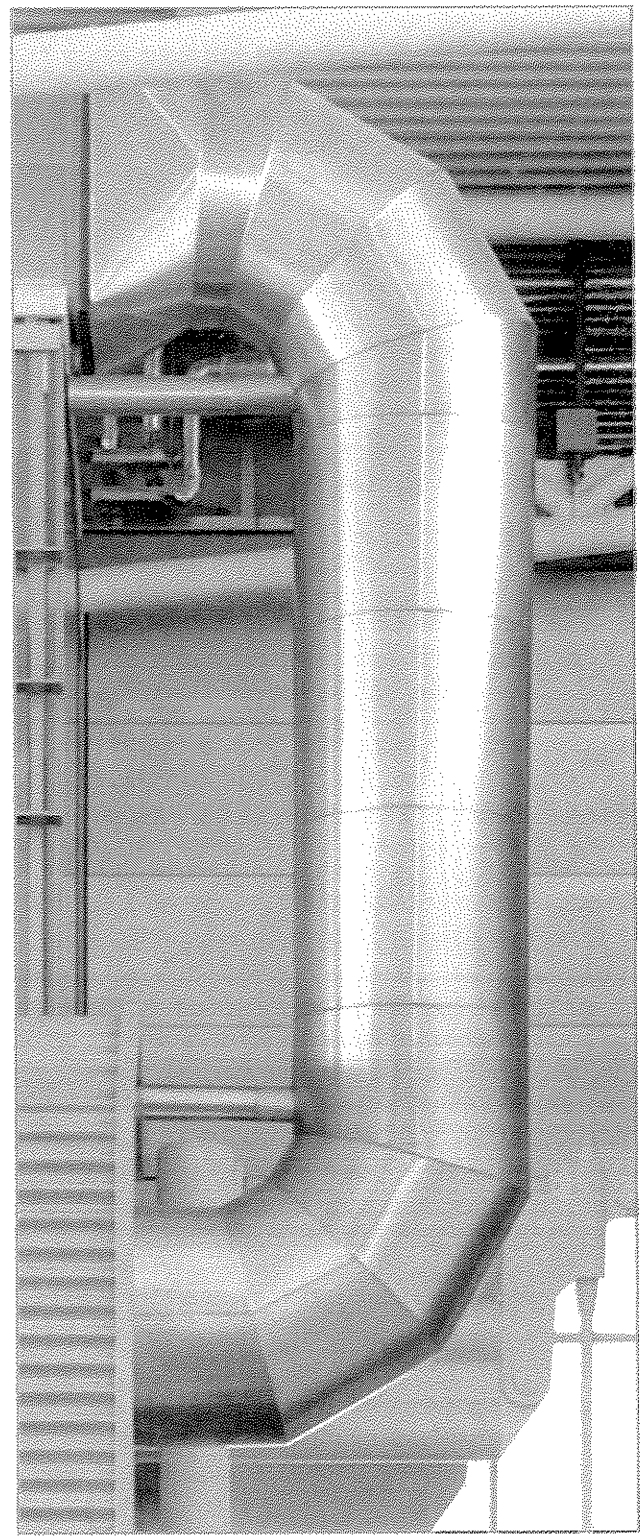


Fig. 2. Una de las aplicaciones de la geometría descriptiva es la calderería.

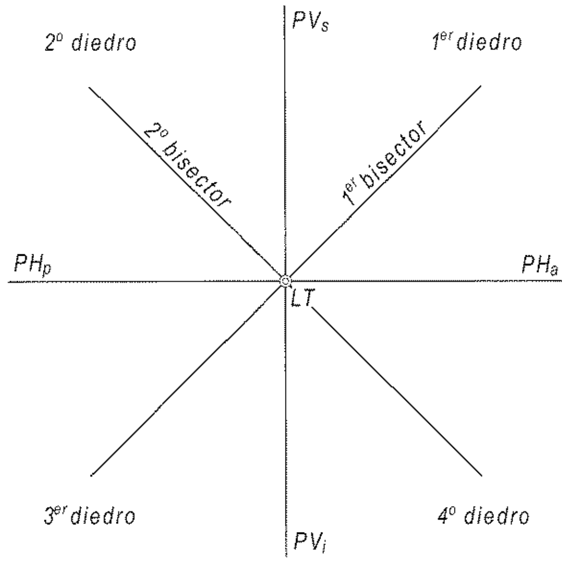


Fig. 3.

Estos son los elementos del sistema diédrico. Supongamos ahora un punto *A* del espacio, en el primer diedro. Para representarlo en el sistema se proyecta ortogonalmente sobre el plano *H* en *A'* y sobre el plano *V* en *A''*. Los puntos *A'* y *A''* son las dos proyecciones del punto *A*. Si se conocen los puntos *A'* y *A''*, para hallar el punto *A* del espacio, del cual son proyecciones, basta trazar por *A'* la perpendicular al plano *H* y por *A''*, la perpendicular al plano *V*; estas perpendiculares se cortan en el punto *A* del espacio (Fig. 1).

Quiere decir lo expuesto que un punto tiene sólo dos proyecciones y que éstas sólo pueden serlo de un punto del espacio. Esta **reversibilidad** es la propiedad principal de todo sistema de representación.

Un sistema de representación, para estar definido, ha de ser reversible, es decir, a partir de las proyecciones se puede saber la posición del cuerpo o elemento proyectado.

Para poder representar el conjunto del espacio de la Fig. 1 sobre el papel del dibujo, se abate el plano *V*, alrededor de la *L.T.*, hasta hacerlo coincidir con el plano *H*. El sentido de giro o de abatimiento es el sentido trigonométrico, es decir, contrario al movimiento de las agujas del reloj. De esta forma, el semiplano vertical superior viene a coincidir con el horizontal posterior, y el vertical inferior, con el horizontal anterior.

El resultado sería el mismo si el sentido de giro del abatimiento fuera el contrario, es decir, si fuese el plano *H* el que girara alrededor de *L.T.* hasta coincidir con el plano *V*. De esta forma, también quedaría un solo plano, el vertical, que sería el papel del dibujo. Como este sentido de giro es convencional, fijamos que el plano *V* es el que gira hasta confundirse con el *H*.

El plano del dibujo es el plano *H*, y queda dividido en dos partes por la *L.T.* La disposición definitiva del dibujo es la que indica la Fig. 4.

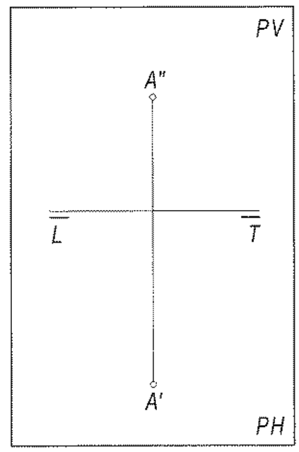


Fig. 4.

Las proyecciones *A'* y *A''* del punto *A* están, después del abatimiento del plano *V*, sobre la misma perpendicular a la *L.T.* Esta es la propiedad fundamental de las proyecciones de un punto. Según esto, dos proyecciones no situadas en una misma perpendicular a la *L.T.* no pueden ser las proyecciones de un punto del espacio.

Para hallar las proyecciones en este sistema, el observador se coloca en el infinito por encima del plano *H* y por delante del plano *V*, es decir, en el primer diedro.

Sabiendo que los planos de proyección son opacos, solamente se considera vista la parte de los cuerpos situada en el primer diedro. Los tres diedros restantes son ocultos.

En este sistema existe indeterminación en cuanto se refiere a las proyecciones de rectas y de figuras contenidas en planos de perfil. Para poder salvar esta indeterminación es necesario utilizar una tercera proyección sobre un plano de perfil; este plano es perpendicular a los del sistema y, por lo tanto, a la *L.T.* (Fig. 5).

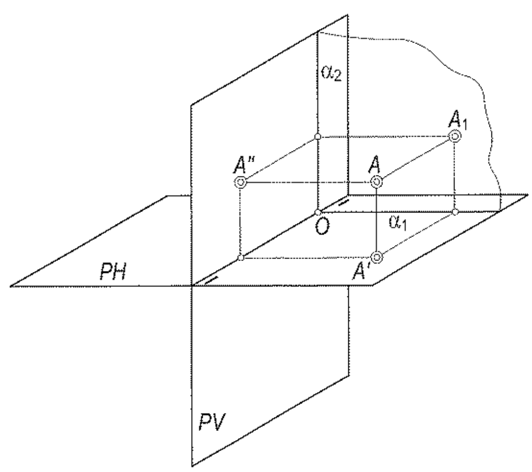


Fig. 5.

La tercera proyección del punto *A* sobre el plano $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2)$, de perfil, es el punto A_1. Este plano se abate sobre el *V* y éste, a su vez, sobre el *H*, y queda la disposición del dibujo como indica la Fig. 6.

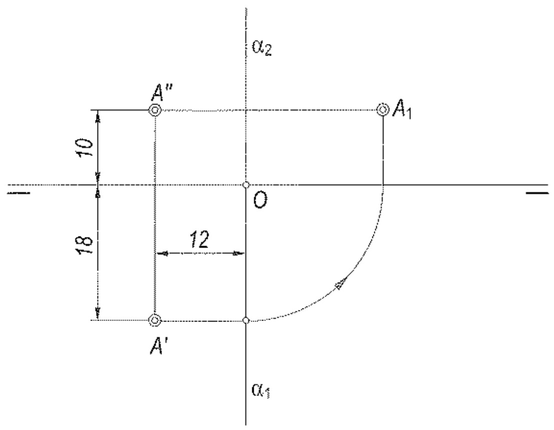


Fig. 6.

El plano de perfil es la recta α_1-α_2 según se verá al representar el plano. Considerando este tercer plano de perfil, un punto se puede dar por tres cotas o distancias a los tres planos. Por ejemplo, el punto *A* se puede representar por *A (12, 10, 18)*; *12* unidades es lo que dista del plano de perfil; *10* unidades es la distancia al plano *H* y *18* unidades es lo que dista del plano *V*.

2. Notación

La línea de tierra la representaremos con línea llena y fina y con dos trazos en sus extremos.

Los puntos los designaremos con letras mayúsculas. Así, el punto *A* se indica *A(A'-A'')*, siendo *A'* y *A''* las proyecciones horizontal y vertical, respectivamente, del punto *A* del espacio. También se pueden nombrar con números.

Las rectas se nombran con letras minúsculas; por ejemplo, *r(r'-r'')* indica que la recta *r* tiene por proyecciones *r'* y *r''*, horizontal y vertical, respectivamente.

Los planos se nombran con letras del alfabeto griego. Por ejemplo, $\alpha(\alpha_1$-$\alpha_2)$ indica que el plano α tiene por trazas α_1 y α_2, horizontal y vertical, respectivamente.

3. Representación del punto

Hemos visto que un punto queda definido y representado cuando se conocen sus dos proyecciones.

Sea el punto *A(A'-A'')*. Se llama **línea de referencia** de este punto a la recta que une sus dos proyecciones y que sabemos es perpendicular a la *L.T.* Se dibuja fina y continua, aunque a medida que se avanza en la complejidad de los problemas, sólo se dibuja en sus extremos para indicar la correspondencia entre las proyecciones.

Ordenada o cota de un punto es la distancia de ese punto al plano *H*. Es también la distancia entre la proyección vertical del punto y la *L.T.* La cota es positiva si el punto está por encima del plano *H*, es decir, en el primer o el segundo diedros; si el punto está en el plano *H*, la cota es nula; los puntos del tercer y cuarto diedros tienen cota negativa.

Alejamiento de un punto es la distancia de este punto al plano *V* o también la distancia que existe entre la proyección horizontal del punto y la *L.T.* Los puntos del primer y cuarto diedros tienen alejamiento positivo y los puntos del segundo y el tercero, alejamiento negativo. Los puntos del plano vertical tienen alejamiento nulo.

Con el nombre de "**alfabeto del punto**", queremos indicar las diversas posiciones que puede ocupar un punto en el espacio con relación a los planos de proyección.

El punto puede ocupar 17 posiciones diferentes (Figs. 7 y 8).

En la Fig. 7 se indican los puntos en una vista de perfil.

En la Fig. 8 se indican las proyecciones diédricas de cada posición.

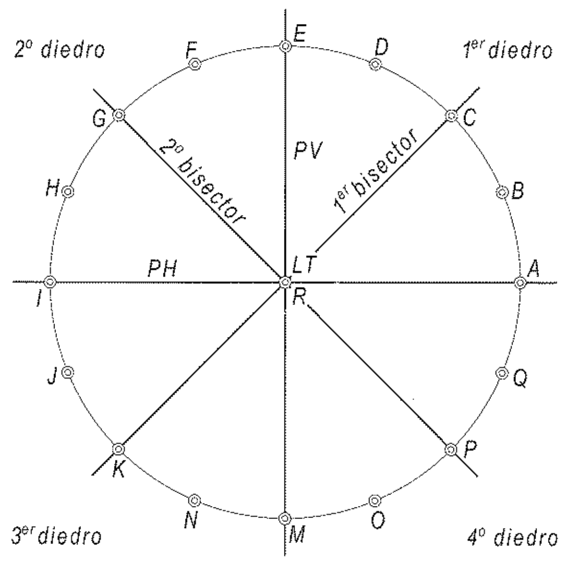


Fig. 7.

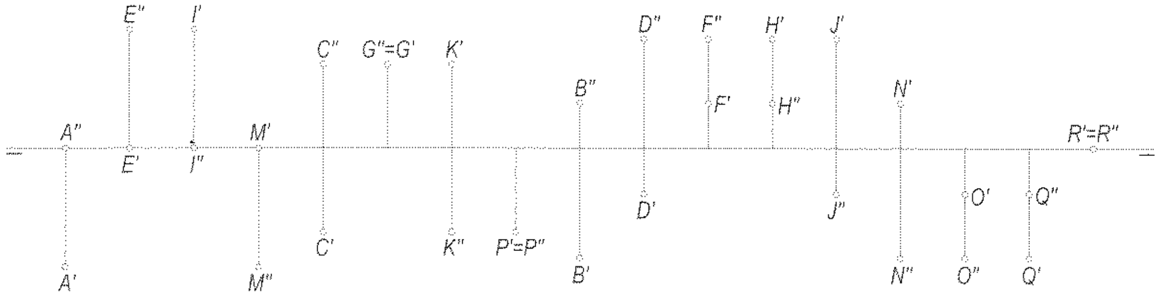


Fig. 8.

Puntos situados en los planos de proyección. Puntos *A*, *E*, *I* y *M*

Punto *A*: está situado en el plano *H* anterior; la proyección vertical está en la *L.T.* y la horizontal coincide con el punto *A*, estando por debajo de *L.T.*; la cota es nula y el alejamiento positivo.

Punto *E*: en el vertical superior; la proyección vertical coincide con el punto y la horizontal está en *L.T.*; cota positiva y alejamiento nulo.

Punto *I*: en el horizontal posterior; la proyección vertical en *L.T.* y la horizontal por encima de *L.T.*; cota nula y alejamiento negativo.

Punto *M*: en el vertical inferior; la proyección horizontal en *L.T.* y la vertical por debajo de *L.T.*; cota negativa y alejamiento nulo.

Puntos situados en los planos bisectores. Puntos *C*, *G*, *K* y *P*

Punto *C*: situado en el primer bisector, primer diedro; la proyección vertical está por encima de *L.T.* y la horizontal por debajo; tiene igual cota que alejamiento. Todos los puntos del primer bisector tienen sus proyecciones equidistantes de *L.T.* y a distinto lado de ella.

Punto *G*: situado en el segundo bisector, segundo diedro; tiene las proyecciones confundidas y por encima de *L.T.* La cota y el alejamiento de los puntos del segundo bisector son iguales, pero de signo contrario.

Punto *K*: igual que el punto *C* pero las proyecciones invertidas, la horizontal por encima de *L.T.* y la vertical por debajo; la cota y el alejamiento son negativos e iguales.

Punto *P*: igual que el punto *G*, pero las proyecciones por debajo de *L.T.*

Los puntos del segundo bisector siempre tienen las proyecciones coincidentes.

Puntos situados en los octantes y en la *L.T.* Puntos *B*, *D*, *F*, *H*, *J*, *N*, *O*, *Q* y *R*

Punto *B*: en el primer octante; tiene más alejamiento que cota.

Punto *D*: en el segundo octante; tiene más cota que alejamiento.

Punto *F*: en el tercer octante; tiene más cota que alejamiento.

Punto *H*: en el cuarto octante; tiene más alejamiento que cota.

Punto *J*: en el quinto octante.

Punto *N*: en el sexto octante.

Punto *O*: en el séptimo octante.

Punto *Q*: en el octavo octante.

Punto *R*: en la *L.T.*: tiene las dos proyecciones en *L.T.*

Resumiendo: los puntos del primer diedro tienen una proyección a cada lado de *L.T.*; la horizontal por debajo y la vertical por encima.

Los puntos del segundo diedro tienen las dos proyecciones por encima de *L.T.* y los puntos del cuarto diedro las dos por debajo.

Los puntos del tercer diedro, como los del primero, tienen una proyección a cada lado de *L.T.*, pero la horizontal por encima y la vertical por debajo.

4. Representación de la recta

La proyección de una recta sobre un plano es otra recta formada por las proyecciones de todos los puntos de aquélla. Si la recta es perpendicular al plano, su proyección ortogonal es un punto.

Una recta del espacio queda definida cuando se conocen sus proyecciones sobre los dos planos de proyección. En el caso de que la recta esté de perfil, será necesaria una tercera proyección.

Sea la recta *r* (Fig. 9). Sus proyecciones sobre los planos son: *r'*, sobre el plano *H*, y *r''*, sobre el plano *V*.

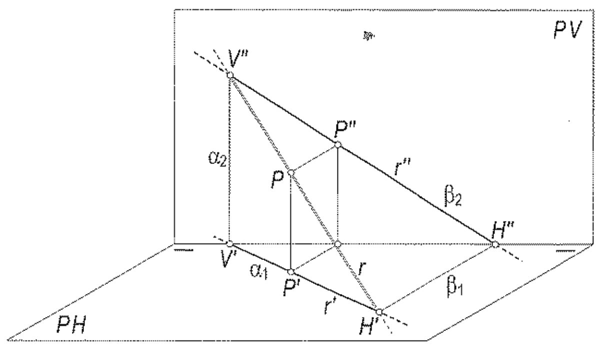


Fig. 9.

El plano que proyecta la recta *r* sobre el plano *H* se llama **plano proyectante horizontal de la recta** y está formado por el triángulo *V''-V'-H'*; este plano es el $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2)$.

El plano que proyecta la recta *r* sobre el plano *V* se llama **plano proyectante vertical de la recta** y está formado por el triángulo *V''-H''-H'*; este plano es el $\beta(\beta_1\text{-}\beta_2)$. En la figura del espacio puede apreciarse que la recta intersección de estos dos planos es la recta *r* del espacio.

Una recta puede definirse por sus trazas. **Se llaman *trazas de una recta* los puntos donde la recta corta a los planos de proyección.** La recta *r* encuentra al plano *H* en el punto *H(H'-H'')*, llamado **traza horizontal**

de la recta; como se ve, *H''* está en la *L.T.* El punto *V(V'-V'')*, donde la recta *r* encuentra el plano vertical, es **la traza vertical**. La proyección *V'* está siempre en la *L.T.*

Abatiendo el plano vertical, la disposición del dibujo queda como indica la Fig. 10. Las líneas de referencia *H'-H''* y *V''-V'* son siempre perpendiculares a *L.T.*

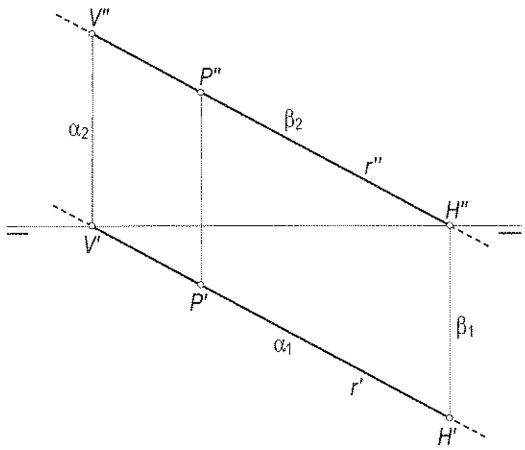


Fig. 10.

Para determinar las partes vistas y ocultas de una recta, hay que tener en cuenta que solamente será vista la parte comprendida en el primer diedro, la cual se indica con línea continua; la parte restante es oculta y se dibuja de trazos. Una recta puede pasar a lo sumo por tres diedros.

Dos rectas se cortan en el espacio si las proyecciones del mismo nombre se cortan en puntos que están en una misma perpendicular a *L.T.* (Fig. 11); así, las rectas *r(r'-r'')* y *s(s'-s'')* se cortan en el punto *P* del espacio, pues las proyecciones horizontales se cortan en *P'* y las verticales en *P''* y ambos puntos están en la misma perpendicular a *L.T.*

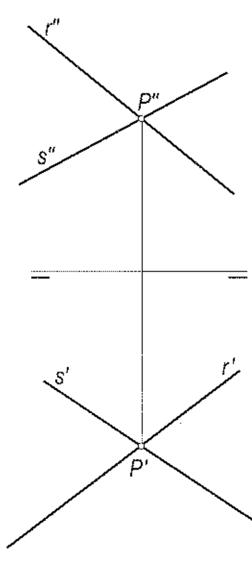


Fig. 11.

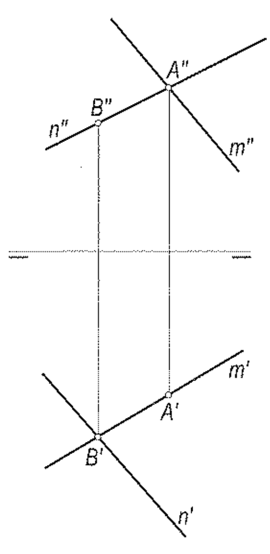


Fig. 12.

En la Fig. 12, las rectas *n(n'-n'')* y *m(m'-m'')* se cruzan en el espacio, es decir, no se encuentran, pues las proyecciones horizontales *n'* y *m'* se cortan en *B'* y las verticales *n''* y *m''* se cortan en *A''* y estos puntos no son las proyecciones de un punto del espacio.

Para situar un punto sobre una recta, se ponen las proyecciones del punto sobre las proyecciones del mismo nombre de la recta. En la Fig. 12, el punto *B* pertenece a la recta *n*, por estar *B'* en *n'* y *B''* en *n''*, pero no pertenece a la *m*. El punto *A* pertenece a la recta *m*, por estar *A'* en *m'* y *A''* en *m''*, pero no pertenece a la *n*.

5. Rectas perpendiculares a los planos de proyección (Figs. 13 y 14)

Pueden ser perpendiculares al plano *H* o al plano *V* y se llaman también "**rectas de punta**", respecto al *H* o al *V*.

En la Fig. 13 se representan, mediante una perspectiva, las posiciones de este tipo de rectas. Tres rectas perpendiculares al plano *H* y tres rectas perpendiculares al plano *V*. En la Fig. 14 se indican las proyecciones resultantes de estas posiciones. Veamos:

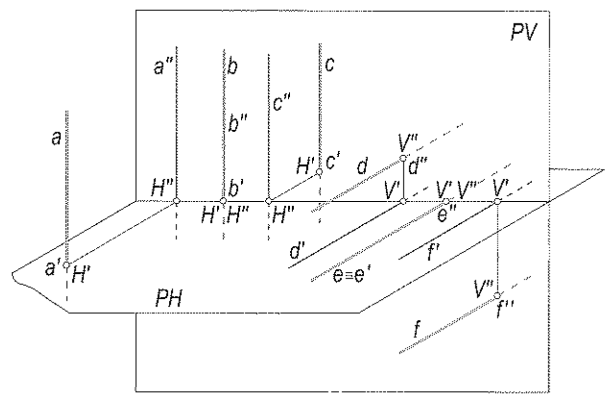


Fig. 13.

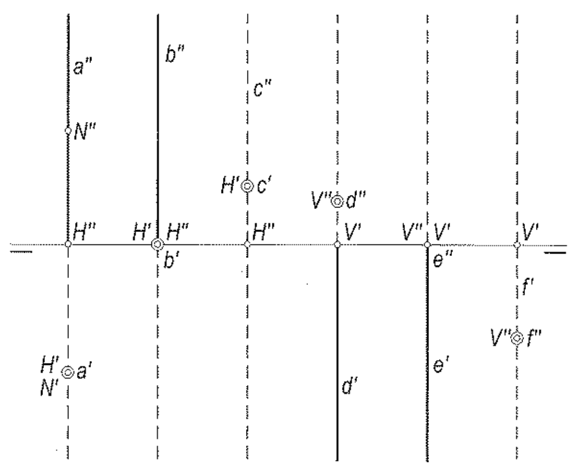


Fig. 14.

1°. Rectas perpendiculares al plano *H* (tres posiciones)

Recta *a(a'-a'')*: Es perpendicular al *H* por delante del *V*; la proyección horizontal es el punto *a'*; la traza horizontal es *H'-H''*; no tiene traza vertical; un punto *N* de ella es el *N'-N''*, estando *N'* en *a'*.

Recta *b(b'-b'')*: Está contenida en el plano vertical; la proyección *b'* está en la *L.T.*; su traza horizontal es *H'-H''*.

Recta *c(c'-c'')*: Es perpendicular al *H*, por detrás del *V*; la proyección horizontal es *c'*; la traza horizontal es *H'-H''*; esta recta es toda oculta.

2°. Rectas perpendiculares al plano *V* (tres posiciones)

Recta *d(d'-d'')*: Es perpendicular al plano *V* por encima del *H*; la proyección vertical es el punto *d''*; la traza vertical es *V'-V''*; no tiene traza horizontal.

Recta *e(e'-e'')*: Está situada en el plano *H*; la proyección vertical *e''* está en *L.T.*; su traza vertical es *V'-V''*.

Recta *f(f'-f'')*: Es perpendicular al plano *V*, por debajo del *H*; la proyección vertical es el punto *f''*; la traza vertical es *V'-V''*.

Como puede apreciarse, las seis rectas tienen una proyección perpendicular a *L.T* y la otra proyección es un punto, que puede estar por debajo de *L.T.*, en ella o por encima de ella.

6. Recta paralela a *L.T.* (Fig. 15)

Una recta paralela a *L.T.* tiene las dos proyecciones paralelas a *L.T.* En la parte superior de la figura se representa la recta en el espacio. En la parte inferior, la recta *r* tiene sus proyecciones *r'* y *r''* paralelas a *L.T.* El punto *A'-A''* pertenece a ella.

7. Recta paralela al plano *H* (Fig. 16)

Recta *r(r'-r'')*: Paralela al *H* por encima de él; la traza vertical es el punto *V'-V''*; no tiene traza horizontal; la proyección *r'* es cualquiera y la proyección vertical *r''* es paralela a *L.T.* El punto *A(A'-A'')* pertenece a ella; los puntos *M'-M''* y *N'-N''* son los de intersección de la recta con el primer y segundo bisectores, respectivamente.

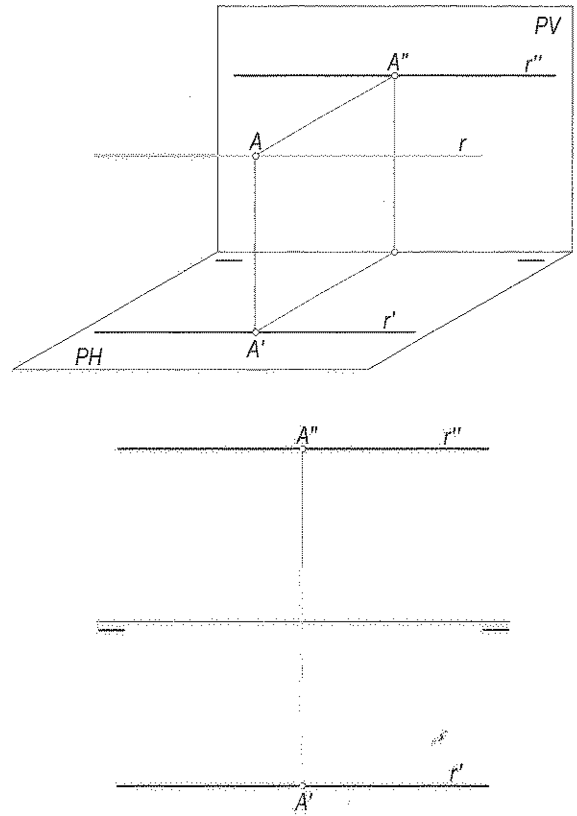


Fig. 15.

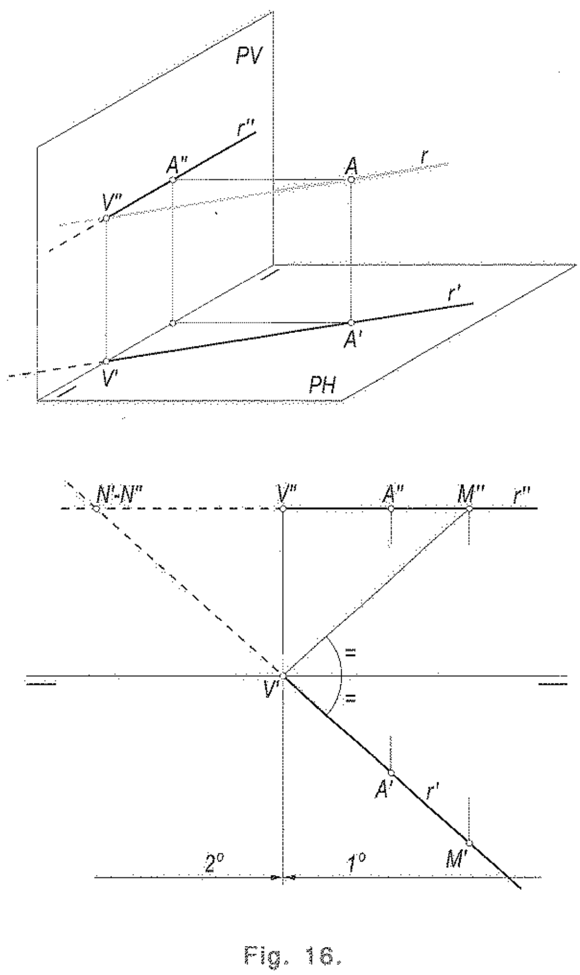


Fig. 16.

8. Recta paralela al plano *V* (Fig. 17)

Recta *r(r'-r'')*: Es paralela al plano vertical por delante de él. Esta recta recibe el nombre de "**recta frontal**". Su traza horizontal es *H'-H''* y no tiene traza vertical. Un punto de ella es el *A'-A''* y los puntos *M'-M''* y *N'-N''* son los de intersección de la recta con el primer y segundo bisectores. Pasa del primer diedro al cuarto.

Recta *s(s'-s'')*: (Fig. 18). Pasa del primero al tercer diedro y es oblicua a *L.T.*

Recta $s_1(s'_1\text{-}s''_1)$: (Fig. 18). Pasa del segundo al cuarto diedro y es oblicua a *L.T.*

Recta $s_2(s'_2\text{-}s''_2)$: (Fig. 19). Pasa del primero al tercer diedro y es perpendicular a *L.T.*; es una recta llamada *de perfil*, por tener las dos proyecciones confundidas y perpendiculares a *L.T.* Para definirla hay que dar un punto *A'-A''* de ella, en este caso, del primer diedro.

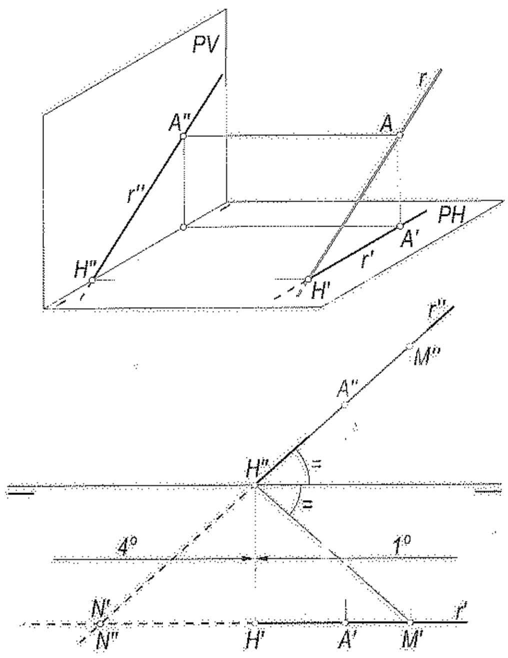


Fig. 17.

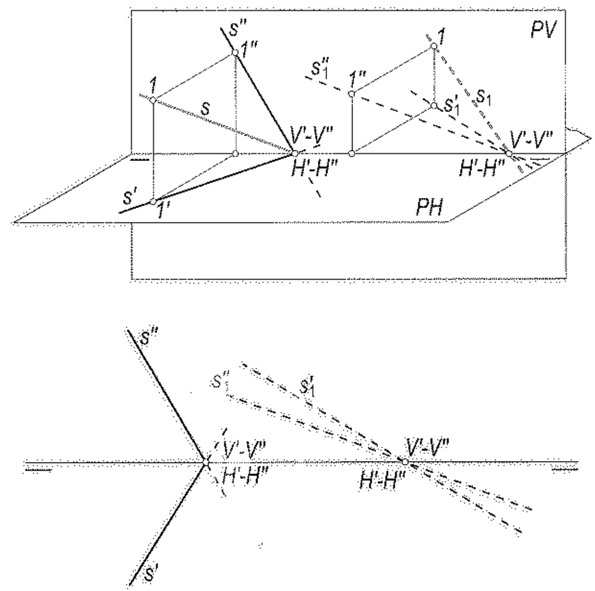


Fig. 18.

9. Rectas oblicuas a los planos y que cortan a *L.T.* (Figs. 18 y 19)

Hay cuatro posiciones de este tipo de rectas, las cuales pasan por dos diedros y tienen las dos trazas en *L.T.*

Recta $s_3(s'_3\text{-}s''_3)$: (Fig. 19). Pasa del segundo al cuarto diedro; hay que definirla por un punto, en este caso, el *B'-B''* del segundo diedro.

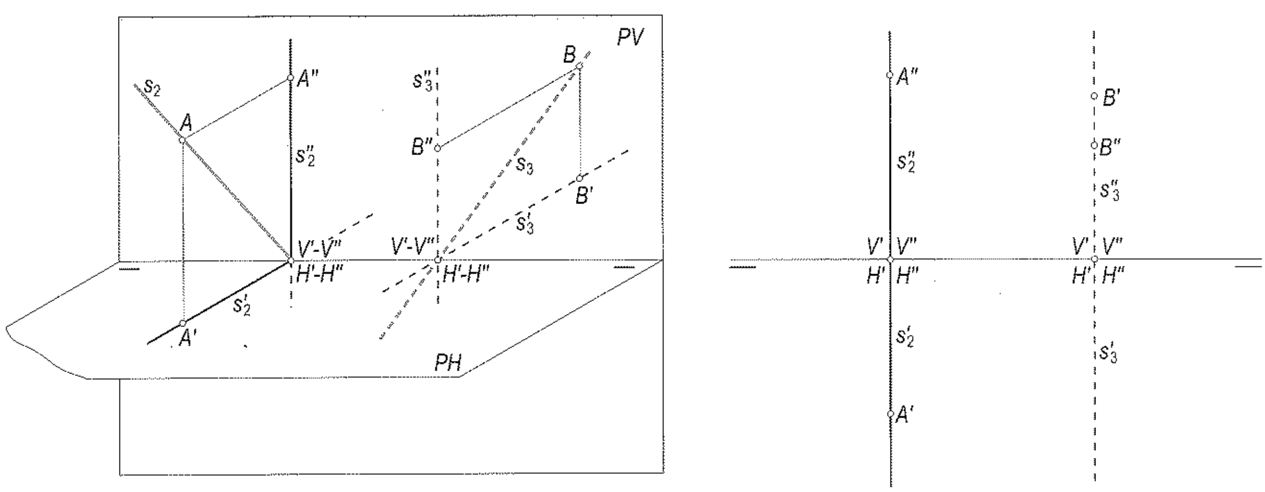


Fig. 19.

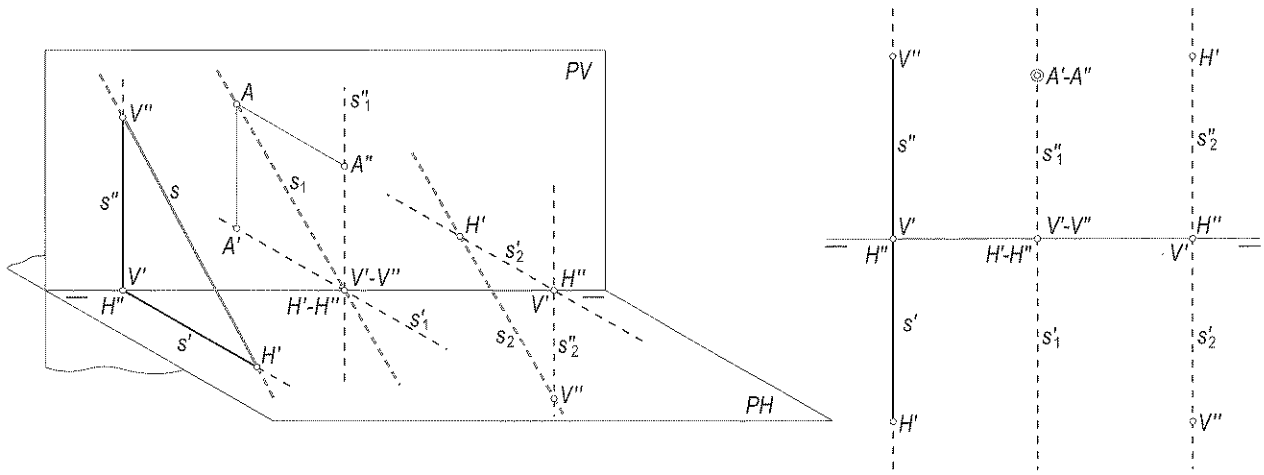


Fig. 20.

10. Rectas de perfil (Figs. 20, 21 y 22)

Estas rectas reciben este nombre por estar situadas en planos de perfil; tienen las dos proyecciones confundidas sobre una misma perpendicular a *L.T.*, por lo que para definirlas hay que dar dos puntos cualesquiera de ellas o bien sus dos trazas.

Hay que distinguir:

- Rectas de perfil que son perpendiculares a los bisectores.
- Rectas de perfil que no son perpendiculares a los bisectores.

1°. Rectas de perfil perpendiculares a los bisectores (seis posiciones) (Figs. 20 y 21)

Recta $s(s'-s'')$: (Fig. 20). Es perpendicular al primer bisector por encima del segundo. Sus trazas *H'* y *V''* equidistan de *L.T.*

Recta $s_1(s'_1-s''_1)$: (Fig. 20). Es perpendicular al primer bisector y está contenida en el segundo; se define por un punto *A'-A''* del segundo bisector; las trazas están en *L.T.* y es toda oculta.

Recta $s_2(s'_2-s''_2)$: (Fig. 20). Es perpendicular al primer bisector por debajo del segundo; es toda oculta. Sus trazas *H'* y *V''* equidistan de *L.T.* pero están dispuestas la *H'*, por encima de *L.T.*, y la *V''*, por debajo de *L.T.*

Recta $r(r'-r'')$: (Fig. 21). Es perpendicular al segundo bisector por encima del primero. Sus trazas *H'* y *V''* coinciden. Obsérvese con detenimiento esta recta para comprobar que es oculta solamente la parte comprendida entre las trazas.

Recta $r_1(r'_1-r''_1)$: (Fig. 21). Es perpendicular al segundo bisector y está contenida en el primero; se define por un punto *A'-A''* del primer bisector. Las trazas están en la *L.T.* y es toda vista.

Recta $r_2(r'_2-r''_2)$: (Fig. 21). Es perpendicular al segundo bisector por debajo del primero. Sus trazas *H'* y *V''* coinciden y es oculta solamente la parte comprendida entre las trazas.

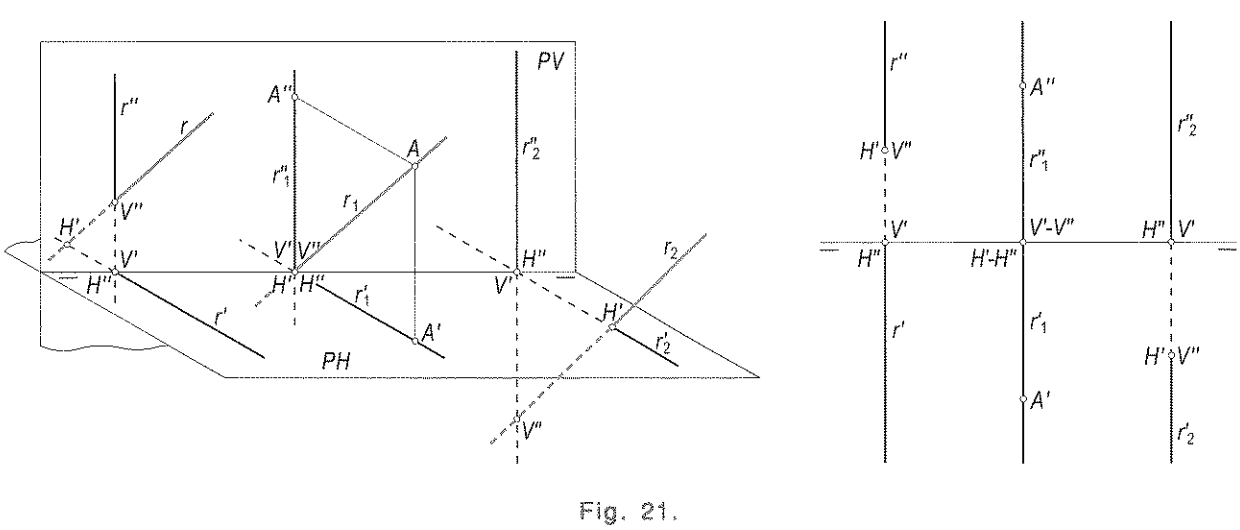


Fig. 21.

2°. Rectas de perfil no perpendiculares a los bisectores (Fig. 22)

Son cuatro posiciones. En la parte superior de la figura se indica la posición de estas cuatro rectas: ***a***, ***b***, ***c*** y ***d***.

En la parte inferior de la figura se obtienen las proyecciones de las mismas, que son similares a las rectas anteriores, con la única diferencia de que las trazas no son simétricas ni coinciden.

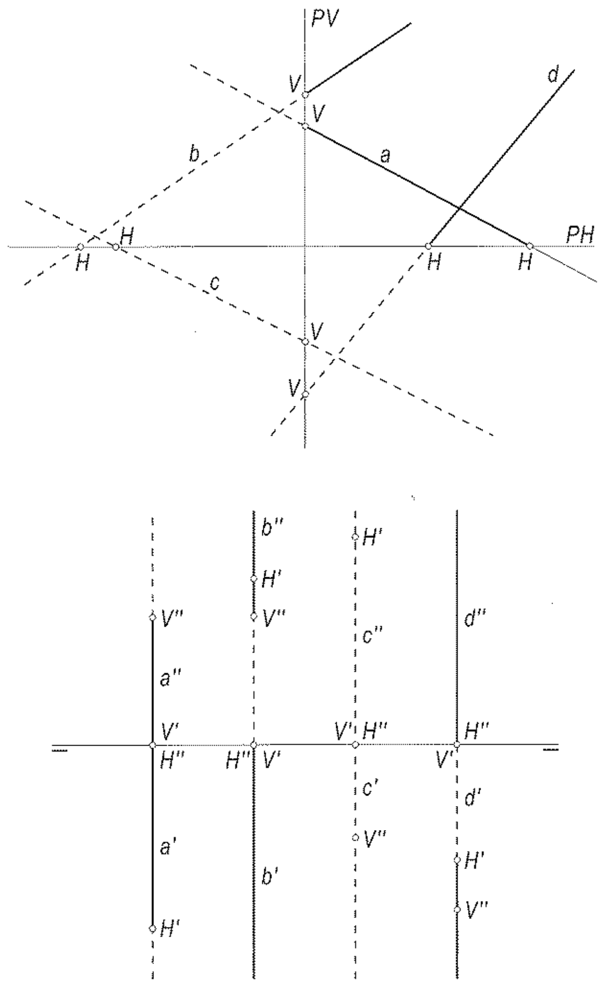


Fig. 22.

11. Tercera proyección de una recta de perfil (Fig. 23)

En la parte superior de la figura se representa en el espacio una recta *s*, de perfil, y se obtienen sus proyecciones *s'* y *s''* sobre los planos *H* y *V* y s_1 sobre un plano de perfil, designado por *PP*. En la parte inferior se proyecta la recta *s'*-*s''* sobre el plano de perfil α_1-α_2 llevando las trazas *H'* y *V''* a los puntos *H* y *V*; se abate el plano de perfil sobre el vertical y éste sobre el horizontal, con lo que se obtiene la tercera proyección s_1 de la recta.

Con mucha frecuencia nos veremos obligados a emplear esta tercera proyección, por lo que es preciso saber pasar de proyecciones a tercera proyección y de ésta a las dos proyecciones diédricas sobre *H* y *V*.

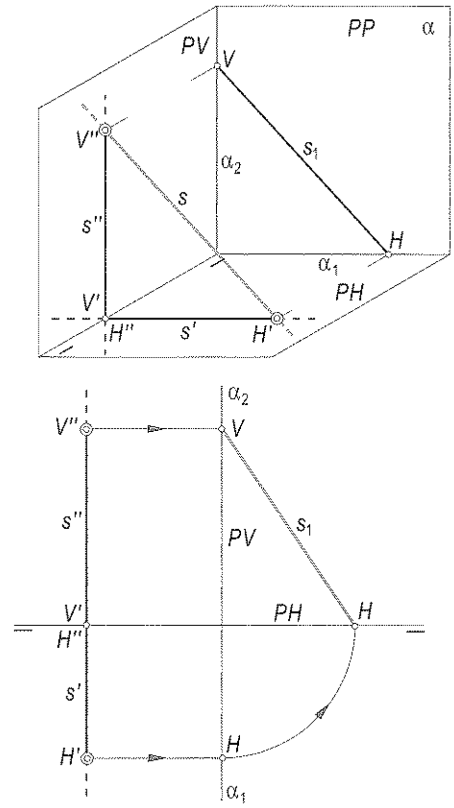


Fig. 23.

12. Problema (Fig. 24)

Dada la proyección de un punto contenido en una recta de perfil, hallar la otra proyección.

Se conoce la proyección *A'* de un punto situado en la recta *r'*-*r''*; pasamos la recta *r* a tercera proyección según r_1, con ayuda de las trazas *H'* y *V''*, y el punto *A'* nos da A_1 en r_1; la proyección A_1 se refiere a *A''* en *r''* y tenemos así la proyección vertical del punto *A*. Según esto, para poner un punto en una recta de perfil, no se puede hacer directamente sobre las proyecciones, sino que hay que situarlo previamente en la tercera proyección.

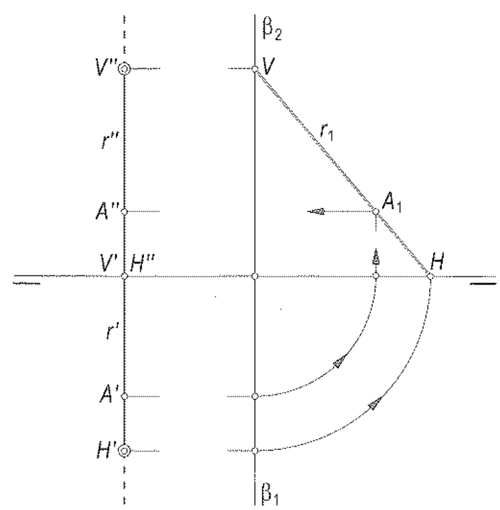


Fig. 24.

13. Problema (Fig. 25)

Dada una recta de perfil por dos de sus puntos, hallar sus trazas.

Sea la recta $r(r'-r'')$ de perfil que está definida por los puntos A'-A'' y B'-B''. Se toma un plano β_1-β_2 de perfil y se halla la tercera proyección de la recta; se obtienen los puntos A_1 y B_1 que, unidos, definen la proyección r_1; esta proyección corta a los planos en H y V, que son las trazas pedidas, y éstas se refieren a la recta en H'-H'' y en V'-V''.

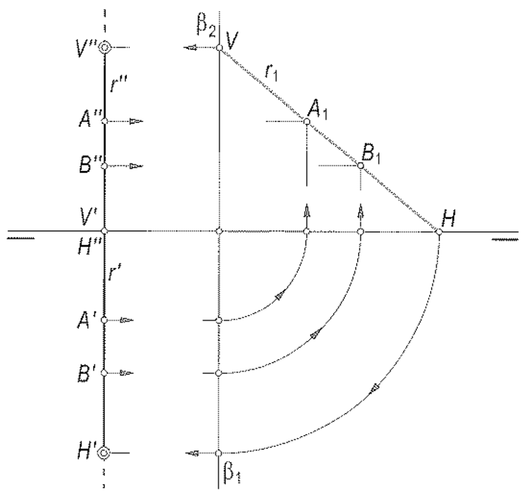


Fig. 25.

14. Problema (Fig. 26)

Averiguar si se cortan o no dos rectas dadas, una de perfil y otra cualquiera.

Las rectas r'-r'' y s'-s'' aparentemente se cortan pero referido el punto I'-I'' a la tercera proyección, vemos que no pertenece a la recta r, de perfil, lo que indica que las rectas se cruzan. El punto I'-I'' sólo pertenece a la recta s.

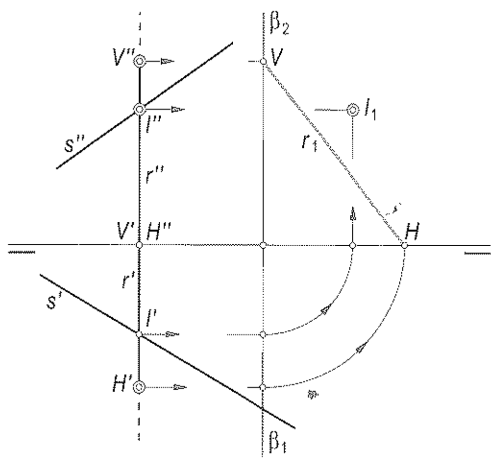


Fig. 26.

15. Representación del plano. Trazas de un plano

Se llaman "**trazas de un plano**" las rectas intersección de éste con cada uno de los planos de proyección. Un plano tiene, pues, dos trazas, la horizontal y la vertical.

Sea el plano α (Fig. 27). Las trazas son las rectas α_1 y α_2 que se cortan en el punto N de la $L.T.$ Obsérvese que la traza horizontal α_1 es una recta s'-s'' del plano horizontal y que, por lo tanto, se proyecta verticalmente sobre la $L.T.$ Igualmente, la traza vertical α_2 es una recta r'-r'' del plano vertical, que se proyecta horizontalmente sobre la $L.T.$

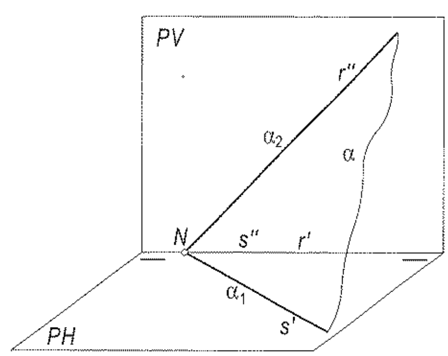


Fig. 27.

Al abatir el plano V sobre el H, el plano queda en la disposición que indica la Fig. 28.

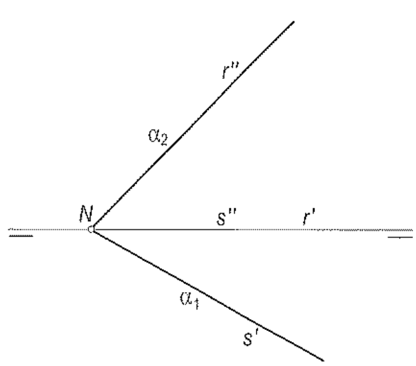


Fig. 28.

Un plano puede definirse de alguna de las formas siguientes:

- Por tres puntos no alineados.
- Por dos rectas que se cortan.
- Por dos rectas paralelas.
- Por un punto y una recta que no se pertenecen.

En general, en este sistema, el plano lo vamos a definir por dos rectas que se cortan, que van a ser precisamente las trazas de dicho plano.

En el caso de que un plano esté determinado de alguna otra forma, se pueden hallar las trazas del plano para operar con ellas. Hay que tener en cuenta que las trazas de un plano son los lugares geométricos de las trazas de todas las rectas contenidas en dicho plano.

Sean los puntos *A'-A''*, *B'-B''* y *C'-C''*, no alineados (Fig. 29). Estos tres puntos definen un plano único, cuyas trazas vamos a determinar.

Se unen los puntos *A* y *B* y tenemos la recta *r'-r''*; igualmente, se unen los puntos *A* y *C* y tenemos la recta *s'-s''*; estas dos rectas se cortan en el punto *A* y definen el plano.

Se hallan las trazas horizontales *H'* y H'_1 de las rectas *r* y *s*, y al unirlas, tenemos la traza horizontal α_1 del plano. Se hallan las trazas verticales *V''* y V''_1 de las rectas, y al unirlas, tenemos la traza vertical α_2 del plano. Estas trazas han de cortarse en un punto de la *L.T.* La recta *BC*, que en la figura no se ha utilizado, también está en el plano.

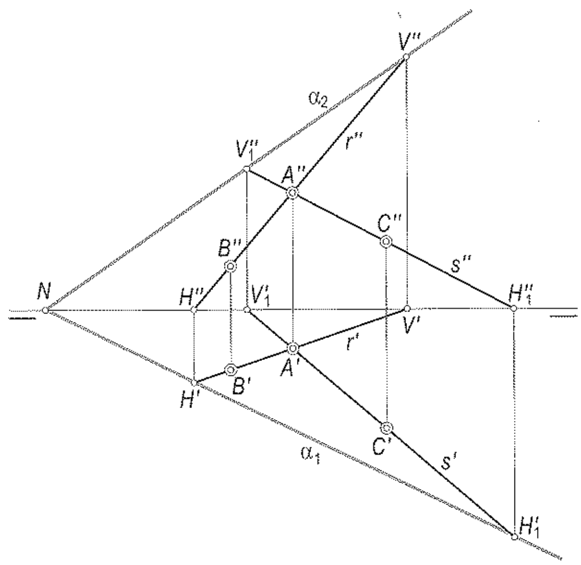


Fig. 29.

16. Rectas particulares de un plano

Una recta está situada en un plano cuando las trazas de la recta están situadas sobre las trazas del mismo nombre del plano.

La recta *r(r'-r'')* (Fig. 30) está situada en el plano α por estar *V''* en α_2 y *H'* en α_1.

Si se conoce la proyección horizontal *r'* de una recta contenida en un plano α, para hallar la proyección vertical *r''*, se traza por *V'* la perpendicular a *L.T.*, hasta que corte en *V''* a α_2, se refiere *H'* a *L.T.* en *H''* y unidos los puntos *H''* y *V''* dan la proyección vertical *r''*. El problema inverso se resuelve de la misma forma.

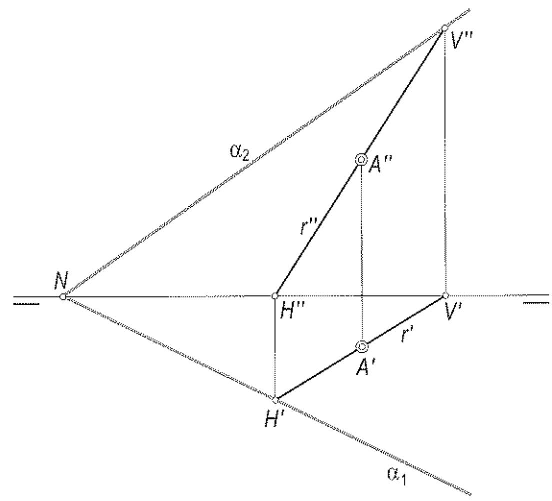


Fig. 30.

Un punto está en un plano cuando sus proyecciones están sobre las proyecciones del mismo nombre de una recta contenida en dicho plano. Así, el punto *A'-A''* está en el plano α por pertenecer a la recta *r'-r''* de este plano.

Según lo anterior, un punto no puede situarse en un plano de forma arbitraria, pues previamente se ha de situar una recta en dicho plano. Esta recta puede ser una cualquiera oblicua o, mejor aún, por su sencillez, una recta horizontal o una recta frontal.

En el alfabeto de la recta se estudiaron las proyecciones de una recta horizontal y de una recta frontal. En la Fig. 31, parte superior, la recta *h'-h''* es una recta horizontal situada en el plano α_1-α_2; según este esquema del espacio, obtenemos la figura inferior; la traza vertical *V''* de la recta *h'-h''* está en α_2, *h''* es paralela a *L.T.* y *h'* es paralela a α_1, ya que la traza horizontal *H'* de la recta es impropia. La cota de la recta *h* es *c*.

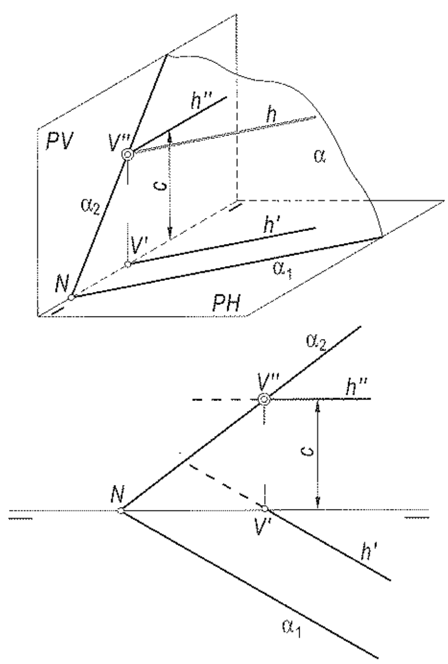


Fig. 31.

De la misma forma, en la Fig. 32, se sitúa en un plano ω_1-ω_2 una recta frontal f'-f''. Su única traza H' está en la traza horizontal ω_1, la proyección f' es paralela a *L.T.* y la proyección f'' es paralela a ω_2. La magnitud *a* es el alejamiento de esta recta frontal.

Se llama **línea de máxima pendiente de un plano** ***(l.m.p.)*** a la recta de este plano que forma el mayor ángulo con el plano horizontal. En la Fig. 33, la recta r'-r'' es una *l.m.p.* del plano α_1-α_2 y se caracteriza porque su proyección horizontal r' es perpendicular a la traza horizontal α_1 del plano. Para indicar que es *l.m.p.* se pone el signo de perpendicularidad o se colocan sobre r' los dos tracitos que indica la figura.

Se llama **línea de máxima inclinación de un plano** a la recta de este plano que forma el mayor ángulo con el plano vertical. Abreviadamente la designaremos por *l.m.i.* En la Fig. 34, la recta i'-i'' es una *l.m.i.* del plano ω_1-ω_2 y se caracteriza porque su proyección vertical i'' es perpendicular a la traza vertical ω_2 del plano. Como la anterior, esta recta se indica con el signo de perpendicularidad o con dos tracitos perpendiculares a la proyección i''.

Un plano queda definido conociendo una de sus líneas de máxima pendiente o una de sus líneas de máxima inclinación. Así, conocida la recta r'-r'', *l.m.p.* de un plano, para hallar las trazas, se dibuja por H' la perpendicular a r' y el punto *N*, donde corta a la *L.T.*, unido con V'', nos proporciona la traza vertical. De la misma forma se hallarían las trazas de un plano definido por una de sus *l.m.i.*

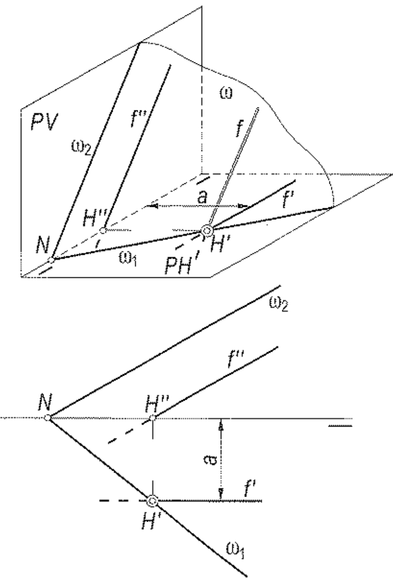


Fig. 32.

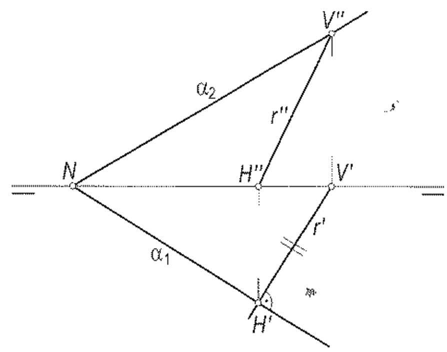


Fig. 33.

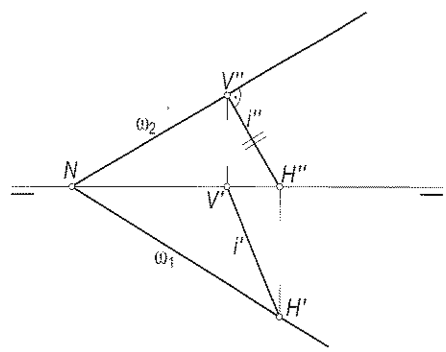


Fig. 34.

17. Planos proyectantes (Figs. 35 y 36)

Se llama **plano proyectante** a aquel que es perpendicular a uno de los planos de proyección. Según esto, hay dos posiciones de planos proyectantes, uno perpendicular al *H* y otro perpendicular al *V*.

- Plano proyectante horizontal (Fig. 35)

En el esquema del espacio de la izquierda, el plano α_1-α_2 es perpendicular al plano horizontal, la traza vertical α_2 es perpendicular a *L.T.* y la traza horizontal α_1 es una recta cualquiera. El ángulo *A* es el que forma el plano con el *V*. Todos los puntos y figuras contenidos en este plano se proyectan horizontalmente sobre su traza horizontal α_1. Así, la recta *r* y el punto *P* tienen r' y P' sobre α_1. Esta es la característica fundamental de este plano, de ahí su nombre de *proyectante horizontal*, porque proyecta ortogonalmente todo lo que contiene sobre su traza horizontal.

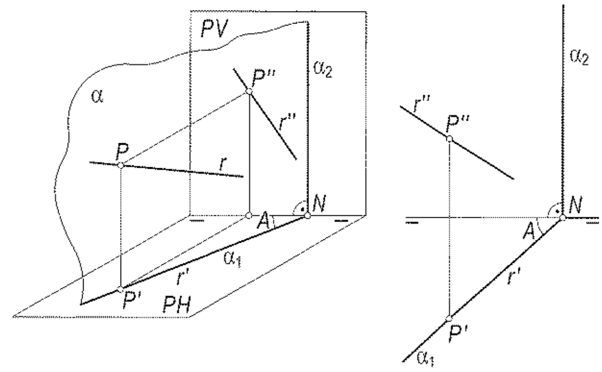


Fig. 35.

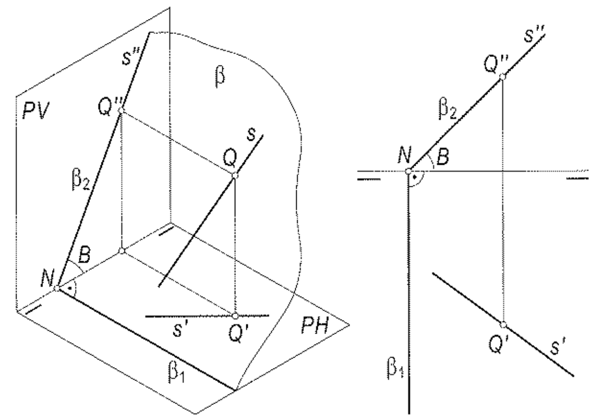


Fig. 36.

- **Plano proyectante vertical** (Fig. 36)

  En el esquema del espacio de la izquierda de la figura, el plano β_1-β_2 es perpendicular al plano vertical, la traza horizontal β_1 es perpendicular a *L.T.* y la traza vertical β_2 es una recta cualquiera. El ángulo *B* es el que forma el plano con el plano *H*. Todos los puntos y figuras contenidos en este plano se proyectan verticalmente sobre su traza vertical β_2. Así, la recta *s* y el punto *Q* tienen *s''* y *Q''* sobre β_2. Esta es la característica fundamental de este plano, de ahí su nombre de *proyectante vertical*, porque proyecta ortogonalmente todo lo que contiene sobre su traza vertical.

Se pueden considerar a estos planos como los más importantes, pues en la práctica son los que se utilizan para todas las construcciones auxiliares.

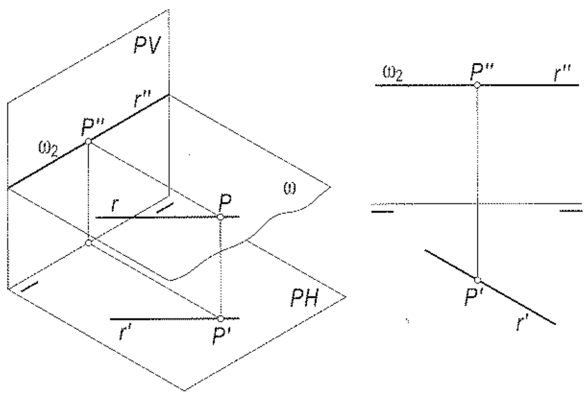


Fig. 37.

18. Planos paralelos a los de proyección (Figs. 37 y 38)

Estos planos, paralelos al *H* o al *V*, son también perpendiculares al otro plano del sistema, por lo que son también planos proyectantes.

- **Plano horizontal** (Fig. 37). Es un plano paralelo al plano *H* y puede estar por encima de él, ser el mismo plano *H* o estar por debajo del plano *H*.

  En el esquema de la figura, el plano $\omega(\omega_2)$ es horizontal, por encima del *H*, y no tiene más que una traza, la vertical ω_2, que es la paralela a *L.T.* Todo lo que contiene lo proyecta verticalmente sobre su traza vertical; así, la recta *r* y el punto *P* tienen sus proyecciones *r''* y *P''* sobre ω_2. A la derecha se dibuja este plano, que queda definido solamente por su traza ω_2. Los elementos que contiene se proyectan horizontalmente en verdadera magnitud.

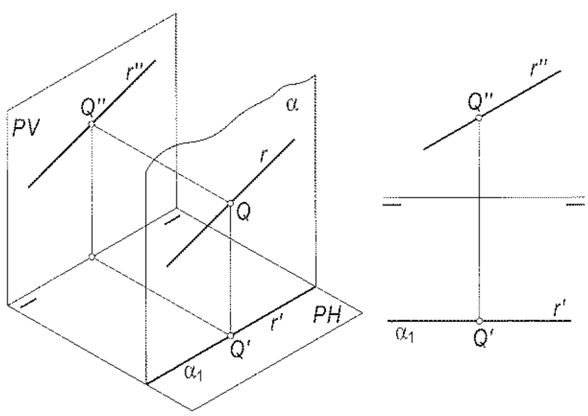


Fig. 38.

- **Plano paralelo al vertical** (Fig. 38)

  Un plano paralelo al vertical se llama también "**plano frontal**". En el esquema de la figura, el plano $\alpha(\alpha_1)$ es paralelo al vertical. Puede estar situado delante del vertical, ser el mismo vertical o estar por detrás de él. El plano α es paralelo al vertical por delante de él y por lo tanto no tiene más que traza horizontal, α_1, que es paralela a *L.T.* Todos los elementos que contiene se proyectan horizontalmente sobre su traza α_1 y en proyección vertical se ven en verdadera magnitud. Así, la recta *r* y el punto *Q* tienen *r'* y *Q'* sobre α_1. A la derecha se dibuja este plano, ya en diédrico, con su única traza α_1.

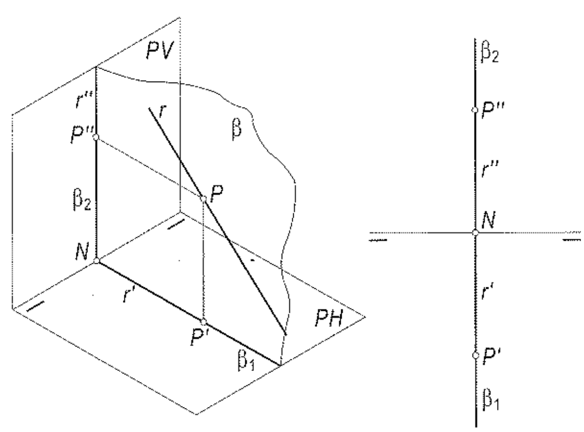


Fig. 39.

19. Plano de perfil (Fig. 39)

La Fig. 39 representa en la parte izquierda un plano de perfil $\beta(\beta_1$-$\beta_2)$. Este plano es doblemente proyectante, pues es perpendicular a los planos *H* y *V*; también es perpendicular a los dos bisectores. Sus dos trazas están confundidas en una sola y sobre ella están confundidas las dos proyecciones de todos los elementos contenidos en el plano; la recta *r* y el punto *P* tienen sus proyecciones confundidas con la recta β_1-β_2.

20. Planos perpendiculares a los bisectores (Fig. 40)

En la Fig. 40, el plano α_1-α_2 es perpendicular al primer bisector. Sus trazas forman el mismo ángulo con *L.T.*, es decir, son simétricas respecto de ella. En este plano se han dibujado una horizontal *h'-h''* y un punto *1'-1''* sobre ella.

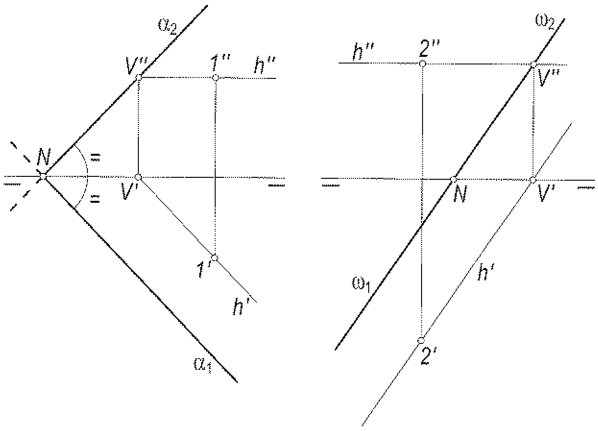


Fig. 40.

El plano ω_1-ω_2 es perpendicular al segundo bisector; tiene sus trazas en línea recta. También se han dibujado una horizontal *h'-h''* y un punto *2'-2''* situados en el plano.

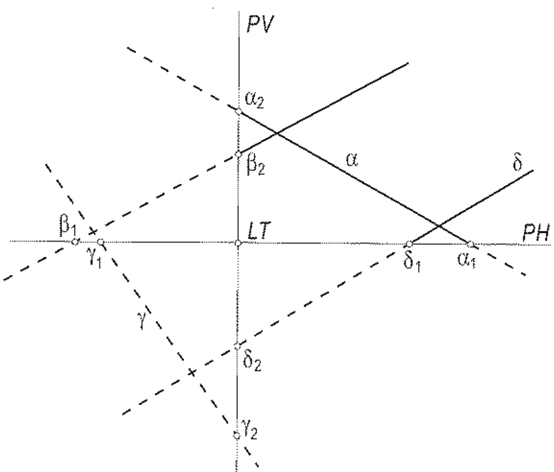


Fig. 41.

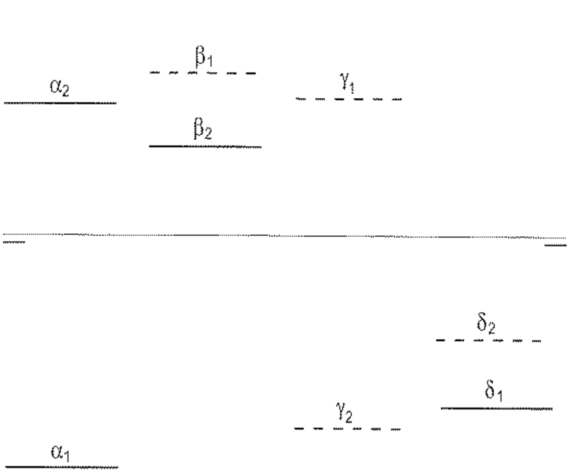


Fig. 42.

21. Planos paralelos a *L.T.* (Figs. 41 y 42)

Un plano paralelo a *L.T.* tiene sus dos trazas paralelas a *L.T.* En la Fig. 41 se representan los planos α, β, γ y δ, paralelos a *L.T.*, vistos de perfil. En la Fig. 42, se representan estos planos en diédrico, cuyas trazas, vistas u ocultas, se pueden deducir con facilidad de la Fig. 41.

22. Proyecciones de una figura plana (Fig. 43)

Se trata de resolver el siguiente problema de tipo general: **Dado un plano y una figura contenida en dicho plano, de la que se conoce una de las proyecciones, hallar la otra proyección.**

En la Fig. 43, tenemos el plano α_1-α_2 y una figura contenida en él que se proyecta verticalmente según un pentágono regular estrellado. Hay que hallar la proyección horizontal de dicha figura.

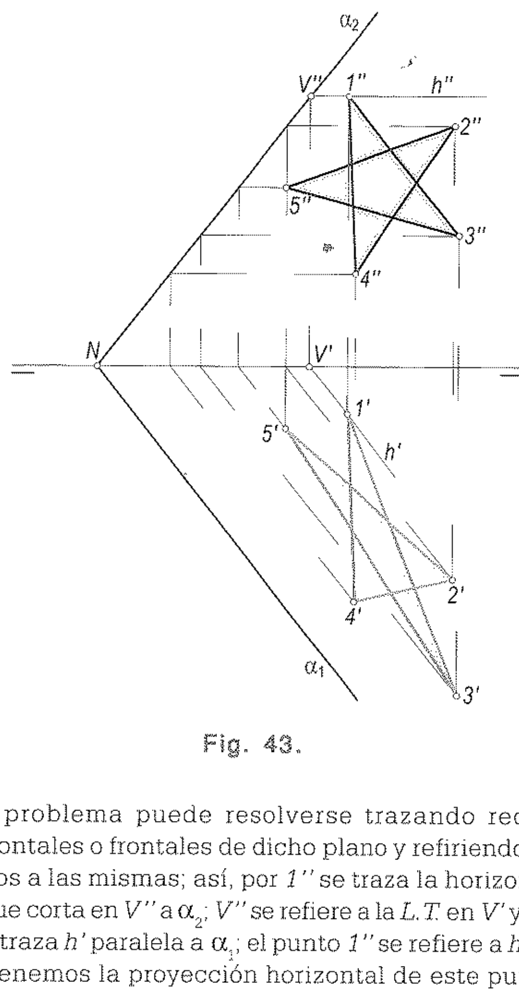


Fig. 43.

El problema puede resolverse trazando rectas horizontales o frontales de dicho plano y refiriendo los puntos a las mismas; así, por *1''* se traza la horizontal *h''*, que corta en *V''* a α_2; *V''* se refiere a la *L.T.* en *V'* y por *V'* se traza *h'* paralela a α_1; el punto *1''* se refiere a *h'* en *1'* y tenemos la proyección horizontal de este punto. Repitiendo la operación para todos los vértices, bien con rectas horizontales o con rectas frontales, tendremos la proyección *1'-2'-3'-4'-5'*.

También puede resolverse este problema empleando la relación de afinidad que existe entre las dos proyecciones vertical y horizontal. Este nuevo procedimiento se estudiará en el curso próximo.

ACTIVIDADES

1. Dibujar las proyecciones diédricas de los puntos: *A (3,3,4)*, *B(–3,2,5)* y *C(–2,4,–3)*.
2. Por el punto *P(–4,2,5)* trazar: una recta horizontal, una recta frontal y la recta vertical. Hallar sus trazas.
3. Hallar las trazas de la recta de perfil determinada por los puntos *P(4,3,1)* y *Q(4,2,4)*.
4. Situar puntos y rectas sobre un plano cualquiera.
5. Situar en un plano rectas horizontales y rectas frontales.
6. Situar en una recta cualquiera el punto de cota 4.
7. Por un punto conocido *P'-P''* trazar la horizontal que corta a otra recta oblicua *r'-r''* dada.
8. Hallar las trazas del plano definido de las formas siguientes:

   1°. Por una recta horizontal y un punto exterior.

   2°. Por una recta frontal y un punto exterior.

   3°. Por una recta vertical y un punto exterior.

   4°. Por una recta de perfil y un punto exterior.

   5°. Por los puntos *P(3,3,3)*, *Q(–1,–2,3)* y *R(1,2,–5)*.

   6°. Por dos rectas que se cortan de las que no podemos hallar las trazas.
9. ¿Cómo se hallan las trazas de una recta de perfil de la que se conocen las proyecciones de dos de sus puntos?

   1°. Utilizando la tercera proyección.

   2°. Sin recurrir a esta proyección.
10. Situar un punto en un plano dado por una de sus líneas de máxima pendiente.
11. Situar una recta en un plano dado por dos rectas que se cortan.
12. Dada una de las proyecciones de un punto situado en un plano, hallar la otra proyección. El plano está dado por dos rectas que se cortan.

SISTEMA DE PLANOS ACOTADOS

TEMA 13

Objetivos y orientaciones metodológicas

Para dar una idea general del sistema, se indicará la forma de representar el punto, la recta y el plano y como aplicación, se obtendrá la recta intersección de dos planos. Se hará ver al alumno cómo con una metodología tan sencilla se puede resolver cualquier problema del espacio.

Se dará una visión general del dibujo topográfico, indicando la forma de representar la superficie de la Tierra y todos sus accidentes naturales y artificiales.

Esta unidad temática puede desarrollarse en dos clases.

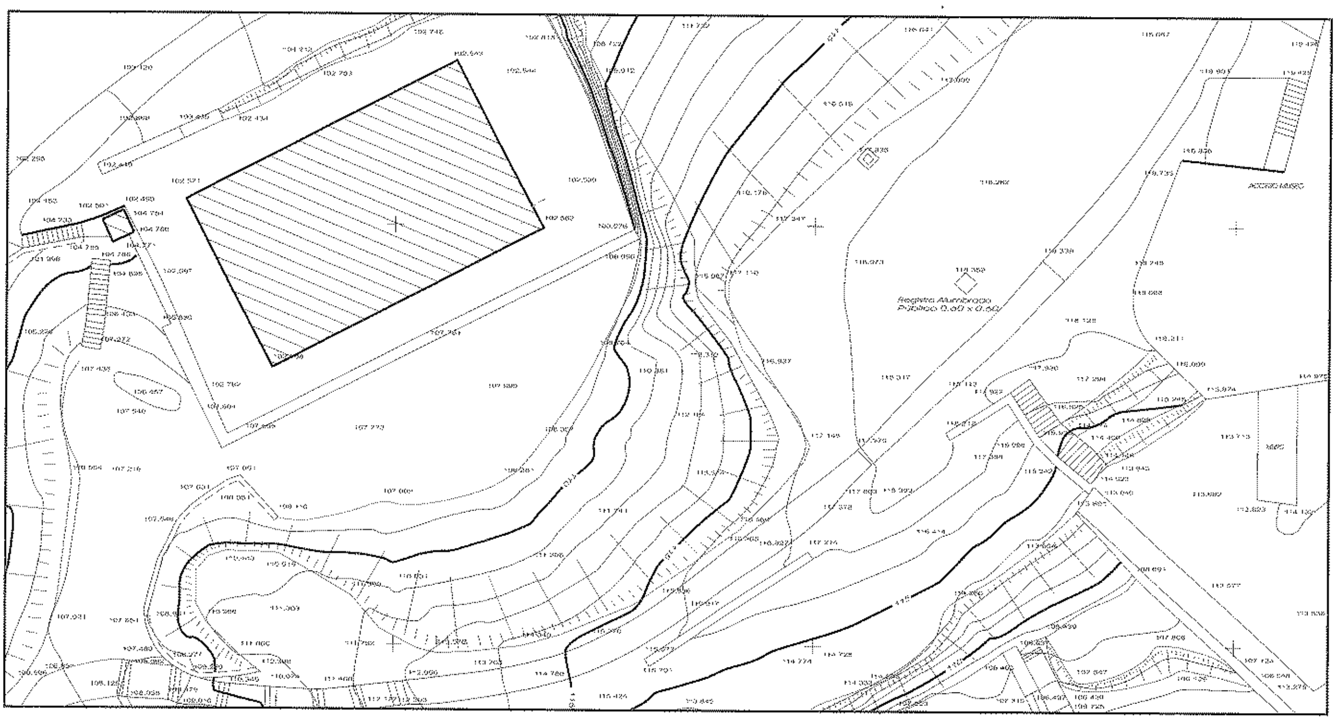


Fig. 1. Plano topográfico.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

El sistema de planos acotados se emplea con preferencia en topografía y en dibujo topográfico.

La topografía hace uso de este sistema en el trazado de caminos y canales, en el cálculo de terraplenes y desmontes, en las fortificaciones, en las cartas marinas y en general en el levantamiento completo de un plano topográfico. El dibujo topográfico se apoya en este sistema para la instalación de industrias, de motores hidráulicos, etc., y en general en la representación de terrenos.

1. Sistema de planos acotados: definiciones. Representación del punto

El sistema de planos acotados está formado por un solo plano que se supone horizontal, llamado *plano de proyección*, *plano del cuadro*, *plano de horizonte*, *plano de comparación* o *plano de referencia*. Sobre este plano se halla la proyección ortogonal del elemento a proyectar, acotando debidamente cada uno de los puntos. Sea el plano π el plano de proyección (Fig. 2). Un punto puede ocupar, con respecto a este plano, tres posiciones: encima de él, contenido en el plano o por debajo.

El punto A del espacio está por encima del plano de comparación y su proyección es A'; para fijar este punto, se anota entre paréntesis la cota del punto sobre el plano, en este caso 5 unidades. Estas unidades de ahora en adelante en dibujo topográfico se consideran centímetros y en topografía cada unidad equivale a un metro.

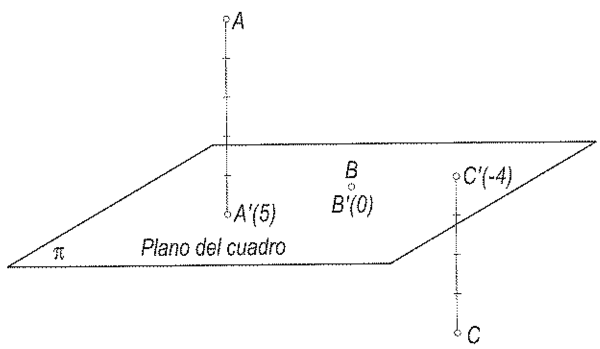


Fig. 2.

Este sistema de representación es reversible, cualidad que debe cumplir todo sistema; así, conociendo el punto *A'(5)*, para hallar el punto A del espacio, basta trazar la perpendicular por A' al plano π y llevar sobre ella 5 centímetros hacia arriba; si la cota es negativa, caso del punto C, de cota –4 y proyección C', el punto está situado por debajo del plano del cuadro.

Los puntos de cota cero, punto B por ejemplo, están en el plano de referencia.

Se llama **desnivel** entre dos puntos, o **diferencia de altitud**, la diferencia algébrica de las cotas de dichos puntos, es decir, que hay que tener en cuenta el signo de la cota de cada punto. El desnivel entre los puntos *P(8)* y *Q(–3)* es de 11 centímetros.

Cuando el plano de proyección se considera el nivel del mar, las cotas positivas se denominan **altitudes** y las cotas negativas reciben el nombre de **profundidades** o **sondas**.

El origen de altitudes en España es el nivel del mar en Alicante.

Cota de un punto es pues el número que mide la longitud del segmento proyectante, siendo este segmento el que une un punto con su proyección sobre el plano.

Se puede conseguir que todas las cotas de un dibujo sean positivas, pues basta para ello tomar suficientemente bajo el plano de comparación.

2. Representación de la recta

La proyección de la recta en este sistema está formada por las proyecciones de todos sus puntos. Conociendo las proyecciones de dos puntos de la recta, debidamente acotados, queda ésta completamente definida. La recta r (Fig. 3) tiene por proyección r', que es la recta que une los puntos *B'(2)* y *A'(5,5)*, proyecciones de los puntos B y A de la recta del espacio.

Pendiente de una recta es el valor de la tangente del ángulo que forma la recta con el plano del cuadro que es horizontal. Esta pendiente se da por el valor de la tangente del ángulo citado. En la Fig. 3 se verifica:

$$r' = r \cdot \cos \alpha$$

El desnivel –d– entre los puntos B y A vale:

$$d = AN = AA' - NA' = AA' - BB'$$

La pendiente (p) se puede dar también en tanto por ciento, así:

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AN}{BN} = \frac{d}{r'} = \frac{D}{100}$$

siendo D el desnivel del punto A con relación al B, cuando r' valga 100 unidades. Como ejemplo, supongamos que la pendiente es de 14 %; esto indica que las proyecciones B' y A' de los puntos distan 100 unidades, metros por ejemplo, y que el desnivel –d– de los puntos es de 14 unidades, también metros.

Los segmentos de una recta son proporcionales a sus proyecciones y a sus desniveles; en la Fig. 3 se observa:

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{BA}{B'A'}=\frac{CA}{C'A'} \quad \text{y también} \quad \frac{BC}{CM}=\frac{BA}{AN}$$

Traza de una recta es el punto donde la recta encuentra al plano del cuadro; en la Fig. 4, la traza de la recta r es el punto $T \equiv T'(0)$ de cota cero, que es donde se cortan la recta r y su proyección r'.

Módulo o **intervalo** de una recta es la proyección de un segmento de dicha recta cuyos extremos tienen por desnivel la unidad; por ejemplo, los puntos A y B, de cotas *1* y *2*, son los extremos de un segmento de la recta r, cuya proyección $A'(1)-B'(2)$ constituye el intervalo. En la figura se indican diversos intervalos de la recta.

Graduar una recta $r(r')$ dada por dos puntos $A'(1)$ y $E'(5)$ es dividir este segmento en tantas partes iguales como unidades valga la diferencia de cotas; en este caso la diferencia de cotas entre A y E es de 4, por tanto el segmento $\overline{A'-E'}$ se divide en cuatro partes iguales y se determinan los puntos B', C' y D' de cota entera; si graduamos la recta hacia la izquierda, tomando el segmento i del intervalo hallado, se obtiene el punto $T'(0)$, traza de la recta, y también los puntos de cota negativa.

Los triángulos $TA'A$, ANB, BMC... son iguales; tomando uno de ellos, el $TA'A$, vemos que el ángulo ATA' es el ángulo α que forma la recta con el plano de comparación, el segmento AA' es la unidad, un centímetro, y el segmento $TA' = T'A'$ es el intervalo i.

Según esto, la tangente del ángulo α será igual a la pendiente:

$$p=\operatorname{tg}\alpha=\frac{AA'}{T'A'}=\frac{1}{i}$$

lo cual indica que el intervalo y la pendiente son dos números inversos; si el intervalo de una recta es 3/2 (es decir, 1,5 centímetros), la pendiente de dicha recta vale 2/3.

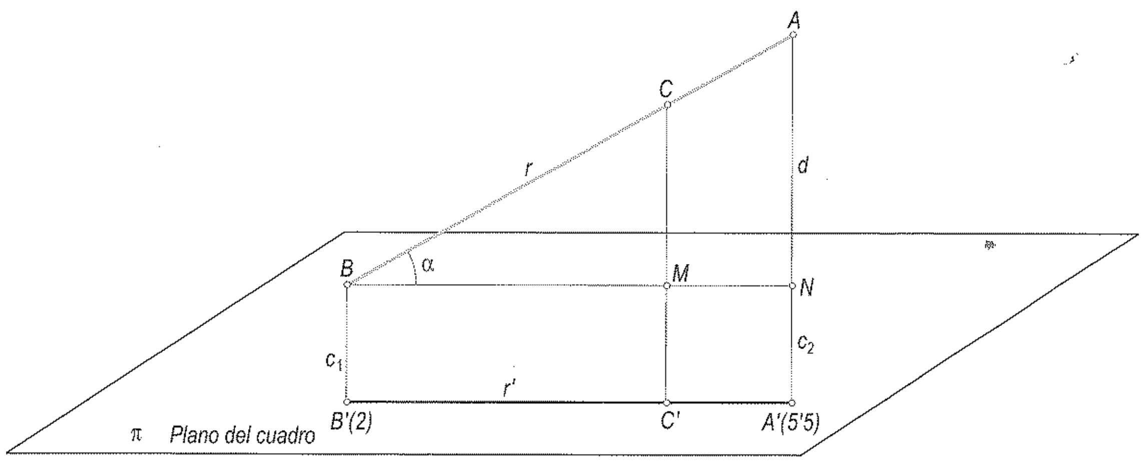


Fig. 3.

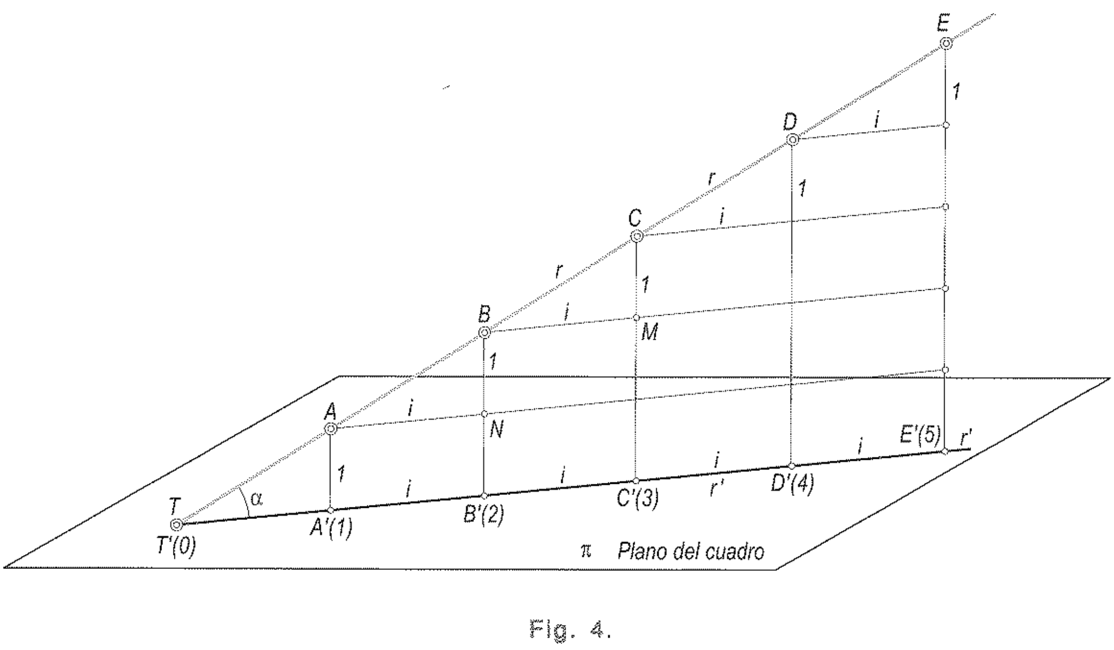


Fig. 4.

3. Representación del plano

En el sistema acotado, el plano viene determinado en general por su línea de máxima pendiente (*l.m.p.*) con relación al plano de proyección.

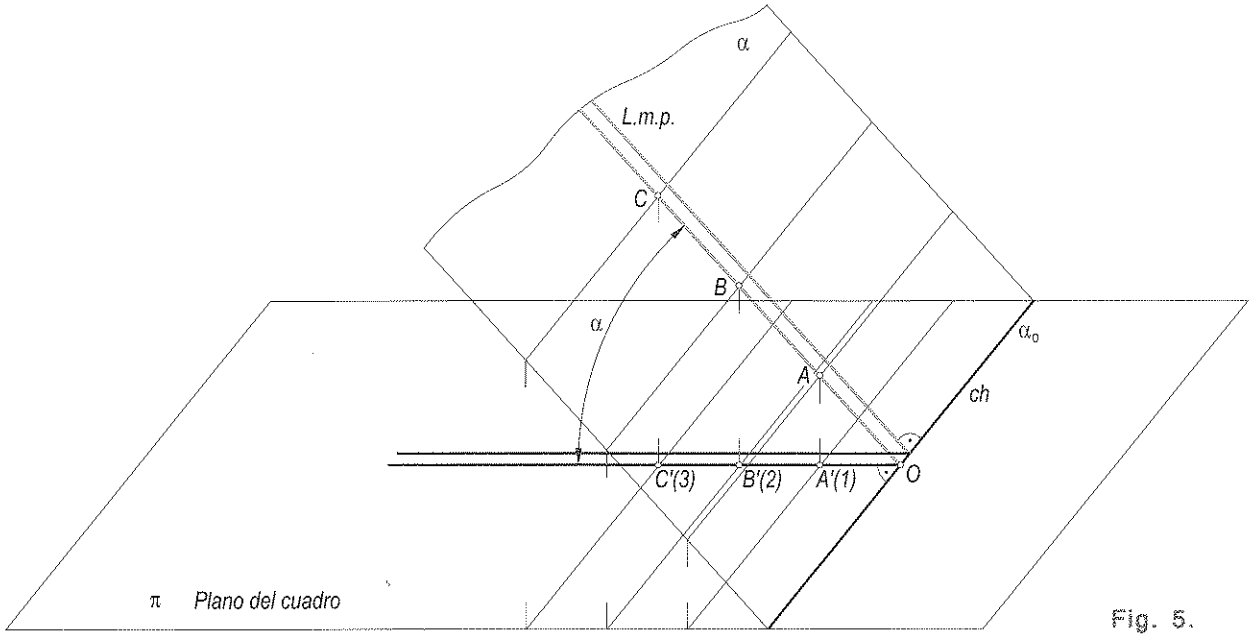


Fig. 5.

Observemos la Fig. 5. La traza del plano α con el plano π es α_0 y la *l.m.p.*, que se sabe es perpendicular a α_0, viene representada por dos rectas paralelas; tomando los puntos *A*, *B* y *C*, de cotas *1*, *2* y *3*, y trazando por ellos las paralelas a α_0, se tienen las horizontales de plano, es decir, las rectas de éste paralelas al plano π y de cota entera.

Proyectando este conjunto, se obtiene la *l.m.p.* debidamente graduada y que sigue siendo perpendicular a α_0, traza del plano y horizontal de cota cero. En la Fig. 6 se indica la forma definitiva de representar un plano por su *l.m.p.* debidamente graduada.

En la Fig. 5, el ángulo $\widehat{C\text{-}O\text{-}3}$ es el que forma el plano α con el cuadro y para obtenerlo en la Fig. 6, basta abatir la *l.m.p.*, tomando sobre *h(3)* tres unidades, y unir C_0 con *O*; la recta C_0O es la *l.m.p.* abatida y el ángulo $C'OC_0$ es el ángulo α. De la misma forma se pueden tomar dos centímetros a partir de *B'* sobre *h(2)* y unir B_0 con el punto *O*.

Un plano queda también definido por las proyecciones acotadas de dos horizontales de plano cualesquiera, ya que la *l.m.p.* es perpendicular a ellas y con dos puntos acotados se puede graduar esta *l.m.p.* Todos los puntos de una horizontal de plano tienen la misma cota.

Un plano paralelo al horizontal no tiene representación gráfica, pero se puede operar con él.

Un plano perpendicular al de proyección se representa por su traza y una letra griega. Este tipo de plano se llama **plano de perfil**, y es el que se utiliza en topografía para obtener los perfiles longitudinales y transversales de un terreno.

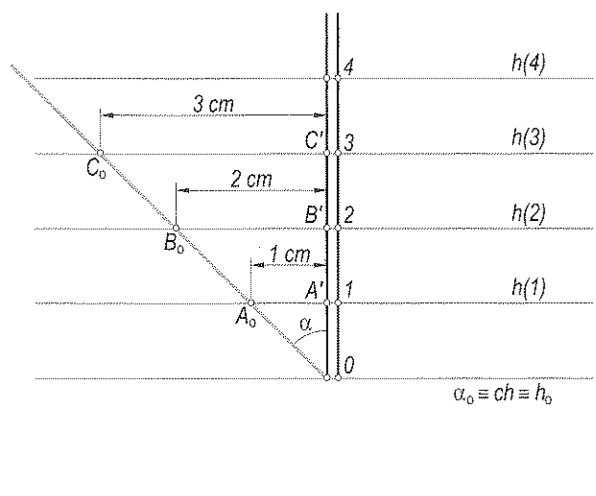


Fig. 6.

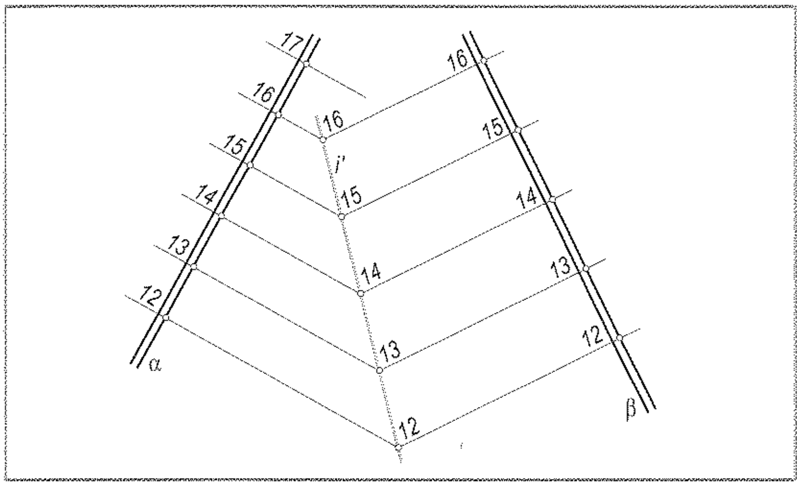


Fig. 7.

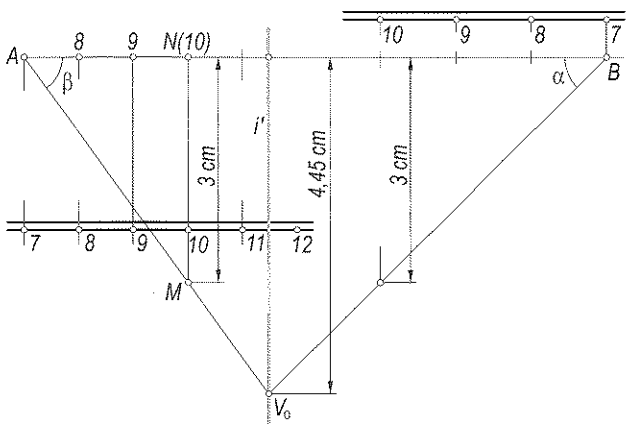


Fig. 8.

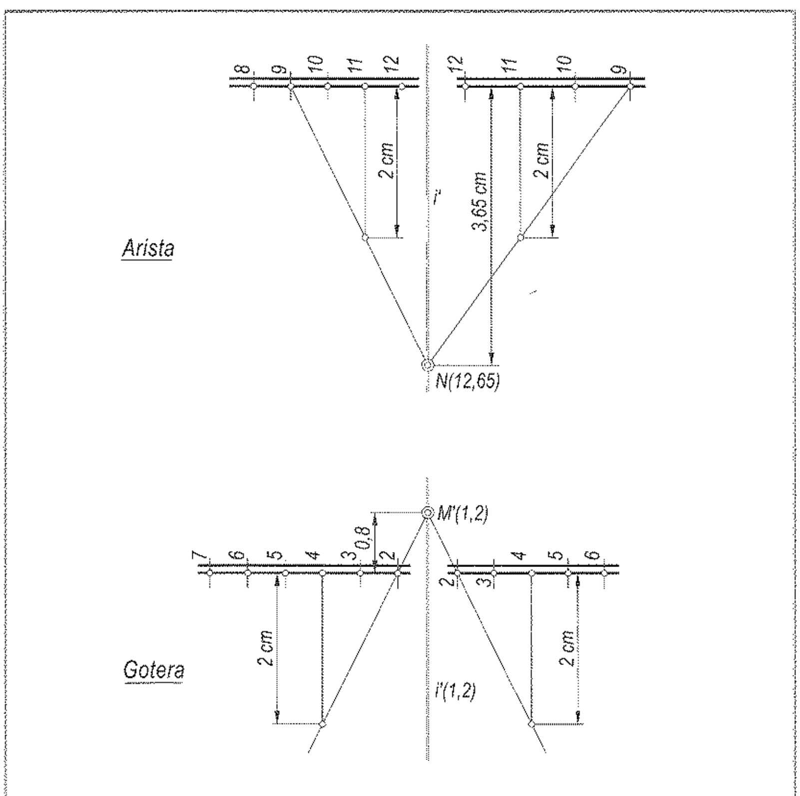


Fig. 9.

4. Intersección de planos

Sean dos planos cualesquiera definidos por su *l.m.p.* graduada (Fig. 7). La recta intersección estará formada por los puntos de intersección de las parejas de horizontales de plano de la misma cota, ya que al cortar por un plano horizontal, se obtienen las horizontales citadas en cada uno de los planos dados. Así, las horizontales de cota 16 de los planos dan el punto de cota 16 de la recta intersección *i'*.

Cuando los dos planos tienen sus *l.m.p.* paralelas en proyección, es decir, que sus trazas con el plano del cuadro son paralelas, no puede seguirse este procedimiento.

En este caso (Fig. 8) se abaten las dos líneas de máxima pendiente, según AV_0 y BV_0, como si se pretendiera hallar los ángulos α y β que los planos forman con el plano del cuadro; el punto de intersección V_0 define la recta intersección, que sabemos es horizontal en este caso; para hallar la cota de esta horizontal, se mide la distancia en centímetros del punto V_0 a la recta *AB*; esta recta *AB* es la proyección de las *l.m.p.* de los dos planos que están en un mismo plano proyectante.

Según la posición de los planos respecto al plano del cuadro, éstos formarán una "arista" o una "gotera" (Fig. 9).

Para dar una idea clara, diremos que las vertientes de los lados opuestos de un tejado de forma rectangular forman "arista"; en el caso de "gotera", vemos que las cotas de las *l.m.p.* de los planos aumentan a medida que se alejan de la intersección; lo contrario ocurre en la "arista".

El caso práctico de la intersección de planos es la determinación de las vertientes de un tejado a partir de la planta del edificio que se supone situada en la parte superior de éste, es decir, como techo del último piso.

Para hallar estas vertientes se determinan las intersecciones de cada dos planos inclinados que parten de un lado del polígono que forma la planta, partiendo de la pendiente que tengan estos planos.

Ejemplos:

1. Construcción de las pendientes de un tejado cuya planta es la de la Fig. 10:

   Fachadas principales: $p = 1/2, i = 2$

   Fachadas posteriores: $p = 3/2, i = 2/3$.

2. Fig. 11. Planta y solución en perspectiva.

Nota. En este sistema de planos acotados se puede resolver cualquier tipo de problema del espacio. Como sistema determinado y reversible que es, se pueden representar cuerpos, seccionarlos y hacer todo tipo de operaciones con ellos.

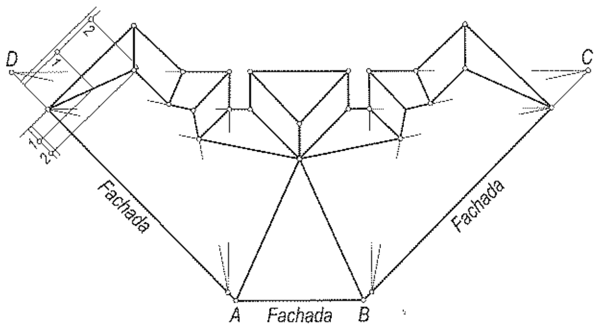


Fig. 10.

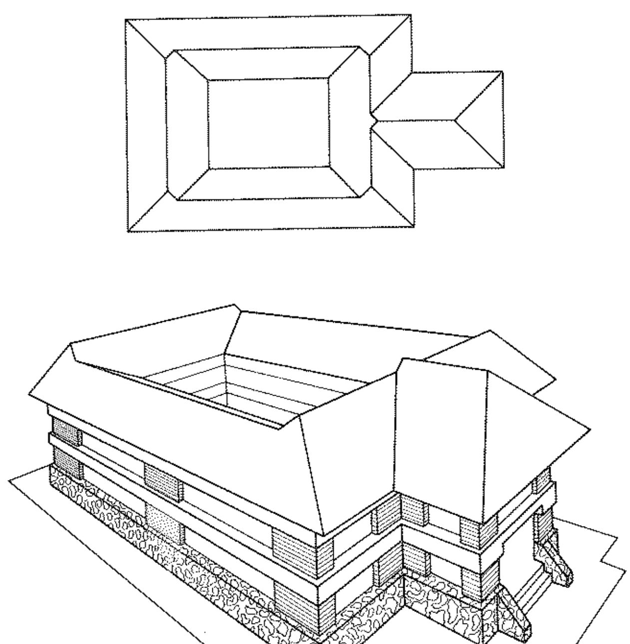


Fig. 11.

5. Superficies topográficas

La aplicación directa y más importante del sistema de planos acotados es la representación de la superficie de la Tierra; esta superficie se divide en partes pequeñas y se representan cada una por separado, ya que de esta forma se pueden considerar sin la curvatura terrestre y son prácticamente paralelas las verticales de cada uno de los puntos de la parte representada.

La superficie terrestre no es una superficie geométrica, pues no está definida por ninguna ley y por tanto no se puede representar exactamente; en la práctica, se la sustituye por otra superficie convencional llamada **superficie topográfica**.

La representación se consigue con las proyecciones acotadas de una serie de secciones horizontales producidas por planos horizontales que cortan a la superficie y que equidistan entre sí. El contorno de cada una de estas secciones es una curva llamada **curva o línea de nivel**. La separación fija entre cada dos planos se llama **equidistancia**. Todos los puntos de una misma curva de nivel tienen la misma cota o altitud.

La superficie topográfica se aproxima tanto más a la superficie terrestre cuanto más pequeña sea la equidistancia, es decir, cuanto más próximas entre sí se consideren trazadas las curvas de nivel.

Cada curva tiene una cota fija que es la distancia al nivel del mar, cuyo plano es el horizontal de proyección de cota cero.

Para hallar la intersección de una superficie topográfica con un plano se obtienen los puntos de encuentro de cada curva de nivel con la horizontal de la misma cota del plano (Fig. 12). Cuando el plano que produce la sección es un plano vertical o proyectante, la sección recibe el nombre de **perfil**.

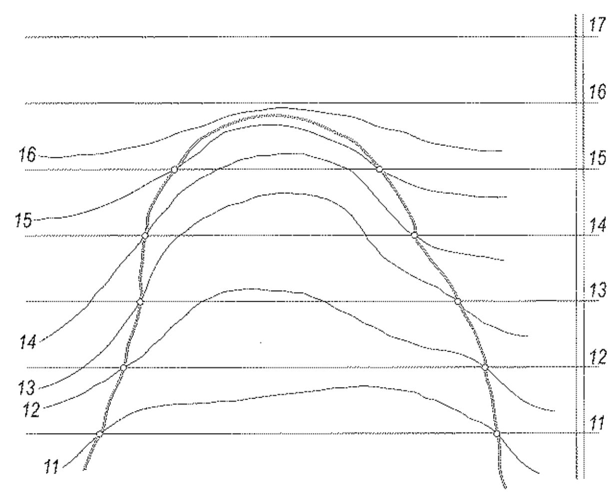


Fig. 12.

Cuando la cota de las curvas de nivel aumenta hacia dentro, el plano indica que se trata de un monte o de una colina; si la cota aumenta hacia afuera, representa un valle u hondonada.

Si el terreno tiene poca pendiente, las curvas de nivel resultan muy espaciadas, por lo que conviene intercalar otras curvas de nivel llamadas por esta razón **curvas intercalares**, que se distinguen de las ordinarias por ser de trazos.

6. Perfiles

Se ha indicado anteriormente lo que es un perfil; para construir el perfil o sección que produce en el terreno un plano vertical determinado se trazan perpendiculares a la traza del plano secante en los diversos puntos en que ésta corta a las curvas de nivel, y sobre cada perpendicular se llevan las cotas de cada punto en cuestión de la curva de nivel. Uniendo los puntos obtenidos se tiene abatido el perfil aproximado. Para la medida de las cotas de los puntos se suelen emplear escalas más pequeñas que las del plano, con objeto que resalten las diferencias de nivel pequeñas.

Problema.

Determinar el desmonte y el terraplén entre dos puntos A *y* B *en la dirección del eje de un camino de pendiente uniforme* (Fig. 13).

Se conocen las curvas de nivel y el eje *AB* del camino de pendiente constante. No hay más que abatir la sección producida en el terreno por el plano vertical que tiene por traza *AB*, para lo cual se van tomando las alturas respectivas; así, *B'B* serían 5 unidades, etc. La parte comprendida entre *B* y *N* sería desmonte y la comprendida entre *N* y *A*, terraplén. La tangente del ángulo *B'AB* es la pendiente del camino.

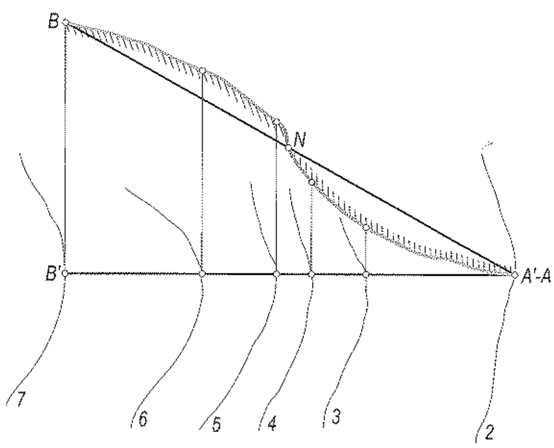


Fig. 13.

Problema.

Explanación de una superficie topográfica y perfil transversal medio de dicha explanación (Figs. 14 y 15).

Pendiente del desmonte: $p = 10/6, i = 6/10$.
Pendiente del terraplén: $p = 10/9, i = 9/10$.

La forma de la explanación es la de un rectángulo rematado por un semicírculo. Se toman las *l.m.p.* de los planos inclinados y del tronco de cono cuya base menor es el citado semicírculo y se hallan los puntos de intersección de las horizontales de plano con las curvas de nivel de igual cota.

El perfil transversal se obtiene tomando sobre el eje α_0 los puntos *C, B, A, N, M, L*, etc., y trazando perpendiculares por ellos al eje, se llevan después las cotas respectivas (Fig. 15).

7. Dibujo topográfico

El dibujo topográfico permite representar mediante curvas de nivel acotadas una parte de la superficie terrestre y, con la ayuda de símbolos, indicar los accidentes naturales del terreno y las obras artificiales hechas por la mano del hombre. Los técnicos encargados de confeccionar los planos topográficos deben estar familiarizados con los símbolos y con los métodos empleados en este tipo de planos. A título de ejemplo se indican a continuación algunos símbolos con su significado.

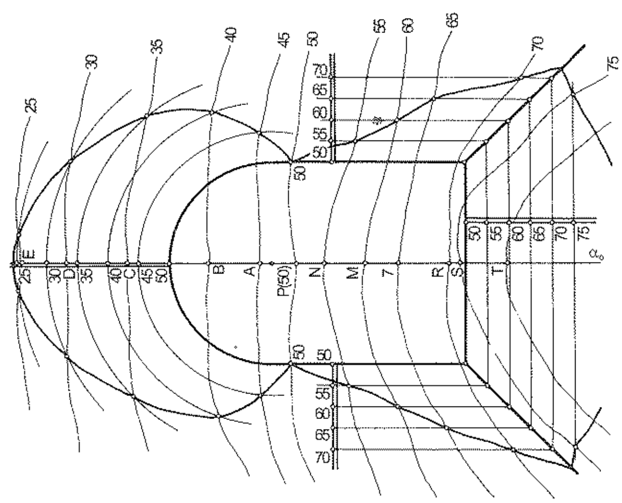


Fig. 14.

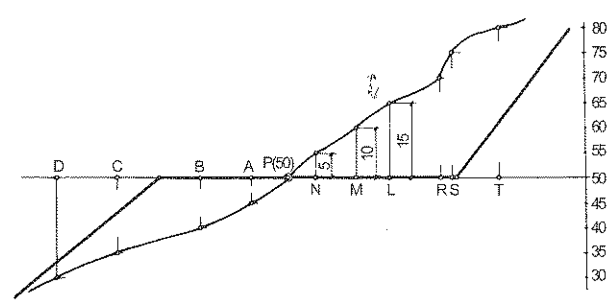


Fig. 15.

SIGNOS CONVENCIONALES

- Esclusas (rojo)
- Estación de ferrocarril (rojo)
- Estación radiotelegráfica (rojo)
- Escarpado
- Erial
- Fábrica (rojo)
- Faro de primer orden (rojo)
- Faro de segundo orden (rojo)
- Faro de tercer orden (rojo)
- Faro de orden inferior y luz de puerto (rojo)
- F.C. de vía ancha
- F.C. de doble vía ancha
- F.C. de vía estrecha o tranvía
- F.C. de vía ancha (en construcción)
- F.C. de doble vía ancha (en construcción)
- F.C. de vía estrecha o tranvía (en construcción)
- Fondeadero (negro)
- Frontera (límite de frontera) (negro)
- Fuente (rojo)
- Fuerte (rojo)
- Horno de cal
- Huerta
- Iglesia (rojo)
- Imágenes o efigies (rojo)
- Jardines (verde)
- Límite de término anejo (negro)
- Límite de término municipal (negro)
- Límite de provincia (negro)
- Línea de energía eléctrica (rojo)
- Línea telefónica (rojo)
- Línea telegráfica (rojo)
- Laguna con agua constante (azul)
- Laguna con agua no constante (azul)
- Manantial (azul)
- Marisma o terreno pantanoso (azul)
- Mina (negro)
- Molino (rojo)
- Monumento histórico o artístico (rojo)
- Monte alto (verde)
- Muro, pared o tapia (rojo)
- Monte bajo (verde)
- Naranjos y limoneros (verde)
- Olivar (verde)
- Obelisco (rojo)
- Observatorio (rojo)
- Población (rojo)
- Pontón (negro)
- Punto de altitud
- Pozo con agua
- Pozo artesiano
- Prado (verde)
- Poste kilométrico
- Presa (de fábrica) (rojo)
- Puente de piedra (rojo)
- Puente de hierro (negro)
- Puente de piedra y hierro (negro y rojo)

SISTEMA AXONOMÉTRICO

TEMA 14

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática el alumno debe tomar idea clara de la forma de proyectar los cuerpos. Se centrará el estudio en el sistema isométrico, fijando la escala isométrica. Se estudiarán las representaciones del punto, de la recta y del plano en posiciones sencillas y los problemas de intersección de planos y de recta con plano.

Está demostrado que se puede enseñar a un alumno a hacer perspectivas isométricas con una explicación no superior a dos horas, incluso para cuerpos con circunferencias y caras oblicuas. Según esto, el alumno aprenderá la forma más rápida de obtener las elipses que son proyecciones de circunferencias situadas en planos paralelos a los del triedro. Estas elipses se determinarán, fundamentalmente, por la pareja de diámetros conjugados paralelos a los ejes y se indicará la dirección que tendrían los ejes de las mismas.

Finalmente, y ya como actividades, se representarán cuerpos geométricos y piezas didácticas sencillas en perspectiva isométrica. Para adquirir precisión, algunos ejercicios se harán con instrumentos pero fundamentalmente se deben hacer con el lápiz a mano alzada.

Esta unidad temática, si el profesor sigue la metodología adecuada, podrá llevarla a buen fin a lo largo de cuatro o cinco clases, como máximo.

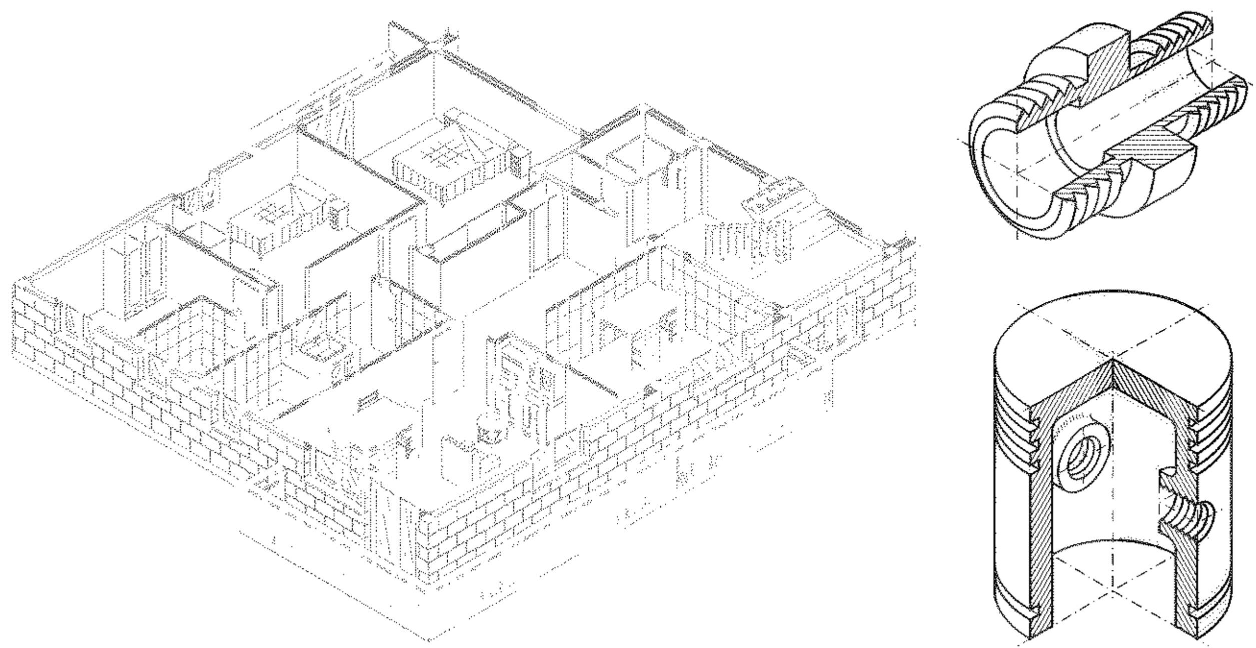


Fig. 1. Representaciones en perspectiva axonométrica.

1. Fundamentos del sistema axonométrico ortogonal

Consideremos en el espacio un triedro trirrectángulo cuyos planos vamos a nombrar por las letras *(X)(O)(Y)*, *(Z)(O)(X)* y *(Z)(O)(Y)* (Fig. 2), siendo el punto *(O)*, vértice del triedro, el **origen del sistema**.

Las aristas *(X)*, *(Y)* y *(Z)* del triedro se llaman **ejes del sistema**.

Los planos *(X)(O)(Y)*, *(X)(O)(Z)* y *(Z)(O)(Y)* de las caras del triedro se llaman **planos coordenados**.

Consideremos un punto cualquiera *(P)* del espacio y proyectémoslo ortogonalmente sobre cada una de las caras del triedro; la proyección sobre el plano *(X)(O)(Y)* es *(P')*, sobre el plano *(X)(O)(Z)* es *(P'')* y sobre el plano *(Z)(O)(Y)* es *(P''')*.

Imaginemos un cuarto plano que puede ser cualquiera con tal de que no contenga a un eje o que no sea una cara del triedro; el plano citado, que cortará por lo tanto a los tres ejes, es el que vamos a considerar como **plano del papel** o **plano del dibujo**, llamado también **plano de proyección** y más generalmente **plano del cuadro**.

Proyectemos ortogonalmente sobre el plano del cuadro elegido el conjunto que tenemos en el espacio y veremos que el origen *(O)* proyecta en el punto *O*, los ejes se proyectan según tres rectas *X*, *Y* y *Z* concurrentes en *O* y los puntos *(P)*, *(P')*, *(P'')* y *(P''')* lo hacen en *P*, *P'*, *P''* y *P'''*.

Obsérvese que los segmentos $\overline{(P)\text{-}(P')}$, $\overline{(P)\text{-}(P'')}$ y $\overline{(P)\text{-}(P''')}$ son paralelos a los ejes *(Z)*, *(Y)* y *(X)* y se proyectan paralelamente a los ejes *Z*, *Y* y *X*, respectivamente; el paralelepípedo que se forma en el espacio y dibujado claramente en la figura se proyecta como puede apreciarse fácilmente.

Los segmentos $\overline{P\text{-}P'''}$, $\overline{P'\text{-}M}$ y $\overline{P''\text{-}N}$ son paralelos al eje *X*; $\overline{P'\text{-}L}$, $\overline{P\text{-}P''}$ y $\overline{P'''\text{-}N}$ son paralelos al eje *Y* y $\overline{P\text{-}P'}$, $\overline{P'''\text{-}M}$ y $\overline{P''\text{-}L}$ son paralelos al eje *Z*.

Los ejes, ya en proyección, forman unos ángulos entre sí que se han designado por las letras ε, ω y ρ; $\hat{\varepsilon} = \widehat{XOY}$, $\hat{\omega} = \widehat{XOZ}$, $\hat{\rho} = \widehat{ZOY}$; según esto, $\hat{\varepsilon} + \hat{\omega} + \hat{\rho} = 360°$.

El plano del cuadro se designa por una letra griega, en este caso π.

En la parte inferior de la figura se representa el conjunto proyectado sobre el cuadro tal y como queda realmente. Como puede verse, el punto *P* es la proyección directa ortogonal del punto del espacio sobre el cuadro y constituye realmente la perspectiva axonométrica, es decir, cuando dibujamos un cuerpo en este sistema, lo que representamos es la proyección directa o perspectiva axonométrica verdadera.

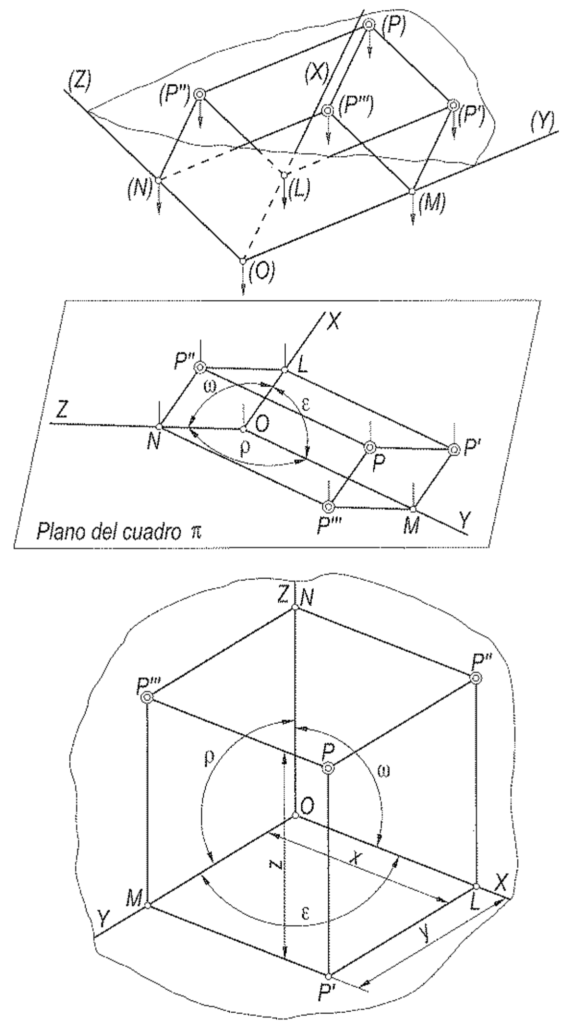


Fig. 2.

Los puntos *P'*, *P''* y *P'''* son proyecciones de proyecciones, pues resultan de proyectar los puntos *(P')*, *(P'')* y *(P''')*, que son a su vez proyecciones previas, así se llaman, sobre las caras del triedro en el espacio.

En total son cuatro las proyecciones axonométricas, una directa ortogonal y otras tres laterales sobre los planos del sistema, pero todas ellas situadas en un solo plano, que es el del cuadro o del dibujo.

El punto *P* está en proyección a las distancias *x*, *y*, *z* de los planos *ZOY*, *ZOX* y *XOY*, respectivamente, siendo éstas sus coordenadas cartesianas ortogonales.

De la figura deducimos que, dadas dos proyecciones cualesquiera de las cuatro que tiene un punto, se pueden hallar las otras dos, o, lo que es lo mismo, un punto queda definido en el espacio por dos de sus proyecciones, siendo forzadas las otras dos; así, por ejemplo, conocemos *P* y *P'*; por *P'* trazamos las paralelas a los ejes *X* e *Y* a los que cortan en los puntos *L* y *M*; por *L* y *M* trazamos las paralelas al eje *Z*, y por *P*, las paralelas a los ejes *X* e *Y*, que cortan a las anteriores en *P''* y *P'''*, que son las proyecciones que buscábamos.

Para construir la perspectiva de un cuerpo o pieza, se comienza por un punto que sea, por ejemplo, una esquina, por él se trazan las paralelas a los ejes y sobre éstas se miden la anchura, la altura y la profundidad, completando después el paralelepípedo por medio de paralelas.

Pasemos a la Fig. 3.

Tenemos de nuevo el triedro en el espacio con los ejes *(X)*, *(Y)* y *(Z)* al que cortamos por un plano π paralelo al cuadro, plano que podemos considerar como verdadero cuadro; la sección que produce en el triedro el plano π es el triángulo *(A)(B)(C)*; los puntos *(A)*, *(B)* y *(C)* son los de intersección de los ejes con el cuadro y los lados del triángulo *ABC*, rectas llamadas π_1, π_2 y π_3, son las trazas o intersecciones del cuadro con las caras del triedro.

Proyectamos ortogonalmente el conjunto sobre el plano π' y tenemos el punto *O* como proyección del origen *(O)* y las rectas *X*, *Y* y *Z* como proyecciones de las aristas *(X)*, *(Y)* y *(Z)*.

En la parte inferior de la figura hemos representado los ejes *X*, *Y* y *Z* proyectados sobre el plano π' que viene definido por el triángulo de trazas *ABC* y lados π_1, π_2 y π_3.

Los ejes *X*, *Y* y *Z* resultan perpendiculares a los lados *BC*, *CA* y *AB*, respectivamente.

El triángulo *ABC* de trazas del plano del cuadro con el triedro se llama **triángulo fundamental**, pues su conocimiento es dato suficiente para que quede definido un sistema axonométrico; conocido el triángulo *ABC*, los ejes se proyectan según las alturas de dicho triángulo; los pies de las alturas, puntos *H*, *I* y *J*, nos definen el triángulo órtico del *ABC*, siendo los ejes las bisectrices de los ángulos de dicho triángulo.

En la perspectiva convencional de la Fig. 3 se indica que los ángulos $\widehat{(C)H(A)}$, $\widehat{(A)J(B)}$ y $\widehat{(B)I(A)}$ son rectos. El segmento $\overline{COH}$ es la traza con el cuadro π del plano proyectante ortogonal del eje *Z*; el segmento $\overline{(O)H}$ por estar en *XOY* y pasar por *(O)* es perpendicular al eje *Z* y por lo tanto el triángulo *(C)(O)H* es rectángulo en *(O)*; la recta *(O)H* es la línea de máxima pendiente de *XOY* con el cuadro y, por lo tanto, α_1 es el ángulo que forma el plano *XOY* con el cuadro; trazando por *(O)* la paralela a $\overline{(C)H}$ se tiene también el ángulo α_1, alterno interno del $\widehat{(C)H(O)}$. El ángulo $\hat{\gamma} = \widehat{H(C)(O)}$ es el ángulo que forma el eje *Z* con el cuadro.

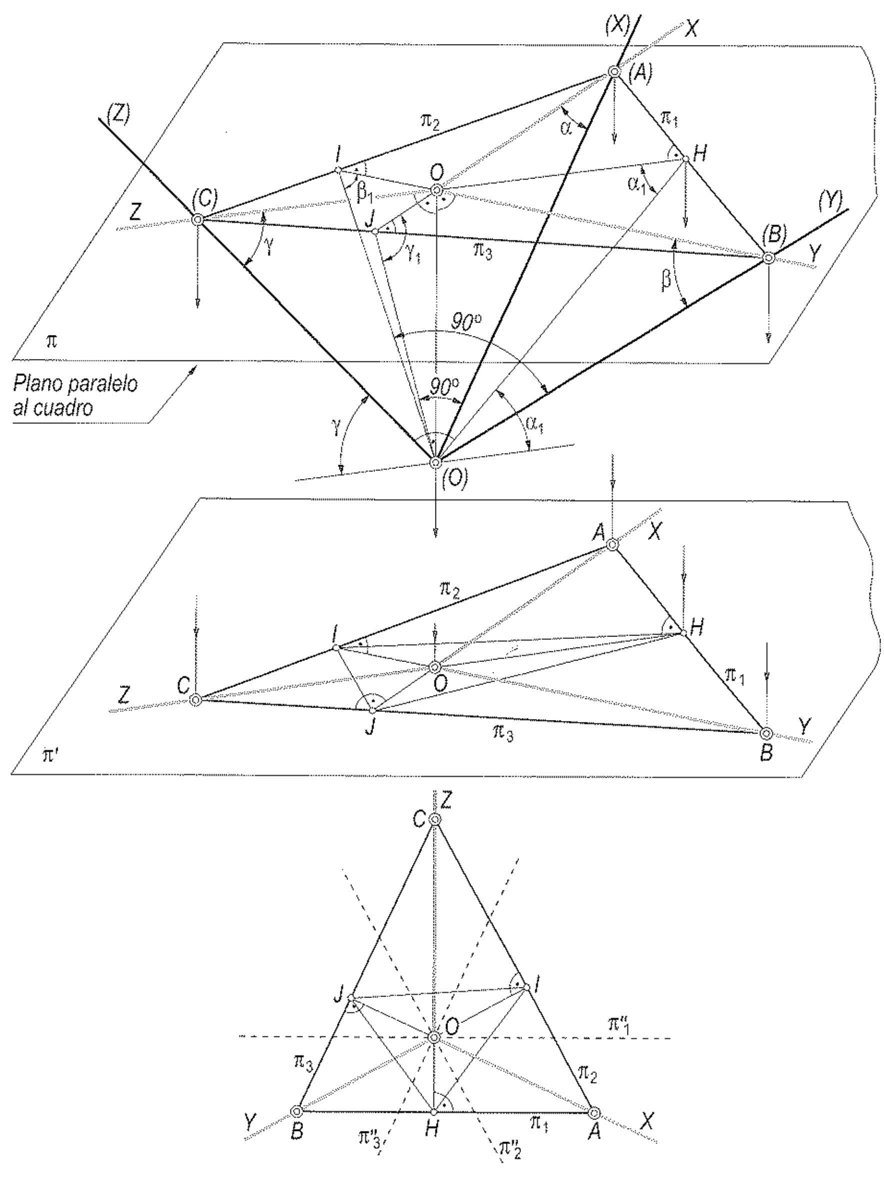


Fig. 3.

Con igual razonamiento deducimos lo siguiente:

$\alpha = \widehat{J(A)(O)}$ ángulo del eje *X* con el cuadro.

$\gamma_1 = \widehat{(A)J(O)}$ ángulo del plano *ZOY* con el cuadro.

$\beta = \widehat{I(B)(O)}$ ángulo del eje *Y* con el cuadro.

$\beta_1 = \widehat{(B)I(O)}$ ángulo del plano *XOZ* con el cuadro.

También son rectángulos en *(O)* los triángulos *(A)(O)J* e *I(O)(B)*.

Cuando suponemos que el plano del cuadro pasa por el origen *(O)*, el triángulo *ABC* se reduce a un punto, dicho origen, y las trazas del cuadro con los planos del sistema son las tres rectas π''_1, π''_2 y π''_3 que pasan por *O* y son paralelas a π_1, π_2 y π_3, respectivamente, o lo que es lo mismo, perpendiculares a los ejes.

2. Notaciones

Los ejes se designan por: X, Y y Z.

Un punto del espacio se designa por una letra o por un número: $A(A'\text{-}A''\text{-}A''')$ ó $3(3'\text{-}3''\text{-}3''')$, siendo:

A: la proyección directa.

A': la proyección sobre el plano XOY.

A'': la proyección sobre el plano XOZ.

A''': la proyección sobre el plano YOZ.

Una recta se designa por una letra minúscula: $r(r'\text{-}r''\text{-}r''')$ siendo r la proyección directa y r', r'' y r''' son las proyecciones sobre los planos del sistema.

Un plano se designa por una letra griega: $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2\text{-}\alpha_3)$ siendo α_1, α_2 y α_3 las trazas del plano α con los planos del sistema.

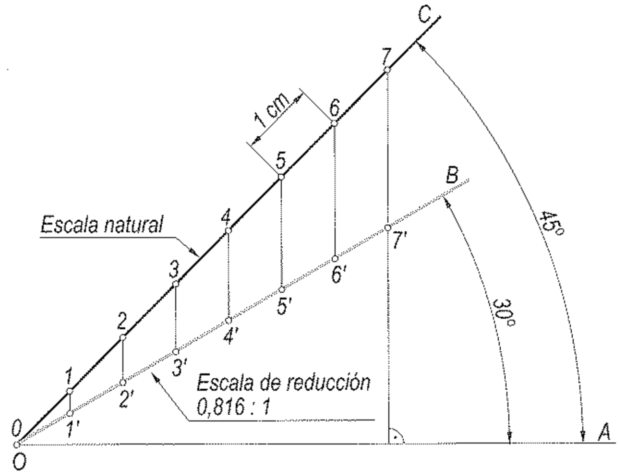


Fig. 4.

3. Sistema axonométrico isométrico

Si los tres ejes forman el mismo ángulo con el plano del cuadro, se proyectan formando ángulos de 120° entre sí.

En este caso, el triángulo fundamental ABC de la Fig. 3 es equilátero y el sistema se llama "isométrico" (igual medida), dado que el coeficiente de reducción es el mismo para los tres ejes.

Si dos ejes forman el mismo ángulo con el cuadro, el sistema se llama "dimétrico" (dos medidas), y si los ejes forman ángulos diferentes con el cuadro, el sistema se llama "trimétrico" (tres medidas), y habría un coeficiente de reducción para cada eje.

En este estudio nos limitamos al sistema axonométrico isométrico por ser el más sencillo y rápido.

4. Escala isométrica (Figs. 4 y 5)

En el sistema axonométrico isométrico, toda recta, digamos arista de un cuerpo o pieza, que sea paralela a uno de los ejes del sistema, al proyectarla sobre el cuadro, se reduce en la misma proporción que aquéllos, es decir, que su proyección se obtiene multiplicando la longitud real por el valor del coseno de 35° 16', que es el ángulo que forma cualquiera de los ejes isométricos con el plano de proyección o cuadro.

La escala de reducción isométrica, común para los tres ejes, es: **0,816**:1,

siendo el valor del cos 35° 16' = 0,816.

Para construir la escala isométrica, tomamos una recta OA (Fig. 4), a partir de O trazamos las rectas OB y OC que formen 30° y 45° con OA y sobre la recta OC dibujamos la escala natural; proyectando esta escala natural sobre OB según la dirección perpendicular a OA, se tiene en OB la escala isométrica 0,816:1; es decir, una medida real puesta sobre OC se proyecta en el cuadro según el valor correspondiente que tenga en OB.

En la Fig. 5 se dibuja la misma construcción de la escala isométrica, pero ya sobre la proyección de los ejes. Trazamos una recta cualquiera π_1 perpendicular a la proyección del eje Z, la cual será la traza con XOY de un plano paralelo al del cuadro; esta traza corta en A y B a los ejes X e Y, respectivamente; el triángulo AOB es rectángulo en O en el espacio, por lo que abatido este triángulo sobre el cuadro π nos da el triángulo en verdadera magnitud AO_0B, siendo $\overline{AB}$ la hipotenusa, O_0 el vértice abatido en la prolongación de Z y sobre la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro D.

Sobre uno de los catetos $\overline{O_0A}$ o $\overline{B_0O}$ construimos la escala natural y referimos sobre el eje correspondiente; en la figura se ha tomado sobre $\overline{O_0A}$ y la escala isométrica se obtiene sobre el eje X, donde pueden verse los centímetros reducidos.

En isométrico y ya aplicado a la perspectiva de piezas en el dibujo industrial, se puede no considerar el acortamiento o reducción que sufren las rectas isométricas, representándolas directamente en proyección con la medida real que tengan en el espacio y de esta forma conseguiremos la perspectiva de una pieza mayor pero semejante a la dada.

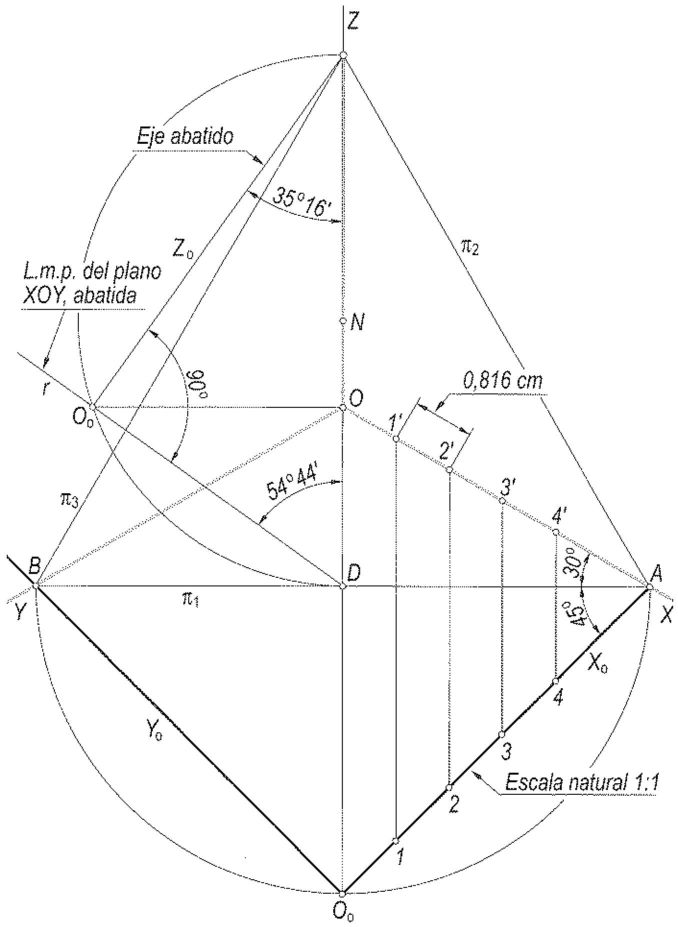


Fig. 5.

5. Representación del punto

Los tres planos del sistema, al cortarse, dividen al espacio en ocho triedros. Para designar cada triedro consideramos los dos sentidos + y – de cada eje a partir del origen.

En la Fig. 6 se representan los puntos A, B, C y D.

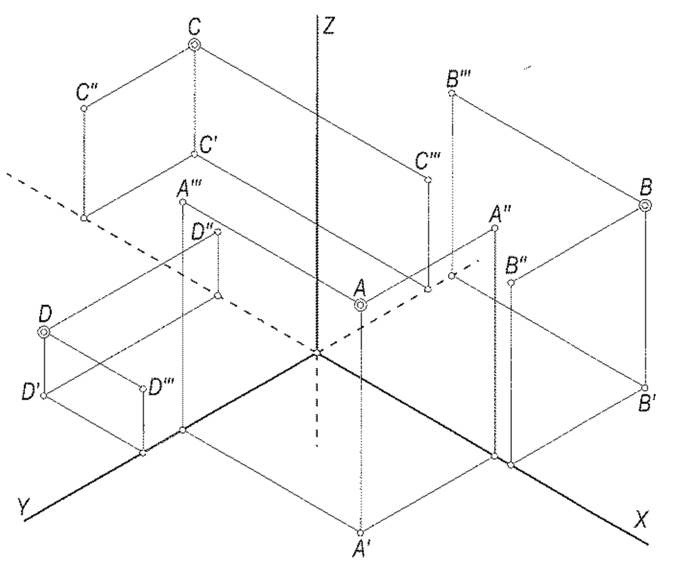


Fig. 6.

Punto A: en el triedro $+X$, $+Y$, $+Z$.

Punto B: en el triedro $+X$, $-Y$, $+Z$.

Punto C: en el triedro $-X$, $-Y$, $+Z$.

Punto D: en el triedro $-X$, $+Y$, $+Z$.

6. Proyecciones de una recta (Fig. 7)

Una recta en el espacio queda definida conociendo dos de sus puntos. En la figura, dados dos puntos P-P' y Q-Q' por dos de sus proyecciones, la recta que definen se obtiene uniendo las proyecciones homónimas de los puntos. La proyección directa r pasa por P y Q y la proyección horizontal r' pasa por P' y Q'.

De lo dicho anteriormente se deduce que para situar un punto en una recta, las proyecciones del punto deben estar sobre las proyecciones homónimas de la recta.

Conociendo dos proyecciones cualesquiera de la recta, ésta queda definida y se pueden determinar las restantes como se indica en el apartado siguiente.

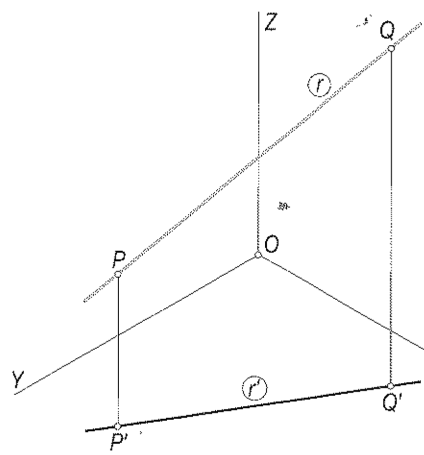


Fig. 7.

7. Proyecciones de una recta oblicua. Trazas de la recta (Fig. 8)

Supongamos una recta cualquiera t oblicua respecto a los planos de proyección. Como hemos dicho anteriormente, la recta queda definida conociendo dos cualesquiera de sus proyecciones.

Sean t y t' las dos proyecciones conocidas. El punto T_1-T'_1 es la traza de la recta con el plano XOY por ser donde se cortan dichas proyecciones. Refiriendo T'_3, punto de corte de t' y el eje Y, a T_3-T'''_3 sobre la proyección t, se obtiene la traza tercera T_3 de la recta con el plano ZOY. De igual forma, prolongando t' hasta que corte en T'_2 al eje X y refiriendo T'_2 a T_2-T''_2 sobre la proyección t, se obtiene la traza segunda con el plano XOZ.

Como se ve, en los puntos trazas, primera, segunda y tercera, se cortan la proyección directa de la recta y la proyección primera, segunda y tercera, respectivamente.

En la figura se observa la forma de obtener las proyecciones t'' y t''' de la recta conociendo ya las proyecciones de las tres trazas que son puntos situados sobre los planos; así, por ejemplo, t'' viene definida por los puntos T''_1, T''_2 y T''_3.

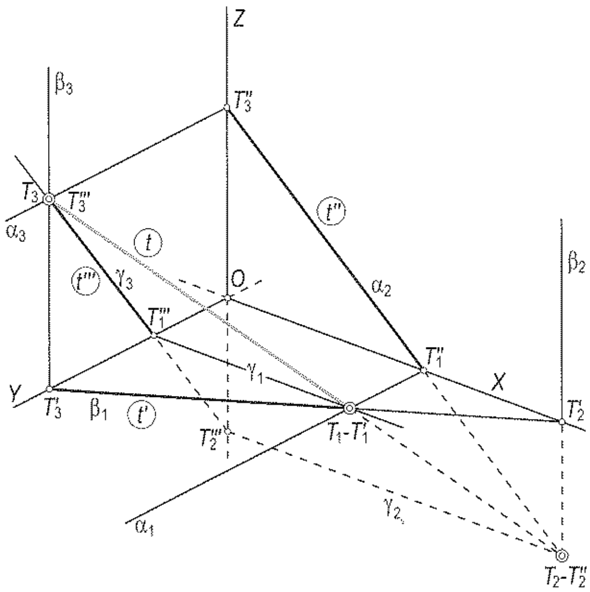


Fig. 8.

Cuando se conocen otras dos proyecciones, en vez de la directa y la horizontal, siguiendo los pasos de la figura se obtienen con sencillez y de la misma forma las restantes.

Planos proyectantes de la recta son aquellos que la proyectan sobre cada uno de los planos de proyección. El plano proyectante de la recta sobre el cuadro o del dibujo tiene por traza la proyección directa t de la recta. El plano proyectante sobre el XOY es el plano $\beta(\beta_1\text{-}\beta_2\text{-}\beta_3)$ y sobre los planos XOZ y ZOY son los planos $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2\text{-}\alpha_3)$ y $\gamma(\gamma_1\text{-}\gamma_2\text{-}\gamma_3)$ respectivamente.

Obsérvese que las proyecciones t', t'' y t''' se confunden respectivamente con β_1, α_2 y γ_3, trazas de los planos proyectantes de la recta con los planos del triedro sobre el que proyectan a dicha recta.

8. Recta paralela al plano *XOY* (Fig. 9)

La recta *t(t'-t''-t''')* es paralela al plano XOY porque sus proyecciones directa t y horizontal t' son paralelas y, por lo tanto, no tiene traza horizontal; sus proyecciones t'' y t''' se cortan en el mismo punto $T'''_2 \equiv T''_3$ del eje Z; en la figura se indican todas las proyecciones y todas las trazas de la recta.

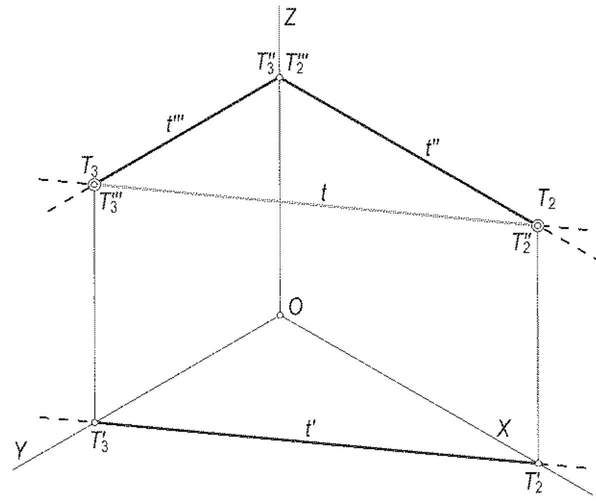


Fig. 9.

9. Recta paralela al plano *XOZ* (Fig. 10)

Razonamos como en el caso anterior. Si una recta es paralela a un plano, no tiene traza con él y, por tanto, la proyección directa r y la proyección r'' sobre el plano ZOX han de ser paralelas; de esta forma, el punto traza R_2 es impropio.

Las proyecciones r' y r''' son paralelas, respectivamente, a los ejes X y Z, ya que la recta está en el plano β_1-β_3 paralelo al ZOX. Las dos trazas de la recta son los puntos $R_1(R'_1\text{-}R''_1\text{-}R'''_1)$ y $R_3(R'_3\text{-}R''_3\text{-}R'''_3)$. La recta r dista del plano ZOX el segmento R_1-R''_1.

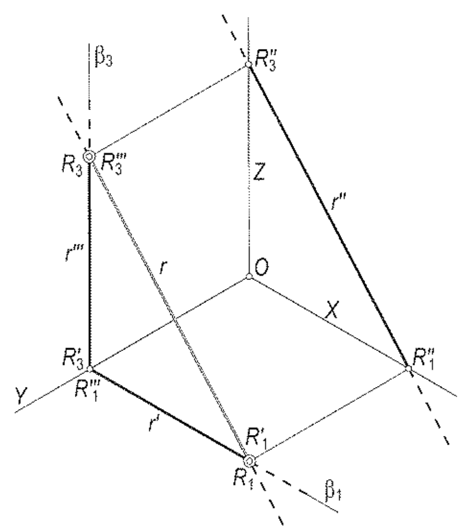


Fig. 10.

10. Recta paralela al plano *YOZ* (Fig. 11)

Se trata en este caso, como en el anterior, de una de las rectas llamadas *frontales* por estar situadas en un plano paralelo a uno de los planos verticales del sistema, los planos ZOX y ZOY.

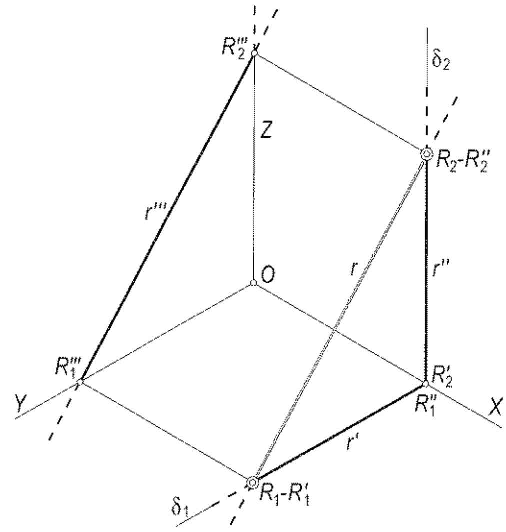


Fig. 11.

La proyección directa r y la proyección r''' son paralelas; r' y r'' se cortan en un punto del eje X; sólo tiene dos trazas, R_1 y R_2, con los planos XOY y ZOX respectivamente, siendo las proyecciones de estas trazas los puntos $R_1(R'_1-R''_1-R'''_1)$ y $R_2(R'_2-R''_2-R'''_2)$.

11. Recta paralela al eje X (Fig. 12)

La proyección directa r de la recta, así como las proyecciones r' y r'' sobre los planos XOY y ZOY, son paralelas al eje X. La recta en el espacio es perpendicular al plano ZOY y por lo tanto su proyección sobre este plano es un punto que llamamos r'''; esta recta sólo tiene una traza, pues sólo corta al plano ZOY, y es el punto $R_3(R'_3-R''_3-R'''_3)$, coincidente con r'''.

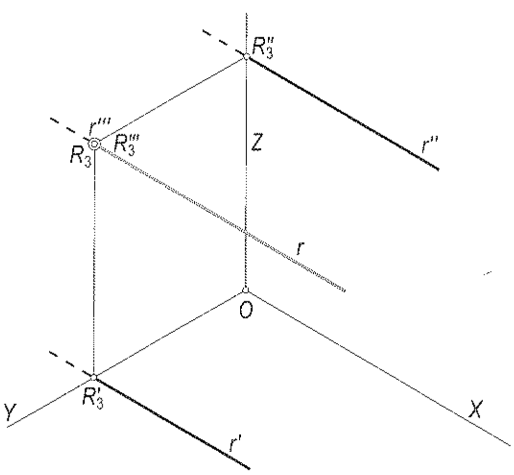


Fig. 12.

12. Recta paralela al eje Y (Fig. 13)

La proyección directa s de la recta, así como las proyecciones s' y s''' sobre los planos XOY y ZOY, son paralelas a la proyección del eje Y. La recta es perpendicular al plano ZOX y por lo tanto su proyección sobre este plano es el punto s''; sólo tiene una traza, que es el punto $S_2(S'_2-S''_2-S'''_2)$, donde corta al plano ZOX, coincidente con s''.

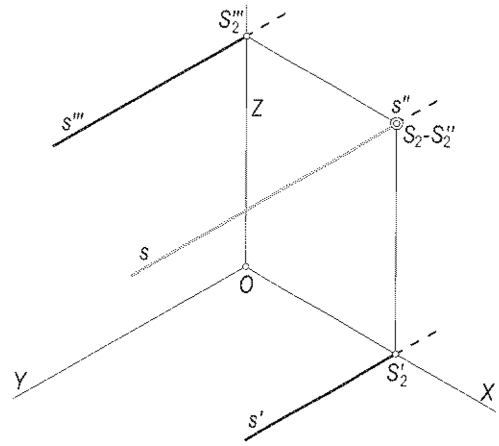


Fig. 13.

13. Recta paralela al eje Z (Fig. 14)

La recta $t(t'-t''-t''')$ es paralela al eje Z, siendo su proyección horizontal el punto t' y el resto de las proyecciones t, t'' y t''' son paralelas al eje Z. No tiene traza más que con el plano XOY, punto T_1.

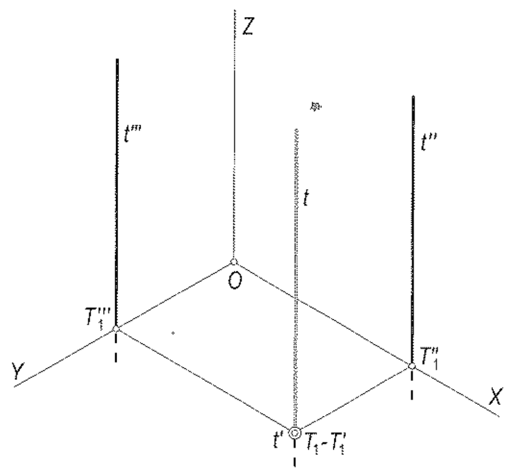
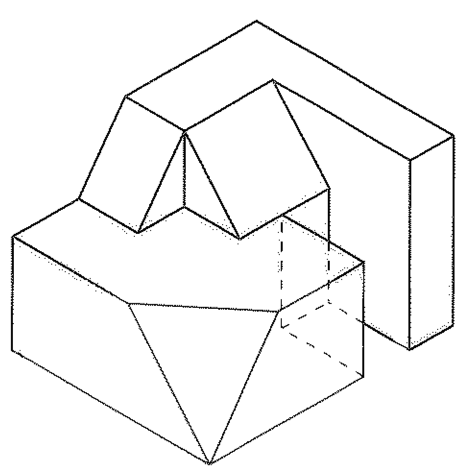


Fig. 14.



Pieza en perspectiva axonométrica cuyas aristas son rectas horizontales, frontales o de punta.

14. Representación del plano (Fig. 15)

Como en otros sistemas de representación, en el sistema axonométrico un plano viene definido de la forma más sencilla por medio de sus trazas o rectas según las cuales corta a los planos del triedro.

Un plano oblicuo corta a los planos del sistema según tres rectas que es lógico se corten dos a dos en un punto de cada eje; así, en la **Fig. 15**, la traza del plano α con el plano XOY es α_1, que corta en A al eje X y en B al eje Y; la traza con el plano ZOX es α_2, que corta en A al eje X y en C al eje Z, e igualmente la traza con el plano ZOY es α_3, que pasa por los puntos B y C. De lo dicho se deduce que dos trazas cualesquiera definen un plano, pues son dos rectas de él y la tercera traza es forzada. El triángulo ABC cuyos vértices son los puntos donde el plano corta a los ejes, se llama *triángulo de trazas*.

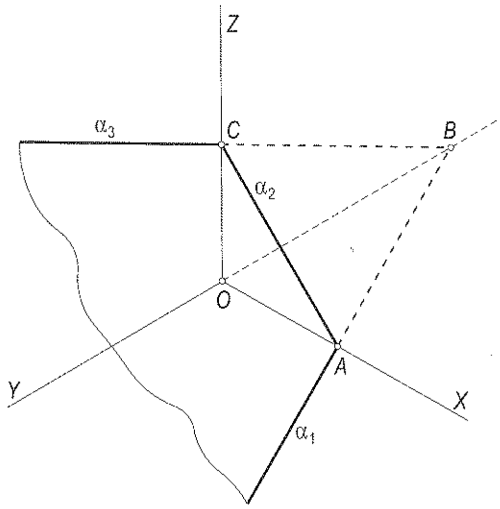


Fig. 15.

En las **Figs.** 16, 17 y 18 se indican otras posiciones de planos oblicuos cualesquiera que se obtienen variando la posición de los puntos A, B y C. La línea a pulso se ha dibujado para dar al lector una mayor sensación de realidad.

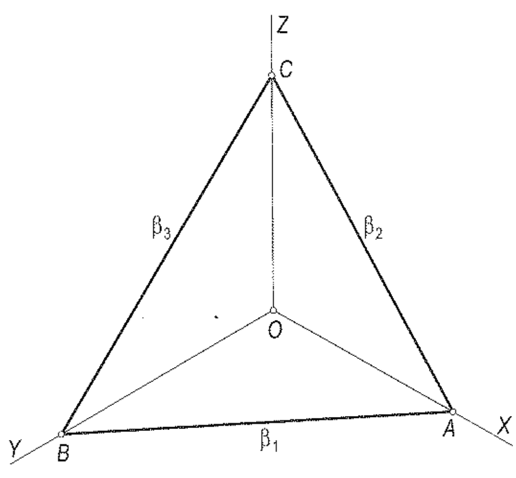


Fig. 16.

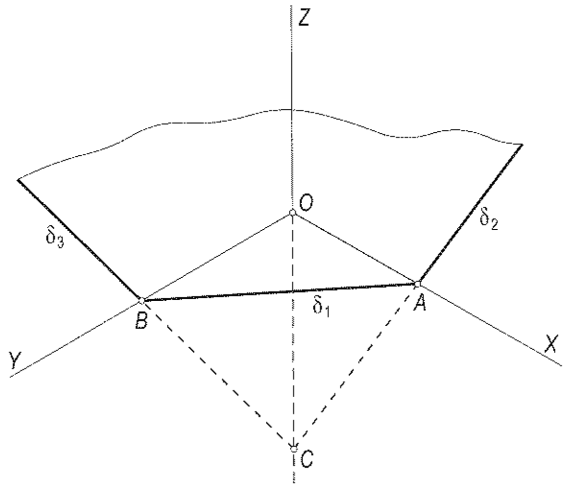


Fig. 17.

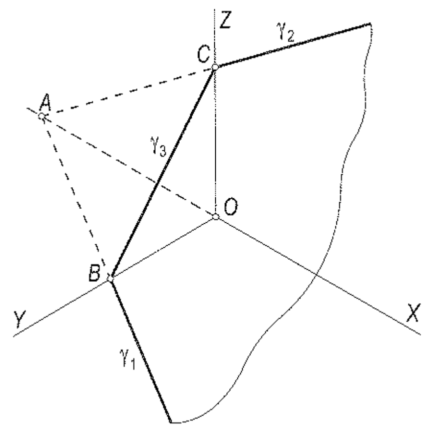


Fig. 18.

15. Plano paralelo al eje X (Fig. 19)

El plano α_1-α_2-α_3 es paralelo al eje X por tener las trazas α_1 y α_2 paralelas a dicho eje; la traza α_3 une los puntos B y C donde α_1 y α_2 cortan a los ejes Y y Z. Este plano es proyectante sobre el plano ZOY.

El punto A donde el plano corta el eje X es impropio en este caso.

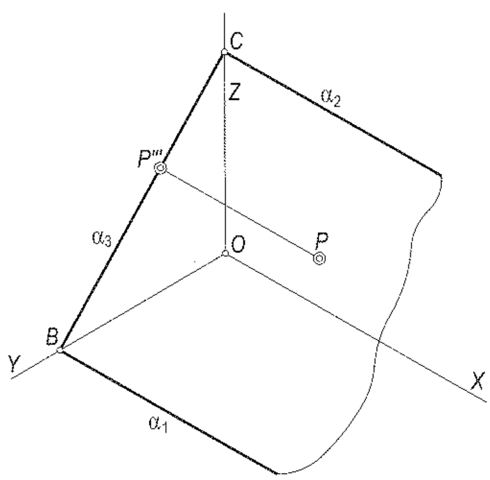


Fig. 19.

16. Plano paralelo al eje *Y* (Fig. 20)

El plano $\beta(\beta_1\text{-}\beta_2\text{-}\beta_3)$ es paralelo al eje *Y*, pues tiene sus trazas β_1 y β_3 paralelas a dicho eje. Todo punto, tal como *P-P''*, que tenga su proyección *P''* sobre β_2 pertenece al plano, ya que éste es proyectante sobre el *ZOX*.

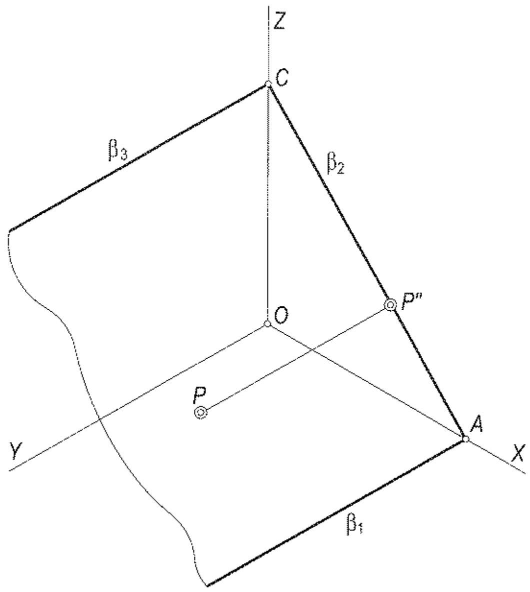


Fig. 20.

17. Plano paralelo al eje *Z* (Fig. 21)

El plano α es paralelo al eje *Z*, pues, como en los casos anteriores, tiene dos trazas α_2 y α_3 paralelas a dicho eje. Este plano es proyectante horizontal, por lo cual todos los puntos de él, tal como el *P*, se proyectan horizontalmente en *P'* sobre su traza horizontal α_1.

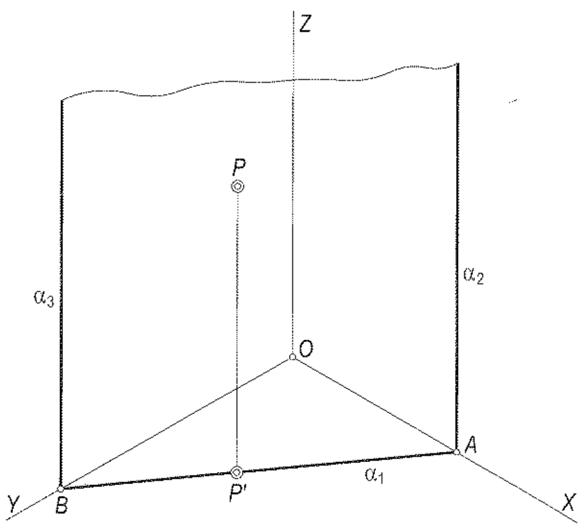


Fig. 21.

18. Plano paralelo al plano *XOY* (Fig. 22)

El plano $\beta(\beta_2\text{-}\beta_3)$ de la figura es paralelo al *XOY*, es decir, es horizontal, de cota *OT*; corta en el punto *T* al eje *Z*. El plano es perpendicular al eje *Z* y, por lo tanto, proyectante sobre los planos *ZOX* y *ZOY*; según esto, las proyecciones segunda y tercera de los puntos, rectas y figuras contenidos en este plano estarán confundidas con las trazas β_2 y β_3, respectivamente; estas trazas son paralelas a los ejes *X* e *Y* y la traza con el plano *XOY* es impropia.

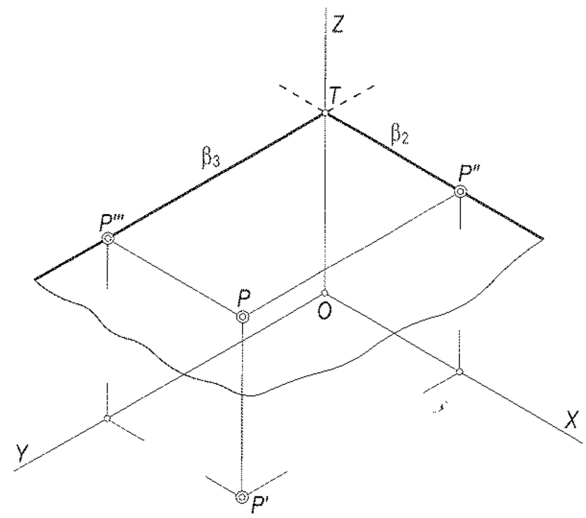


Fig. 22.

19. Plano paralelo al plano *XOZ* (Fig. 23)

El plano $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_3)$ es paralelo al plano *ZOX*, siendo sus trazas propias α_1 y α_3 paralelas a los ejes *X* y *Z*, respectivamente. La traza α_2 es impropia. A este plano podemos aplicar todo lo dicho en el caso anterior, ya que por ser perpendicular al eje *Y* es doblemente proyectante.

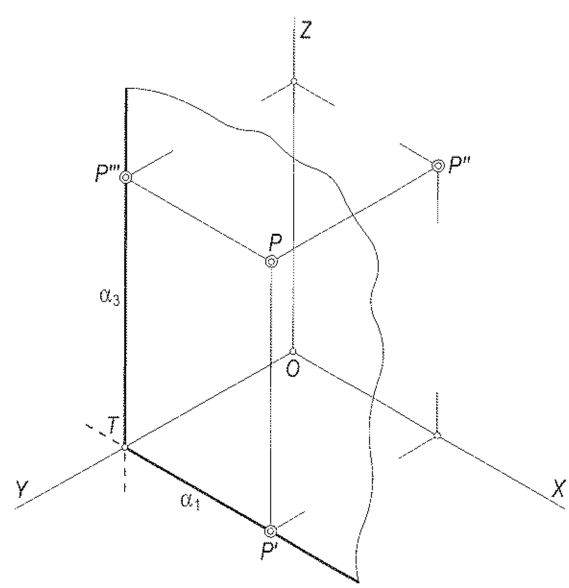


Fig. 23.

20. Plano paralelo al plano *YOZ* (Fig. 24)

Indicamos lo mismo que en los dos casos anteriores. Todo plano paralelo al *ZOY* tiene por trazas con los planos *XOY* y *ZOX* dos rectas paralelas a los ejes *Y* y *Z*, respectivamente. En la figura, el plano α_1-α_2 es de este tipo y corta al eje *X* en el punto *T*; la traza α_3 es impropia. El plano es proyectante sobre el *XOY* y sobre el *ZOX* y por ello las proyecciones de todos los elementos geométricos contenidos en él sobre los planos citados estarán sobre las trazas α_1 y α_2.

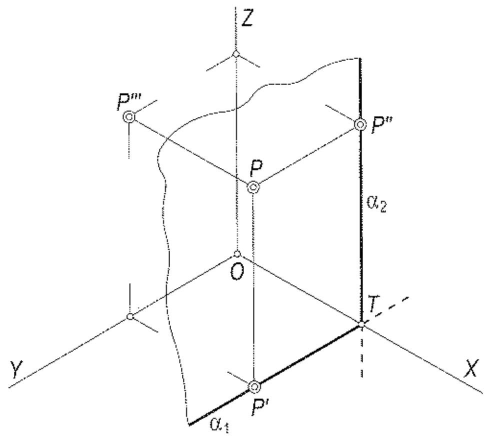


Fig. 24.

21. Trazas de un plano dado por tres puntos (Fig. 25)

Los puntos *P*, *Q* y *T*, no alineados, definen un plano α cuyas trazas se obtienen uniendo dos a dos las trazas de las rectas que estos puntos determinan. Así, la recta *s* une los puntos *T* y *Q* y la recta *r* los *P* y *Q*; las trazas de estas rectas son los puntos S_1, S_3, R_2 y R_3, las cuales son suficientes para dibujar las trazas del plano. La traza α_3 pasa por S_3 y R_3; la traza α_1 pasa por *M* y por S_1 y la traza α_2 pasa por los puntos *L*, *N* y R_2; basta, pues, unir las trazas homónimas de las rectas definidas por los puntos dados.

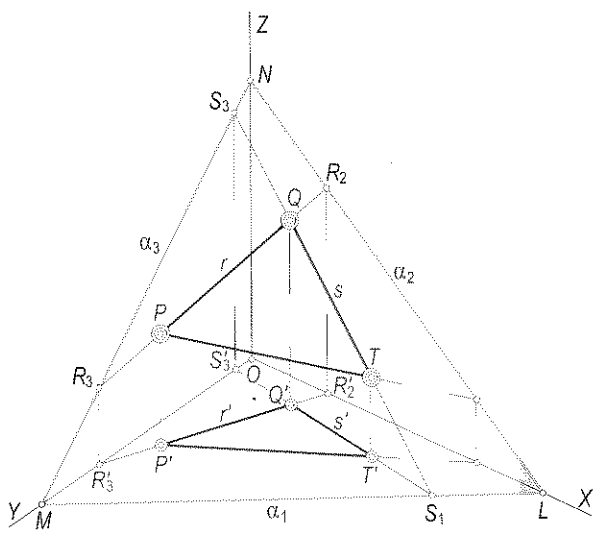


Fig. 25.

22. Posiciones relativas de dos rectas (Fig. 26)

Las rectas *r-r'* y *t-t'* se cortan en el punto *P-P'* del espacio; según esto, la condición para que sepamos que dos rectas se cortan en el espacio es que, en proyección, el punto *P* donde se cortan las proyecciones directas y el punto *P'* de intersección de las proyecciones horizontales estén en una misma paralela al eje *Z*.

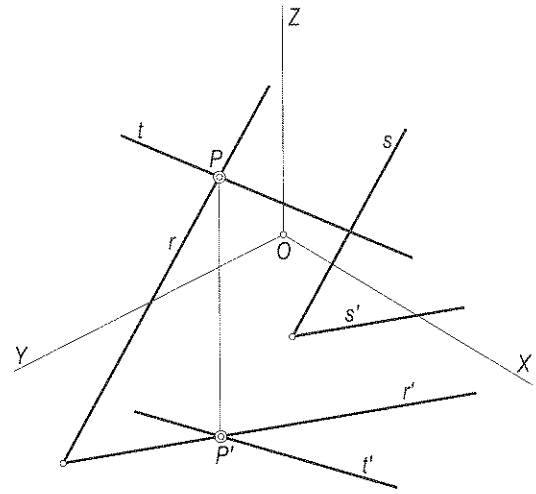


Fig. 26.

Las rectas *r-r'* y *s-s'* son paralelas en el espacio porque son paralelas las proyecciones del mismo nombre.

Las rectas *s-s'* y *t-t'* se cruzan en el espacio por no cumplir ninguna de las dos condiciones anteriores.

23. Intersección de dos planos (Fig. 27)

Tenemos los planos α y β; al cortarlos por los planos del sistema, se obtienen sus diversas trazas, las cuales, al cortarse las del mismo nombre, dan puntos de la intersección de los dos planos.

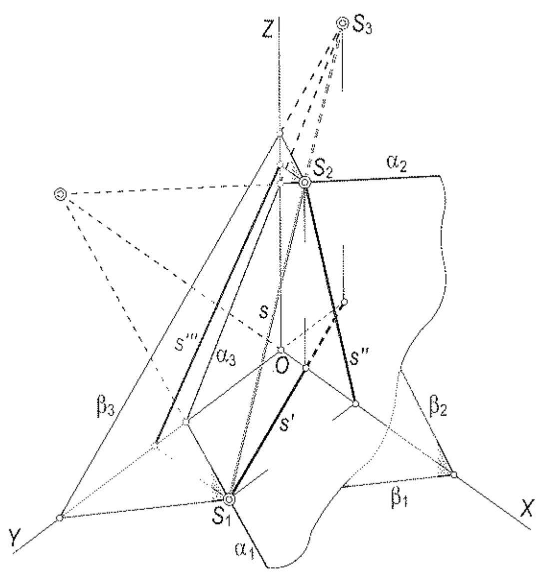


Fig. 27.

En la figura, la recta s, intersección de los planos $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2\text{-}\alpha_3)$ y $\beta(\beta_1\text{-}\beta_2\text{-}\beta_3)$ cualesquiera, se obtiene al unir los puntos S_1, S_2 y S_3 en que se cortan dos a dos las trazas del mismo nombre de los dos planos. Después de obtenida la proyección directa s, se refieren los puntos S_1, S_2 y S_3 a los ejes y se hallan las demás proyecciones tal como indica claramente la figura.

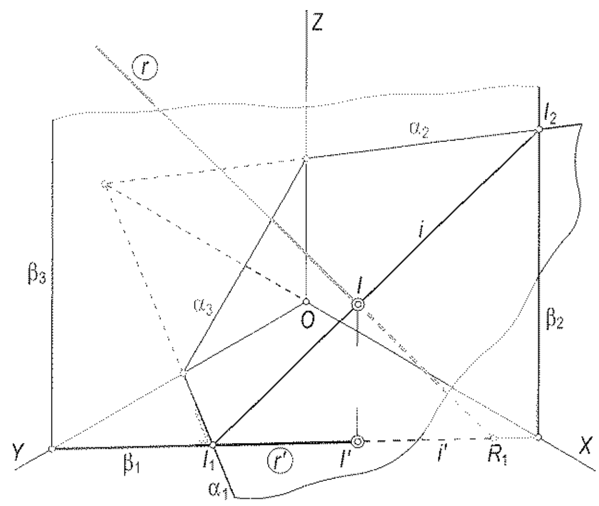


Fig. 28.

24. Intersección de recta y plano (Fig. 28)

Sean el plano $\alpha(\alpha_1\text{-}\alpha_2\text{-}\alpha_3)$ y la recta $r\text{-}r'$. Se hace pasar por la recta un plano cualquiera, el mejor será uno de sus planos proyectantes; en la figura se hace pasar el plano $\beta_1\text{-}\beta_2\text{-}\beta_3$, proyectante sobre el XOY, y se determina la intersección $i\text{-}i'$ de este plano con el plano dado. La recta i encuentra a la recta r en el punto $I\text{-}I'$ buscado.

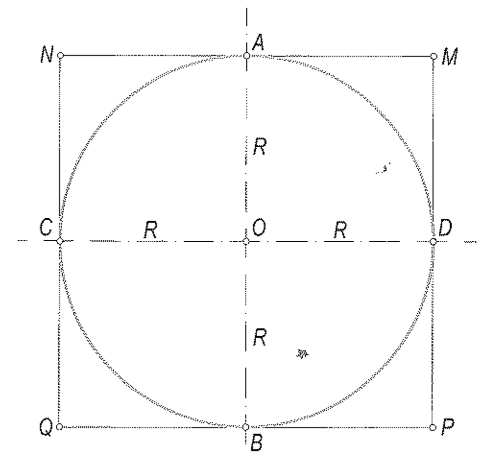


Fig. 29.

25. Perspectiva axonométrica isométrica de la circunferencia

Una circunferencia, situada en una cara de una pieza, se proyecta según una elipse. La construcción de esta elipse es el único problema que presenta la perspectiva y, por ello, vamos a simplificarlo al máximo. De esta forma el lector podrá obtener las perspectivas con gran rapidez.

Se trata de hallar la perspectiva de la circunferencia de centro O y radio R, situada en cada uno de los tres planos XOY, ZOX y ZOY o en planos paralelos a ellos (Fig. 29).

Se suponen dos diámetros perpendiculares AB y CD y se supone también un cuadrado circunscrito a la circunferencia, cuyos puntos de tangencia son los extremos A, B, C y D de los diámetros (Fig. 29).

En la Fig. 30 está dibujada la perspectiva de la circunferencia en los tres planos.

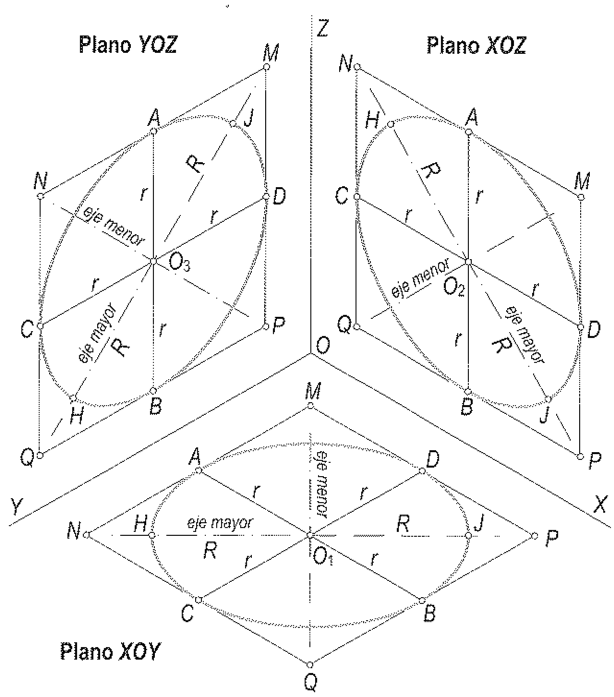


Fig. 30.

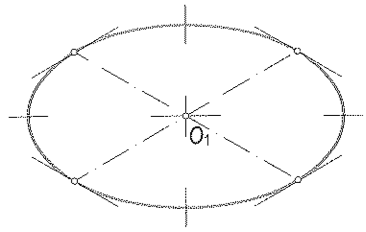
1°. Circunferencia en el plano XOY (Fig. 30)

Por el centro O_1 se trazan los diámetros conjugados de la elipse, $\overline{A\text{-}B}$ paralelo al eje X y $\overline{C\text{-}D}$ paralelo al eje Y, tomando, en el caso de isométrico, $\overline{O\text{-}A} = \overline{O\text{-}B} = \overline{O\text{-}C} = \overline{O\text{-}D} = r$, siendo r el radio R real, reducido en la escala gráfica explicada. Se trazan muy finas las rectas tangentes en A, B, C y D y se obtiene el rombo $N\text{-}M\text{-}P\text{-}Q$, que es la perspectiva del cuadrado circunscrito.

Como una ayuda más para el trazado de la elipse, el eje mayor es perpendicular a la dirección del eje Z y el eje menor es paralelo a dicha dirección. El eje mayor $\overline{H\text{-}J}$ es igual al diámetro $2R$ de la circunferencia.

Se construye la elipse a mano y con lápiz, teniendo en cuenta la condición de tangencia con los lados del rombo.

En resumen, el trazado queda reducido a lo que indica la Fig. 31. No hay que trazar más líneas que las que muestra esta figura.



Circunferencia en el plano XOY

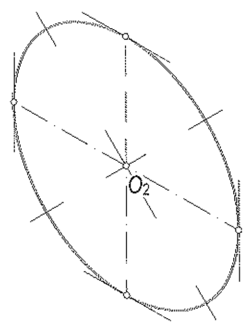
Fig. 31.

2°. Circunferencia en el plano *XOZ* (Fig. 30)

Por el centro O_2, de ella, se trazan los diámetros conjugados, $\overline{C\text{-}D}$ paralelo al eje X y $\overline{A\text{-}B}$ paralelo al eje Z, tomando $\overline{O\text{-}A} = \overline{O\text{-}B} = \overline{O\text{-}C} = \overline{O\text{-}D} = r$, radio reducido.

El eje mayor de la elipse, $\overline{H\text{-}J}$, es perpendicular a la dirección del eje Y y es igual al diámetro $2R$ de la circunferencia. El eje menor es paralelo a la dirección del eje Y.

La construcción es igual a la anterior, que queda reducida a las líneas que indica la Fig. 32.



Circunferencia en el plano XOZ

Fig. 32.

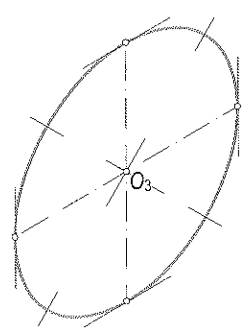
3°. Circunferencia en el plano *YOZ* (Fig. 30)

La construcción es igual que en los dos casos anteriores. Por el centro O_3 se trazan los diámetros $\overline{A\text{-}B}$ y $\overline{C\text{-}D}$ paralelos a los ejes Z e Y, respectivamente, siendo $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = r$, radio reducido.

El eje mayor de la elipse es perpendicular a la dirección del eje X y mide $\overline{H\text{-}J} = 2R$ y el eje menor es paralelo a la dirección de dicho eje.

La construcción queda reducida al menor número posible de líneas, tal como indica la Fig. 33.

Si la elipse es muy grande, pueden obtenerse algunos puntos de ella, por ejemplo, uno en cada cuadrante, a fin de facilitar el trazado a mano de ella.



Circunferencia en el plano YOZ

Fig. 33.

En la Fig. 34 se indica la construcción. Se completan el cuadrado circunscrito y el rombo en la perspectiva y se toman los puntos *1* y *2* que se indican, que son los puntos medios de los segmentos respectivos. Las rectas *A-2* y *B-1*, al cortarse, proporcionan dos puntos *P* y *Q* de la elipse.

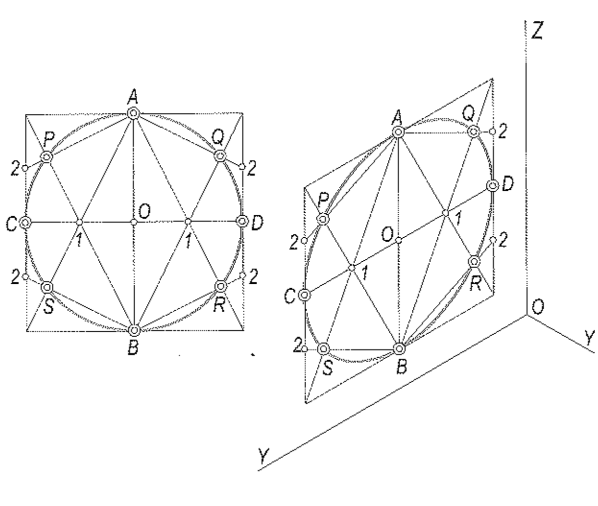


Fig. 34.

Se puede sustituir la elipse por un óvalo, que es una curva aproximada a ella, aunque algo achatada en los extremos del eje mayor.

En la Fig. 35 se tienen los tres rombos en los que están inscritos los óvalos. Los centros de curvatura para hacer el trazado con el compás son los puntos C_1, C_2, C_3 y C_4.

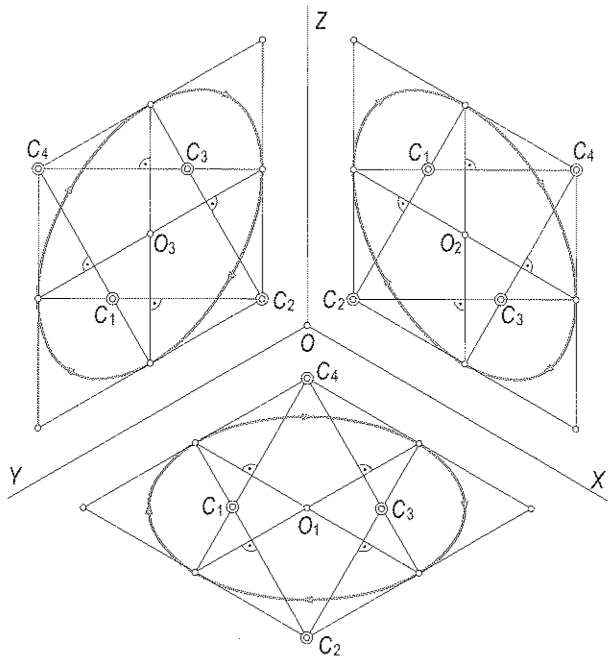


Fig. 35.

Este procedimiento resulta más laborioso y requiere una mayor precisión para que los arcos del óvalo sean tangentes.

26. Perspectivas sin reducir

Puede utilizarse una mayor simplificación con relación a todo lo explicado. Consiste ésta en no reducir ninguna cota que figure en el plano. Si la cota es 70, se coloca *70* sobre el eje *X* o el *Y* o el *Z*. De esta forma, la perspectiva resulta semejante, pero algo mayor a la que se obtendría reduciendo las medidas. Si la escala de reducción era 0,816:1, al no reducir, lo que se hace es aplicar la escala 1:0,816 = 1,22. Según esto, se obtendría una perspectiva que sería aproximadamente el 22 % mayor.

27. Los rayados de secciones en perspectiva isométrica (Fig. 36)

Las superficies producidas por un corte se rayan en cada plano del sistema con líneas de rayado paralelas a las direcciones d_1, d_2 y d_3, respectivamente. Se toma un segmento *s*, cualquiera, sobre cada eje y se unen los puntos *A*, *B* y *C*.

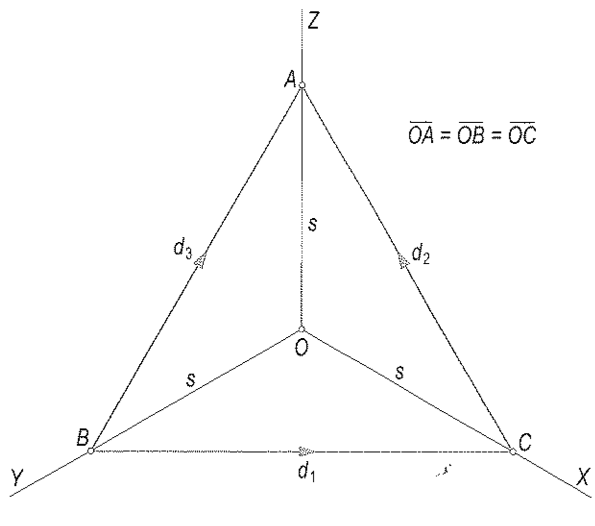


Fig. 36.

NOTA IMPORTANTE:

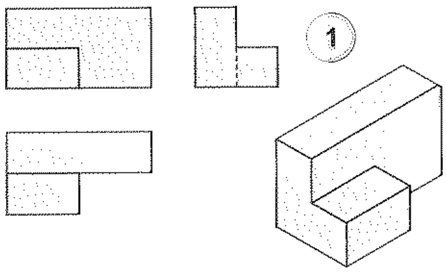
Antes de empezar a dibujar la perspectiva de una pieza, deben estudiarse con detenimiento las vistas diédricas, o dibujo de taller, que la definen. Mentalmente se debe descomponer en sólidos geométricos como paralelepípedos, cilindros, prismas, conos, esferas, etc., o partes de ellos, que guardarán en el espacio una posición relativa entre sí, posición que debe conservarse rigurosamente en la perspectiva. Una vez hecho este estudio para comprender la pieza de forma global, puede dibujarse la perspectiva empezando por algún extremo de la pieza o tomando un eje de simetría total de la misma.

ACTIVIDADES

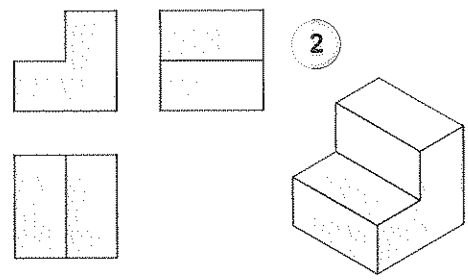
1. Dibujar las proyecciones axonométricas de cuatro puntos situados cada uno de ellos en uno de los triedros situados por debajo del plano *XOY*.
2. Dibujar las proyecciones de puntos que estén situados en los diversos cuadrantes de los tres planos de proyección.
3. Determinar las proyecciones de puntos que estén situados en cada uno de los ejes del sistema.
4. Determinar la intersección de dos planos paralelos al eje *X*.
5. Determinar la intersección de un plano oblicuo cualquiera y otro paralelo al plano *YOZ*.
6. Hallar la intersección de un plano oblicuo con una recta paralela al eje *Z*, o al eje *X* o al eje *Y*.

En esta actividad resuelta se dan las vistas de una pieza y se visualiza la misma mediante su perspectiva axonométrica isométrica. El lector debe interpretar la pieza en los dos sistemas, identificando la posición de cada una de las caras de la pieza, es decir, fijar si son planos frontales, horizontales, proyectantes, de perfil u oblicuos. Se pueden numerar los vértices de la perspectiva y pasarlos a las proyecciones diédricas.

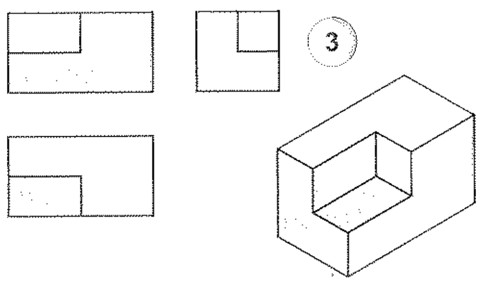
1



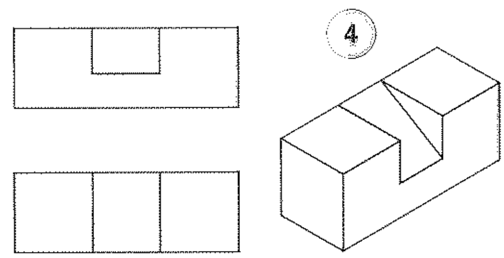
2



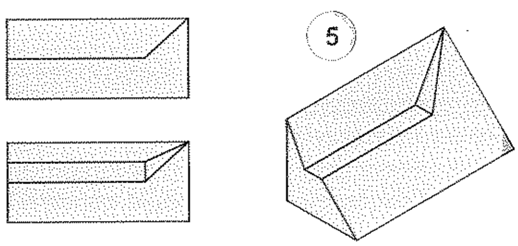
3



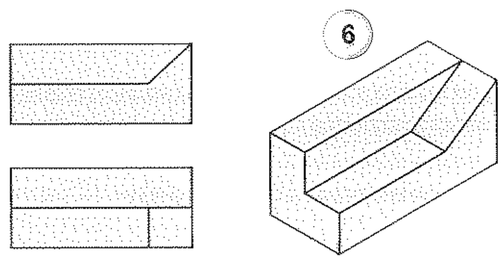
4



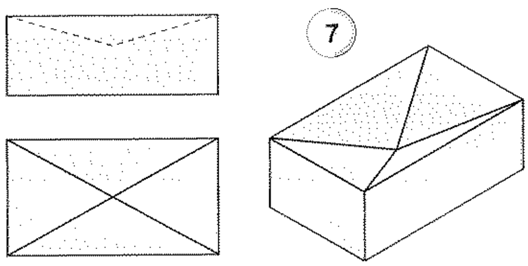
5



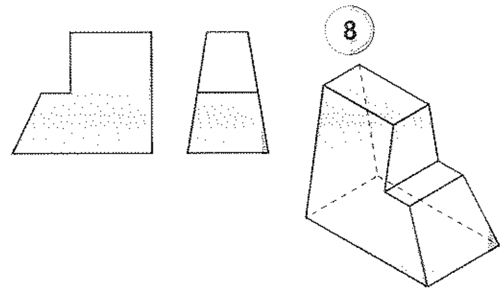
6



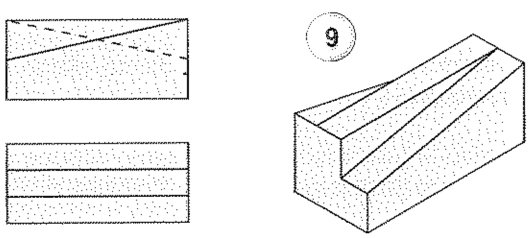
7



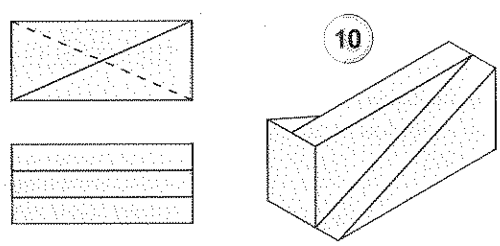
8



9

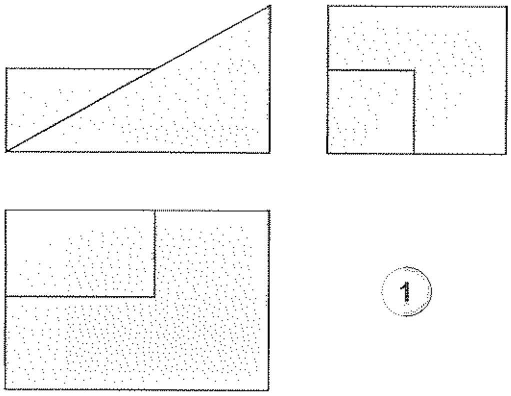


10

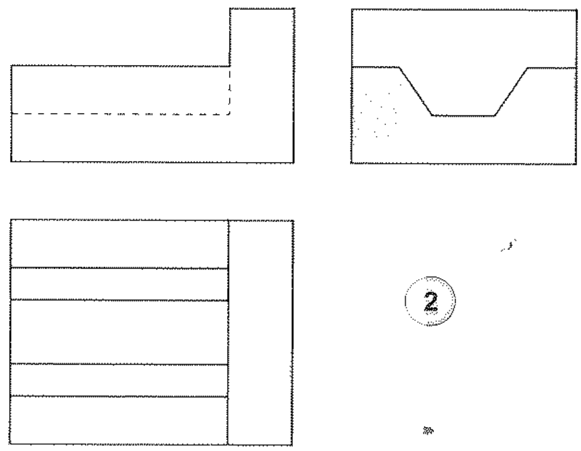


Se dan cuatro piezas por sus proyecciones diédricas.

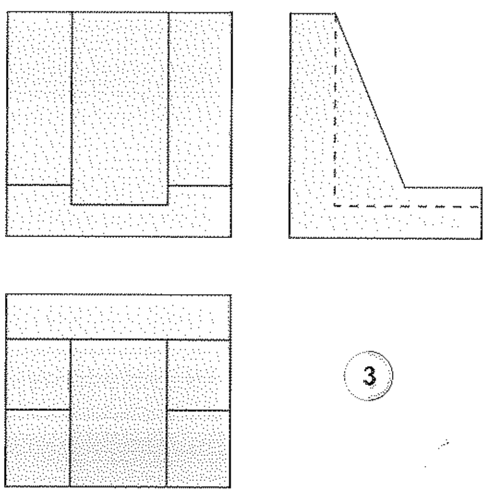
Se trata de dibujar, a mano alzada, la perspectiva axonométrica de cada una de ellas, con las líneas ocultas necesarias que permiten definir la pieza.



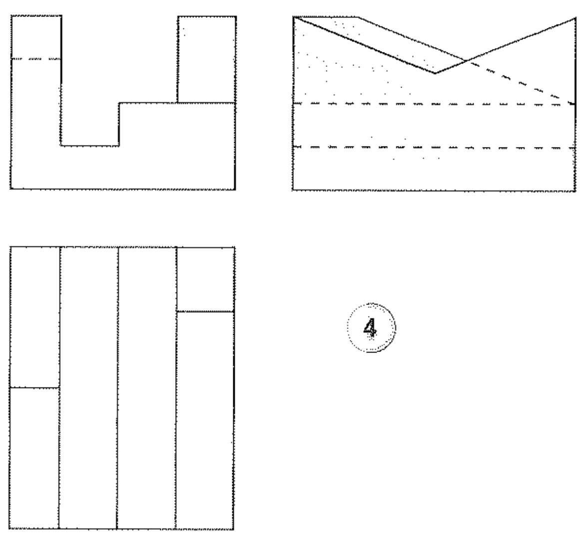
1



2



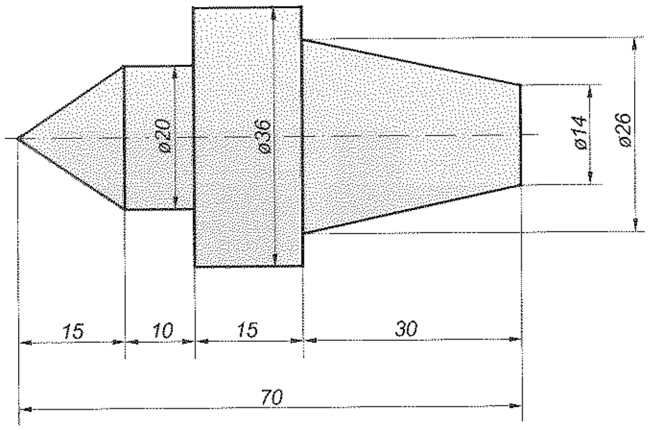
3



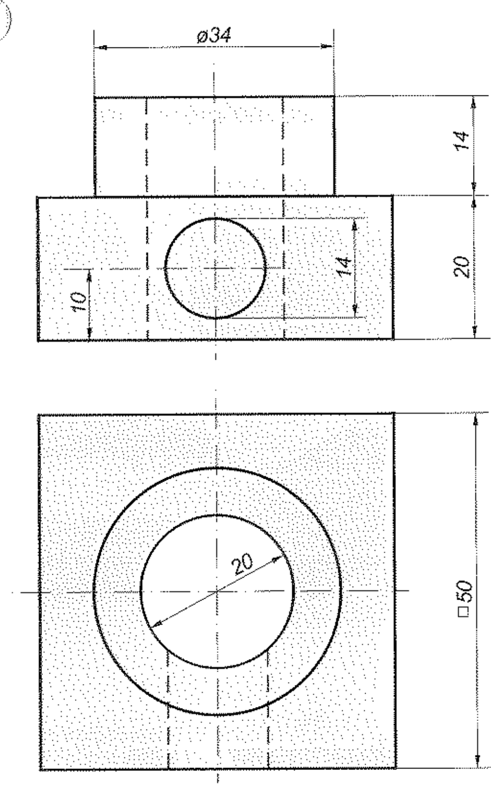
4

Tenemos cuatro piezas acotadas, dadas por sus proyecciones diédricas, que presentan caras planas y superficies curvas. Se trata de dibujar la perspectiva axonométrica de cada una de ellas. Si se considera necesario, hacer algún corte que permita definir o interpretar mejor la pieza.

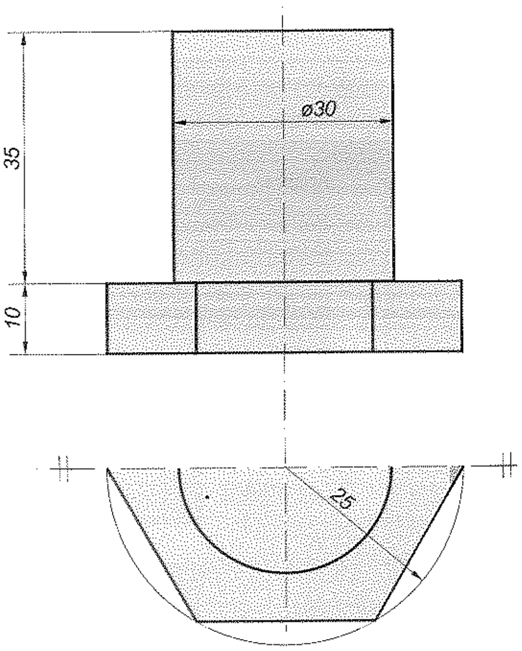
1



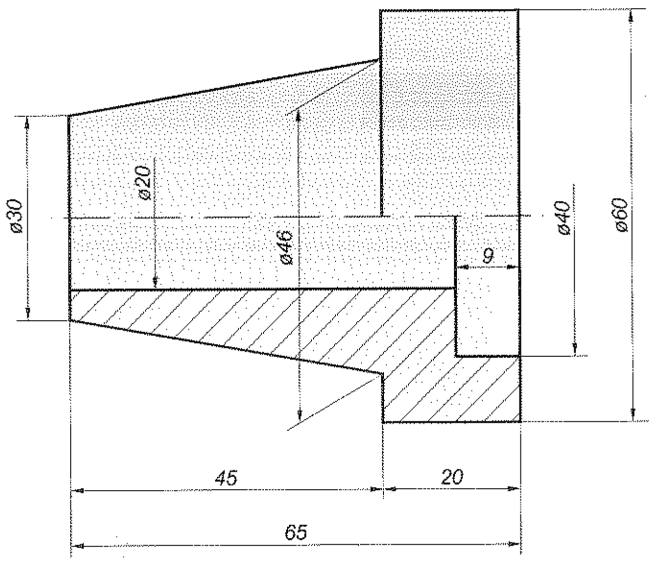
2



3



4



SISTEMA DE PERSPECTIVA CABALLERA

TEMA 15

Objetivos y orientaciones metodológicas

Todo lo indicado para la unidad temática anterior es aplicable a ésta. El alumno debe comprender el tipo de proyección que emplea este sistema y fijar o elegir los dos datos que definen el sistema. Una vez representados el punto, la recta y el plano, fijará especialmente su atención en la representación de una circunferencia situada en planos paralelos a los del sistema con vistas a la obtención de la perspectiva caballera de un cuerpo.

Finalmente representará cuerpos geométricos en posiciones sencillas. Las actividades se harán, unas con instrumentos y otras a mano alzada.

El desarrollo de esta unidad temática puede hacerse a lo largo de cuatro clases.

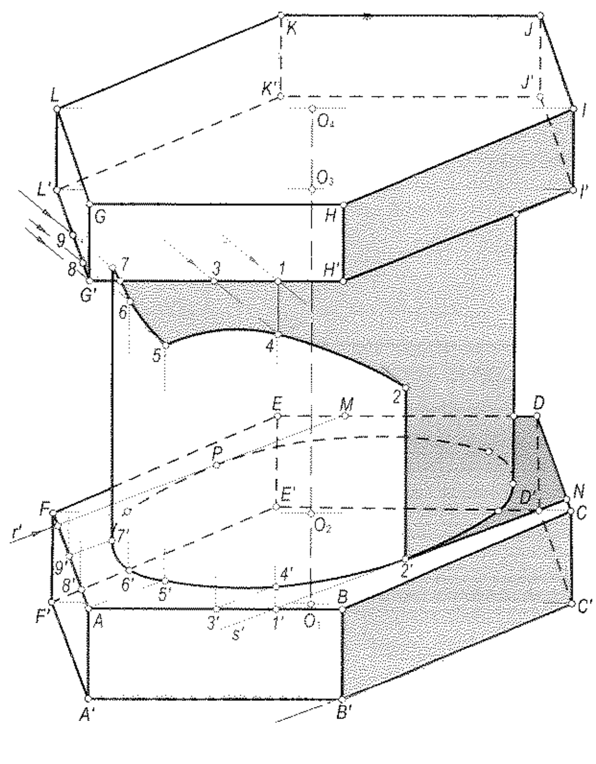


Fig. 1. Ejemplo de pieza en perspectiva caballera con sombras.

1. Fundamentos del sistema de perspectiva Caballera

En este tema vamos a dar los fundamentos de este sencillo, bonito y útil sistema que se llama *sistema de perspectiva caballera* o *perspectiva rápida*. Tenemos un plano llamado *plano del cuadro*, *plano del papel*, *plano del dibujo* o *plano de proyección*; tenemos también un triedro trirrectángulo.

En la Fig. 2 se dibuja el triedro trirrectángulo *O(X) (Y) (Z)*; los ejes del sistema son las aristas *X*, *Y* y *Z* del triedro. Suponemos que el plano del cuadro es el mismo *ZOX* del triedro; según esto, los ejes *(X)* y *(Z)* del espacio coinciden con sus proyecciones *X* y *Z*, respectivamente. El eje *(Y)* es perpendicular al plano del cuadro y los planos *XOY* y *ZOY* son proyectantes sobre el cuadro.

Si proyectáramos ortogonalmente un cuerpo sobre estos planos, tendríamos unas proyecciones llamadas *previas* y éstas, proyectadas a su vez ortogonalmente sobre el cuadro, estarían confundidas siempre con los ejes *X* y *Z*. Para evitar esto elegimos una dirección de proyección oblicua al cuadro y de esta forma el eje *(Y)*, en vez de proyectarse confundido con el origen *O*, se proyecta según una recta *Y* que pasa por el origen.

En la Fig. 2 hemos elegido un punto *(1)* del eje *(Y)* en el espacio y lo hemos proyectado según una dirección *–d–* cualquiera, siendo el punto *1* su proyección y la recta *O-1* será el eje *Y* ya proyectado.

Observe el lector que la dirección elegida forma un ángulo σ con el cuadro y que además hemos de fijar el ángulo φ, que forma con el plano *(Y)O(X)* el plano proyectante de la citada dirección. Visto esto, los ejes del sistema, proyectados ya sobre el plano del cuadro, quedan según se ve en la parte derecha de la figura; los ejes *Z* y *X* son perpendiculares y el eje *Y* forma el ángulo φ con el eje *X*.

Pasemos ahora a la Fig. 3. El punto *(1)* del eje *(Y)* se proyecta en *1* sobre el cuadro; el triángulo *(1)-O-1* es rectángulo en *O*; si suponemos abatido este triángulo sobre el cuadro, tomando como charnela la recta *O-Y*, tenemos el triángulo 1_o-*O-1* y, por lo tanto, el ángulo 1_o-*1-O* es el ángulo σ en verdadera magnitud que forma la dirección de proyección con el cuadro. La recta 1_o-*O* es el eje *(Y)* abatido, por lo que lo designamos por Y_o.

También podemos imaginar abatido el plano *XO(Y)* del espacio sobre el cuadro, tomando como charnela el eje *X*; como el ángulo *(Y)-O-X* es recto, el eje *(Y)* abatido vendrá ahora sobre la recta $O(1_1)_o$, siendo $(1_1)_o$ el punto abatido del *(1)*; piense el lector que la figura es una perspectiva convencional y que se ha de verificar $(1)\text{-}O = (1_1)_o\text{-}O = 1_o\text{-}O$.

Hemos, pues, relacionado con estos dos abatimientos el punto *(1)* del espacio en el *(Y)* con su proyección *-1-* sobre el cuadro y con su abatimiento $(1_1)_o$ sobre dicho plano. En esta figura queda, pues, ya fijada una dirección que es $1\text{-}(1_1)_o$.

Volvamos ahora al triedro trirrectángulo *OX(Y)Z* representado en la Fig. 4. Sea el punto *(B)* del espacio el que vamos a representar en perspectiva caballera.

La proyección ortogonal de *(B)* sobre *XO(Y)* es el punto *(E)*; igualmente, sobre *ZOX* se proyecta en *(A)* y sobre *ZO(Y)* en *(C)*. Los puntos *(A)*, *(C)* y *(E)* se llaman *proyecciones previas* del punto *(B)* sobre los planos del triedro. Elegimos ahora una dirección oblicua al plano

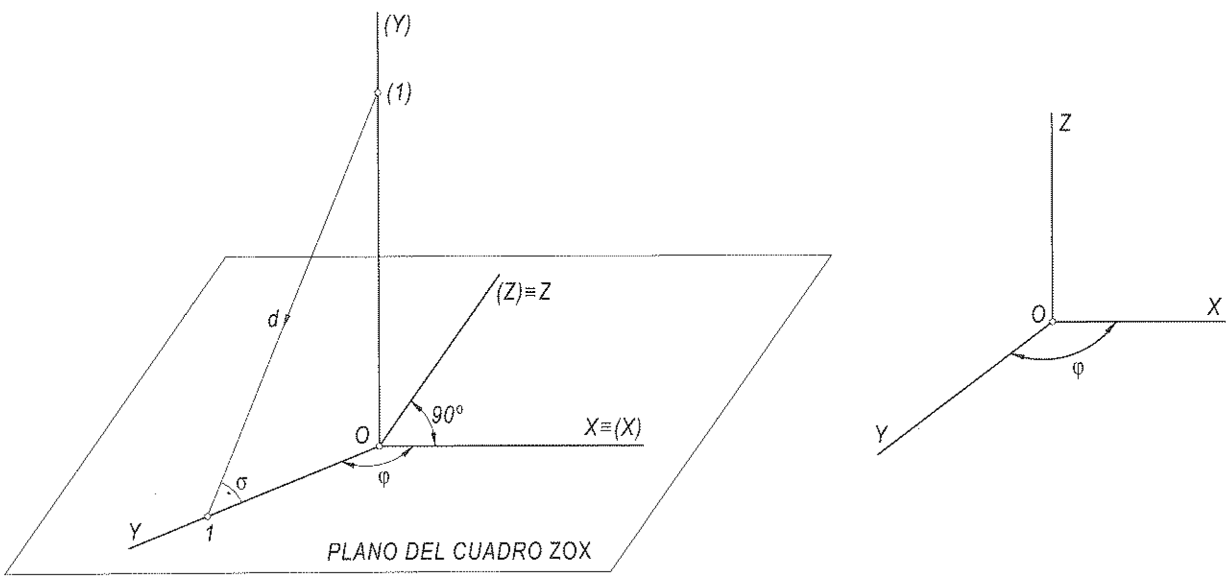


Fig. 2.

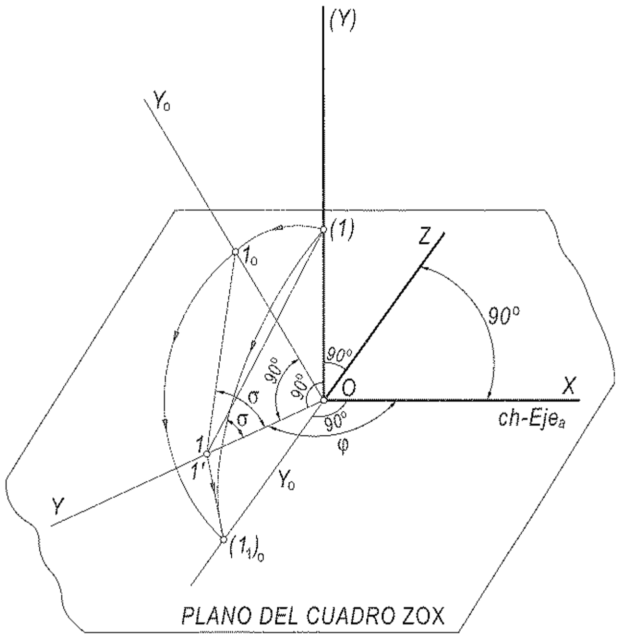


Fig. 3.

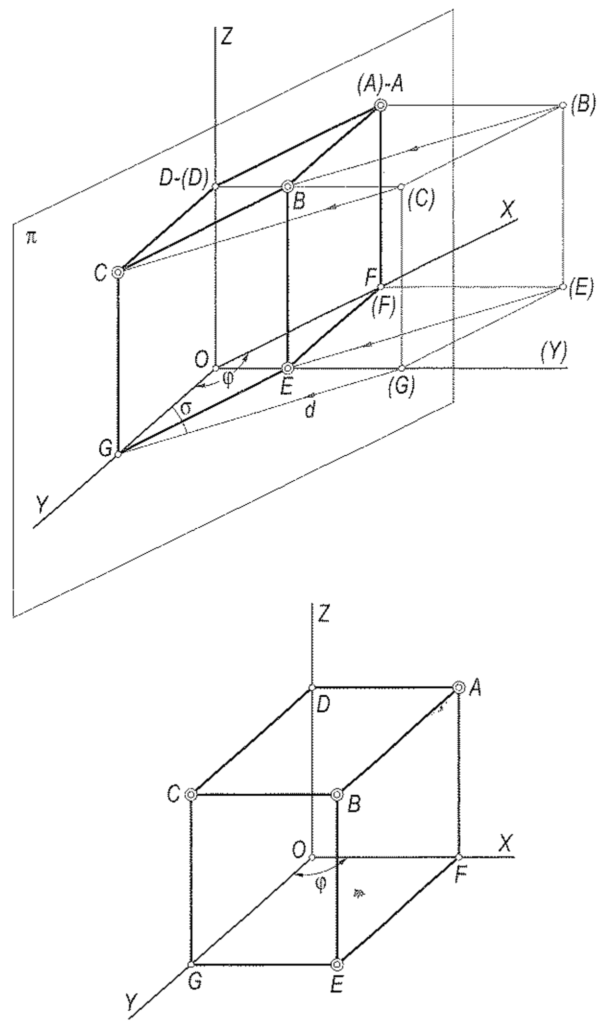


Fig. 4.

del cuadro y proyectamos sobre él el conjunto formado por el punto *(B)* y sus proyecciones previas *(A)*, *(C)* y *(E)*.

El punto *(B)* se proyecta en *B*; este punto *B* se llama proyección directa oblicua del punto *(B)* sobre el cuadro y es lo que en realidad se llama *perspectiva caballera del punto*.

El punto *(C)* se proyecta en *C*; el *(A)* ya está proyectado, por lo que su proyección *A* coincide con *(A)*; el punto *(E)* lo hace en *E*. Observe el lector que los puntos *A*, *C* y *E* son proyecciones de las proyecciones previas *(A)*, *(C)* y *(E)*.

El paralelepípedo formado en el espacio por los ejes *Z*, *(Y)* y *X* y por las líneas *(B)-(A)*, *(B)-(C)* y *(B)-(E)* queda representado en perspectiva con trazo más grueso. En la figura se indica el ángulo σ que forma la dirección –*d*– de proyección con el cuadro y el ángulo φ que forma el eje *X* con el eje *Y* proyectado.

El punto *A* es proyección directa ortogonal del punto *(B)* del espacio sobre el cuadro *ZOX* y se llama *proyección segunda* o *proyección vertical primera* del punto *(B)*.

El punto *C* es proyección oblicua sobre el cuadro de la proyección *(C)* del punto *(B)* sobre el plano *ZO(Y)* y se llama *proyección tercera* o *proyección vertical segunda*.

El punto *E* es la proyección oblicua de la proyección previa ortogonal *(E)* del punto *(B)* sobre el plano *XOY*.

En la parte inferior de la figura se representa el plano del cuadro tal y como queda después de proyectado el conjunto anterior. El punto *B* es la proyección o perspectiva directa y los puntos *E*, *A* y *C* son las proyecciones de las proyecciones previas sobre los planos *XOY*, *ZOX* y *ZOY*, respectivamente. Obsérvese el paralelepípedo que se visualiza con trazo fino al unir los puntos anteriores y fíjese el lector en la posición de todas las aristas de este paralelepípedo con relación a los planos del triedro.

Resumiendo, el sistema de perspectiva caballera emplea la proyección cilíndrica oblicua y un punto tiene cuatro proyecciones: una directa oblicua sobre el cuadro y tres proyecciones oblicuas de las proyecciones ortogonales sobre los planos del triedro. Piénsese que la proyección sobre el cuadro *ZOX*, por estar *(A)* y *A* confundidas, resulta una proyección ortogonal.

2. Notaciones

En el sistema de perspectiva caballera se emplean las notaciones siguientes.

Un punto se designa por una letra mayúscula o por un número; por ejemplo: *P-P'-P''-P'''* designa un punto cuya proyección directa oblicua es *P*; *P'* es la proyección sobre el plano *XOY*; *P''* es la proyección directa ortogonal sobre el cuadro *ZOX* y *P'''* es la proyección sobre *ZOY*; igualmente, un punto se puede nombrar por *1-1'-1''-1'''*.

De la misma forma y en el mismo orden de significación se nombra una recta empleando letras minúsculas, por ejemplo, *r-r'-r''-r'''*.

El plano se nombra por una letra griega; así, el plano φ se designa por $\varphi(\varphi_1\text{-}\varphi_2\text{-}\varphi_3)$, siendo φ_1-φ_2 y φ_3 las trazas de dicho plano con los planos *XOY*, *ZOX* y *ZOY*, respectivamente.

3. Datos del sistema. Valores de σ y de φ

Para que un sistema de perspectiva caballera quede definido es preciso conocer dos datos:

1º. **El valor del ángulo** φ que forma en el espacio el plano *XOY* con el plano proyectante del eje *(Y)* que contiene la dirección de proyección; dicho de forma más sencilla, φ **es el ángulo que ya en proyección forman los ejes** *X* **e** *Y*.

2º. **El valor del ángulo** σ que forma la dirección –*d*– de proyección con el plano del cuadro.

Con estos dos datos el sistema está perfectamente definido y podemos comenzar a operar en él. Según esto, la práctica de la perspectiva caballera lleva implícita la elección del sistema, fijando los valores de los ángulos φ y σ.

El ángulo φ que forman los ejes *X* e *Y* puede tener unas series de valores, eligiendo uno, de acuerdo con el resultado que se desee obtener.

En la Fig. 5 se señalan diez valores diferentes para el ángulo φ, en los que se indica el ángulo que forma el eje *Y* con el eje *X* o con el eje *Z*. Obsérvese cada posición deteni-damente y la proyección, o perspectiva, de un cubo en cada caso. El ángulo φ se debe elegir entre los valores indicados en esta figura para facilitar el trazado de la perspectiva. En cada caso se observa el cubo represen-tado con unas caras determinadas vistas y además con mayor o menor deformación.

Dentro de cada uno de estos diez valores del ángulo φ, podemos elegir varios valores para el ángulo σ, según vemos a continuación.

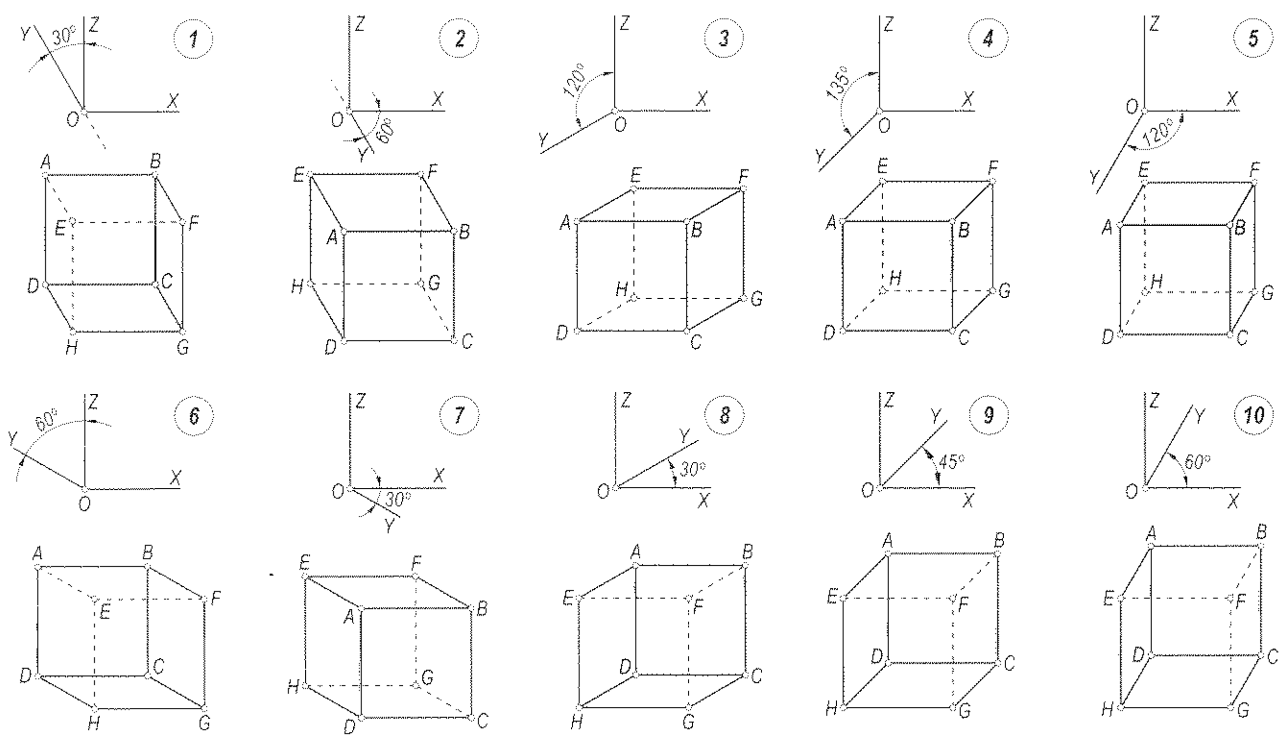


Fig. 5.

4. Coeficiente de reducción

En este sistema, y tal como hemos definido la forma de proyectar los elementos del espacio, las rectas paralelas al plano del cuadro, es decir, al plano *ZOX*, se proyectan tal y como son, en verdadera magnitud, sin deformación alguna. Lo mismo ocurre si son paralelas al eje *X* o al eje *Z*, pues serán paralelas al cuadro.

Veamos qué ocurre con las rectas paralelas al eje *(Y)* en el espacio, es decir, con las perpendiculares al cuadro.

En la Fig. 2 tomamos un segmento *O-(1)* del eje *(Y)* y, proyectado sobre el cuadro, tenemos el segmento *O-1*; este segmento *O-1* será mayor o menor que el segmento *O-(1)* del espacio según que el ángulo σ sea menor o mayor que 45°, respectivamente.

Se llama *coeficiente de reducción del sistema*, y se representa por la letra μ, el valor de la cotangente trigonométrica del ángulo σ que forma la dirección de proyección *–d–* con el plano del cuadro, es decir, $\mu = \text{cotg}\ \sigma$.

En el triángulo rectángulo *(1)-O-1*, el valor de la cotangente σ es la razón entre el cateto contiguo y el cateto opuesto; por ello, cotg σ = *O-1/O-(1)*. De esto deducimos que **el coeficiente de reducción es un número que indica la razón entre el segmento ya proyectado y el segmento real del espacio**.

Si σ vale 45°, *O-(1) = O-1* y, por lo tanto, no habría reducción, pues $\mu = \text{cotg}\ 45° = 1$; el segmento paralelo al eje *Y* se proyectaría sin deformación.

Si σ < 45°, *O-(1) < O-1* y el segmento real se proyectaría ampliado, con lo que obtendríamos una perspectiva irreal o muy deformada; ahora no sería coeficiente de reducción, sino de ampliación, pues la cotangente de un ángulo menor de 45° es mayor que 1. No debe, pues, el lector tomar valores de σ menores de 45° e incluso desechar el valor de 45°, pues también resultan perspectivas deformadas.

Si σ > 45°, *O-(1) > O-1* y toda recta paralela al eje *Y* se proyecta deformada según el valor de $\mu = \text{cotg}\ \sigma$.

El valor más razonable es $\sigma = 60°$, siendo $\mu = \text{cotg}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

No obstante, como valores más aconsejables para el coeficiente de reducción se deben emplear 0,5, 0,6 y 0,7, con los que se obtienen perspectivas muy agradables a la vista. Piénsese que el efecto de deformación de la perspectiva aumenta con el coeficiente de reducción.

Resumiendo, las rectas paralelas a los ejes *X* y *Z* se proyectan en verdadera magnitud y las rectas paralelas al eje *Y* se proyectan reducidas según el valor del coeficiente de reducción del sistema.

La Norma UNE 1031 indica que el valor normalizado es $\varphi = 45°$ y el coeficiente de reducción debe ser $\mu = 0{,}5$. No obstante, el lector puede elegir otros valores.

5. Representación del punto (Fig. 6)

Hemos visto que el punto tiene cuatro proyecciones. Supongamos un punto *(P)* del espacio que tiene de coordenadas *P (x, y, z)*. Vamos a representar este punto en un sistema definido, siendo *X*, *Y* y *Z* los ejes y σ el ángulo de reducción; por el punto *O*, origen, trazamos la perpendicular al eje *Y*, y a partir de un punto *1* cualquiera de dicho eje, construimos el ángulo σ, con lo cual tenemos el triángulo 1_0-*O*-*1*, que nos permitirá reducir las medidas sobre el eje *Y*.

Tomamos sobre el eje *X* la coordenada $\overline{ON} = x$ en verdadera magnitud, es decir, sin reducir; sobre *OZ*, tomamos la coordenada $\overline{OM} = z$; la coordenada *–y–* hay que reducirla y para ello se toma sobre *O*-1_0 el segmento $\overline{O\text{-}L_0} = y$, y por L_0 trazamos la paralela a 1_0-*1*, con lo cual tenemos el punto *L* en el eje *Y*. Las proyecciones *P'*, *P''* y *P'''* se obtienen a partir de los puntos *N*, *M* y *L* por medio de paralelas a los ejes. La proyección directa *P* se obtiene completando el paralelepípedo a partir de *P'*, *P''* y *P'''*.

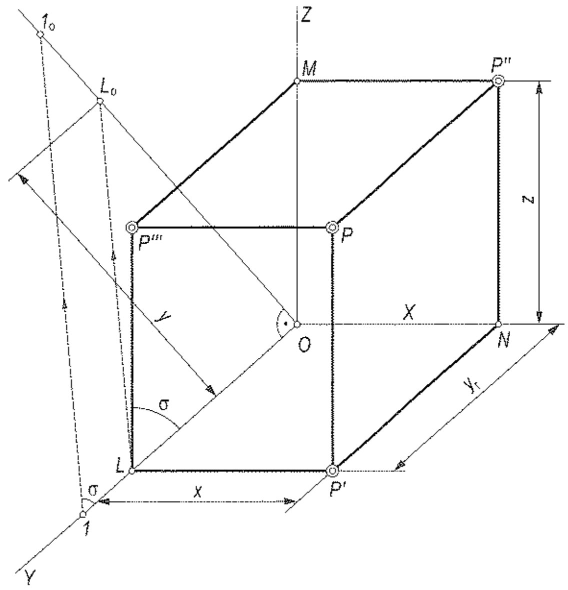


Fig. 6.

6. Paso de un punto del sistema diédrico a perspectiva caballera (Fig. 7)

Supongamos un punto P'-P'' representado en el sistema diédrico y referido a un plano de perfil ZY de forma que sus coordenadas en el espacio son: $x = \overline{ON}$, $y = \overline{NP'}$ y $z = \overline{NP''}$. Para representar este punto en caballera se toman la coordenada x y la z en verdadera magnitud y la coordenada –y– se reduce sobre la recta Y_o, abatiendo el eje Y; en la figura, dado el ángulo σ, se coloca $y = \overline{OB_o}$ y por B_o trazamos la paralela a la dirección -d-, con lo cual tenemos el punto B; con las coordenadas $\overline{ON}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OM}$ se completa el paralelepípedo, y obtenemos las proyecciones P-P'-P''-P''' del punto.

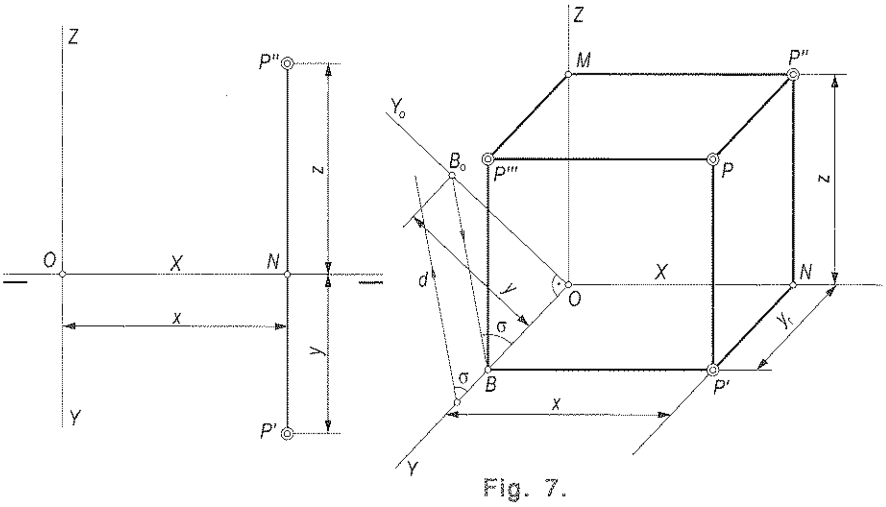


Fig. 7.

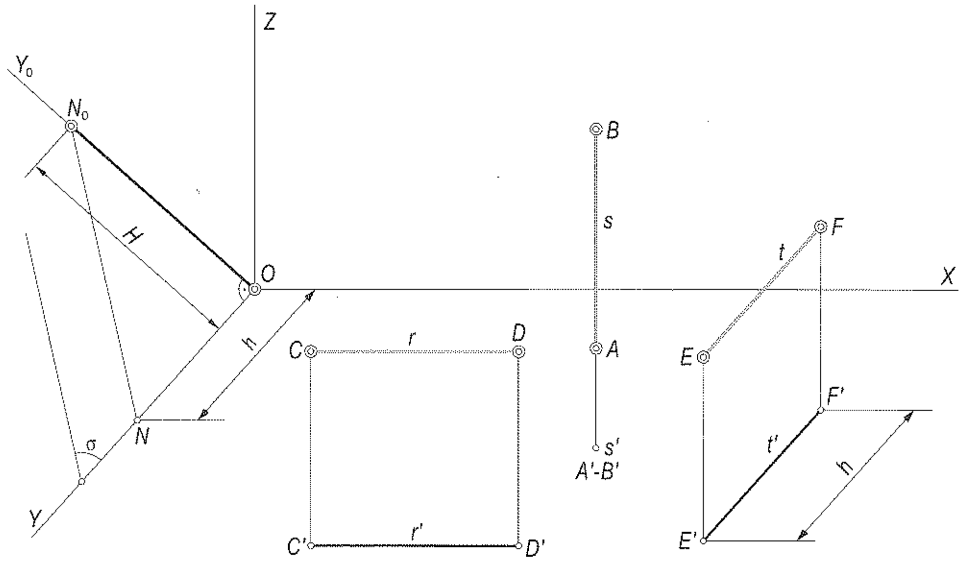


Fig. 8.

7. Distancia entre dos puntos

Fig. 8. **Primer caso**. El segmento $\overline{AB}$ en caballera, por ser paralelo al eje Z, está ya en verdadera magnitud. El segmento $\overline{CD}$, por ser paralelo al eje X, también está ya en verdadera magnitud. El segmento $\overline{EF}$, por ser paralelo al eje Y, está reducido; basta llevarlo según $\overline{O\text{-}N}$ en el eje Y y obtener $\overline{O\text{-}N_o}$, que es la verdadera magnitud H del citado segmento $\overline{EF}$.

Fig. 9. **Segundo caso**. La distancia real entre los puntos N y B, por estar el segmento NB en el plano XOY, es el segmento N_o-B_o; para ello se abaten los puntos N y B en N_o y B_o, trazando las paralelas que indican las flechas a los lados del triángulo A-O-$(A)_o$.

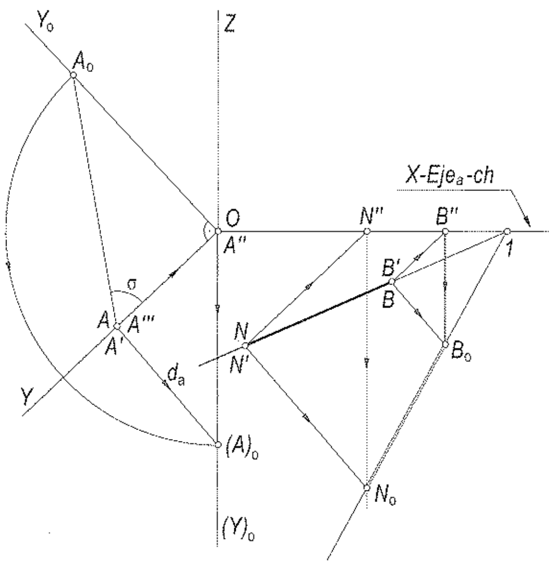


Fig. 9.

Fig. 10. Es el mismo problema que el anterior; hay que hallar la distancia entre C y D, que será la hipotenusa del triángulo CND; la verdadera magnitud de CN es $\overline{C'''_0\text{-}D'''_0}$ y con ésta y el segmento $\overline{ND}$ como catetos se construye la hipotenusa del triángulo rectángulo que es la verdadera distancia entre los puntos C y D.

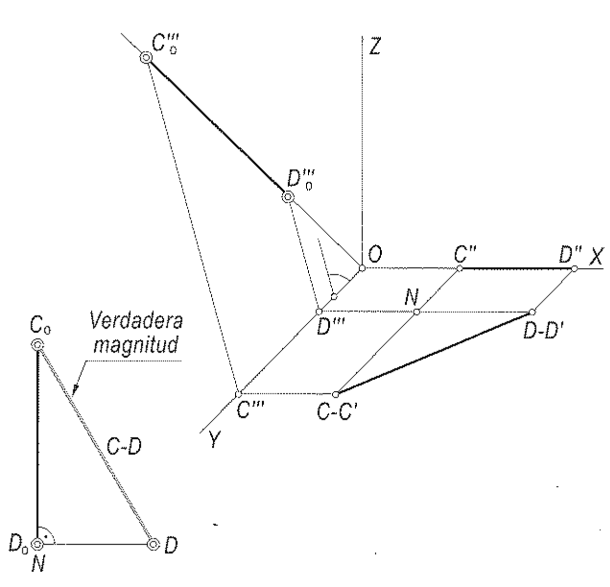


Fig. 10.

Fig. 11. La verdadera magnitud del segmento $\overline{A\text{-}B}$ del plano ZOX es él mismo.

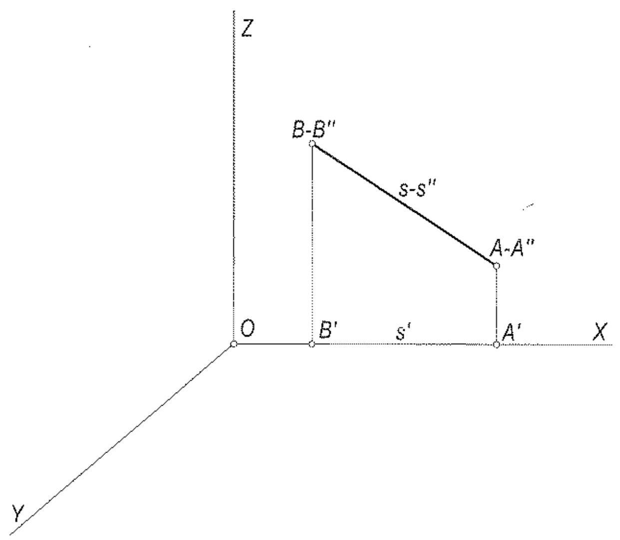


Fig. 11.

8. Distancia entre dos puntos cuando la recta que los une es oblicua a los planos del sistema (Fig. 12)

Supongamos dos puntos P-P' y Q-Q' tales que el segmento que definen es oblicuo a los planos del sistema. La distancia que separa estos puntos es, en proyección, el segmento d-d'. La verdadera magnitud D es la hipotenusa del triángulo PNQ del espacio, en el cual el cateto $\overline{PN} = h$ es la diferencia de cotas entre los puntos P y Q y está en verdadera magnitud; el otro cateto $\overline{NQ}$ es igual a $d' = \overline{P'Q'}$; hallamos la verdadera magnitud de d', que es d'_0, como hemos visto en la Fig. 9, y obtenemos el segmento $\overline{TQ'_0}$.

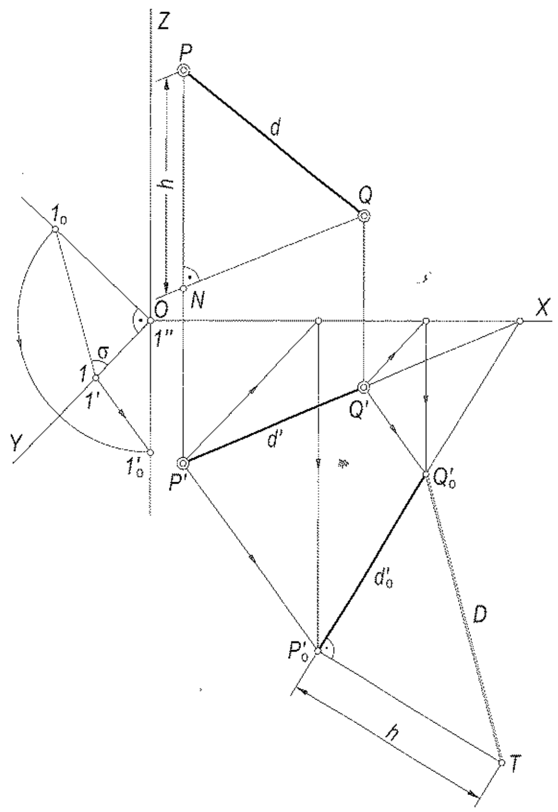


Fig. 12.

9. Perspectiva de figuras planas situadas en planos del sistema

Fig. 13. Representa la perspectiva de un rectángulo y de un triángulo situados en el plano XOY.

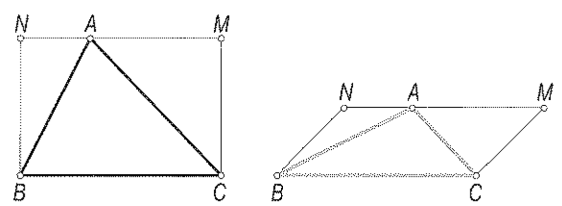


Fig. 13.

Fig. 14. Representa la perspectiva del rectángulo y del trapecio de la izquierda situados en el plano *ZOY*.

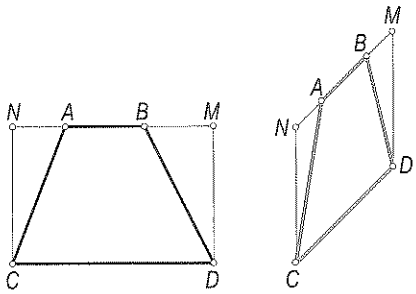


Fig. 14.

Fig. 15. Representa el triángulo en el plano *ZOY*, obtenido mediante sus cotas.

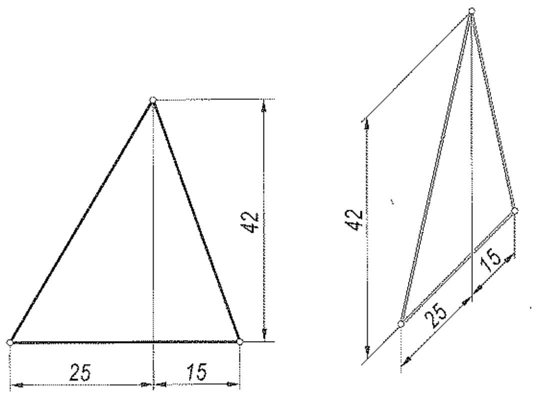


Fig. 15.

Fig. 16. A la izquierda se dibuja un hexágono y en las otras dos figuras se representa el polígono en perspectiva en el plano *ZOY* y en el plano *XOY*.

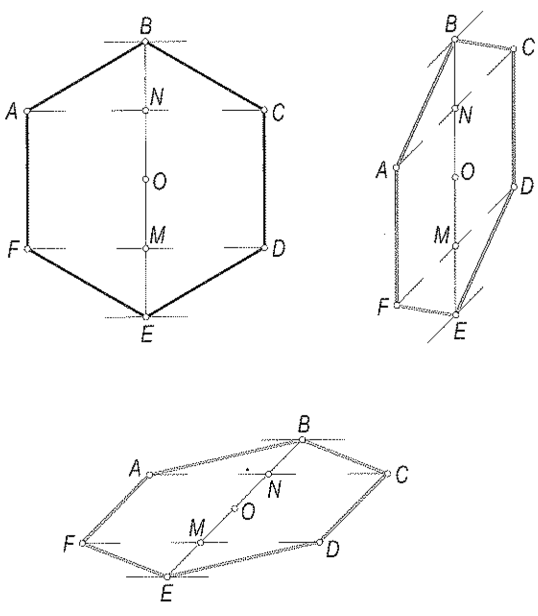


Fig. 16.

Fig. 17. En esta figura se representa un hexágono regular situado en cada uno de los planos del sistema.

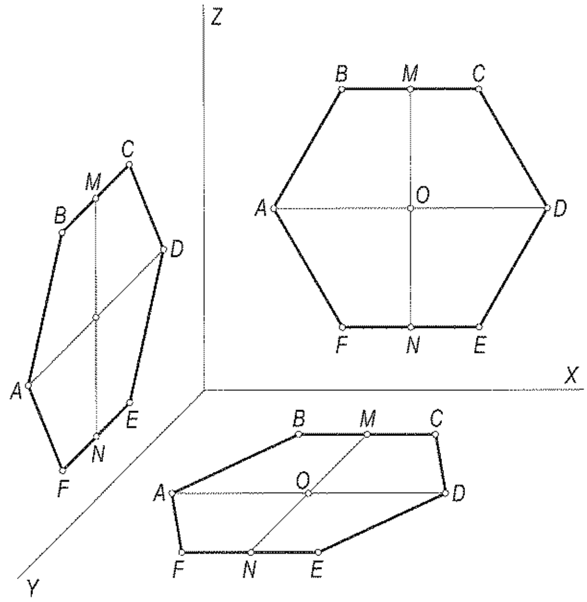


Fig. 17.

Fig. 18. Representa la perspectiva caballera de un pentágono regular situado en el plano *XOY*, para lo que se ha partido del pentágono *A''-B''-C''-D''-E''* puesto en verdadera magnitud en el plano del cuadro *ZOX*.

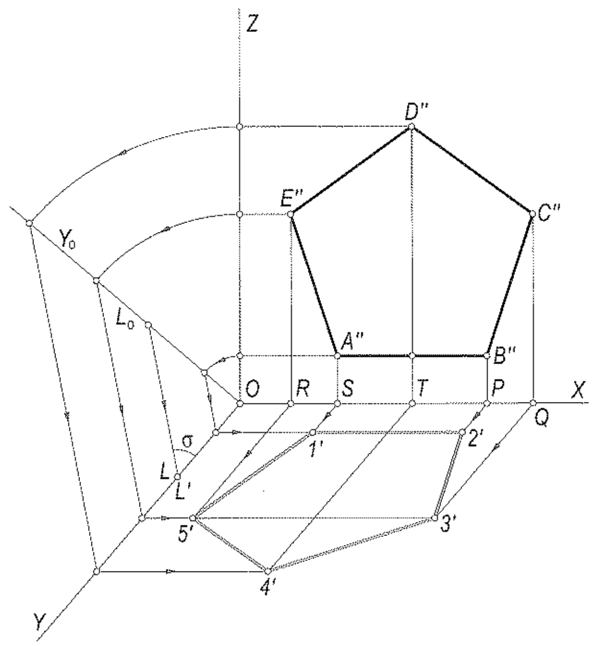


Fig. 18.

Fig. 19. Se dibujan las proyecciones de una circunferencia situada en el plano *ZOX*.

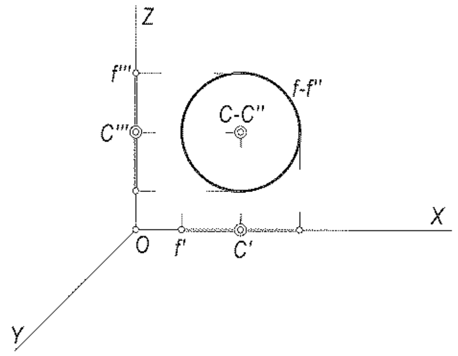


Fig. 19.

Fig. 20. Representa la perspectiva de una curva situada en un plano del sistema.

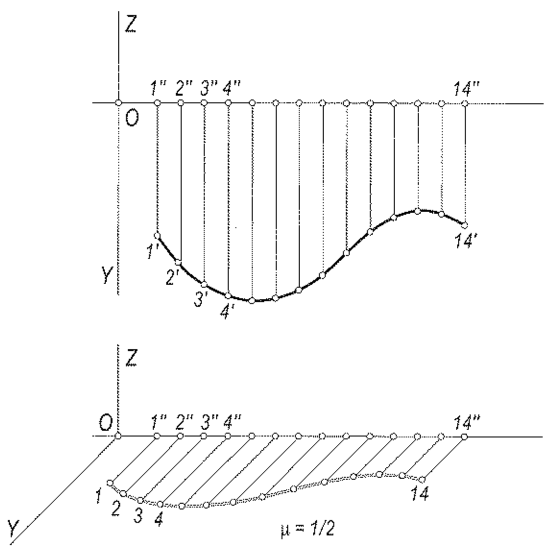


Fig. 20.

Dada una curva situada, por ejemplo, en el plano horizontal del sistema diédrico (parte superior de la figura), para representarla en el plano *XOY* de caballera, basta pasar, punto a punto de ella, de uno a otro sistema, teniendo en cuenta que las rectas paralelas al eje *Y* se reducirán según el coeficiente del sistema; tenemos, pues, *1''-2''* de la figura superior igual a *1''-2''* de la figura inferior y las rectas *1''-1, 2''-2*, etc., son paralelas al eje *Y*, pero reducidas.

10. Perspectiva caballera de la circunferencia

La única dificultad que presenta la perspectiva caballera es el trazado de la proyección de la circunferencia, que en los planos *YOZ* y *XOY* es una elipse.

En la Fig. 21 se dibuja la perspectiva de la circunferencia de radio *R*, y se sitúa en cada uno de los planos. Coeficiente de reducción = 0,6.

Se consideran dos diámetros perpendiculares $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y, para facilitar el trazado, se supone inscrita en el cuadrado *N-M-P-Q*.

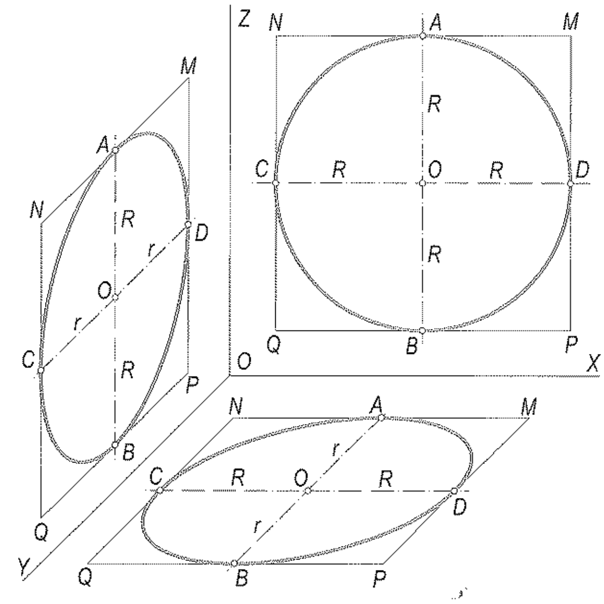


Fig. 21.

- **Circunferencia en el plano *XOZ*.** La proyección es la misma circunferencia de radio *R*. Se indica el cuadrado circunscrito a ella.

- **Circunferencia en el plano *XOY*.** La proyección es una elipse. Por el centro *O* se traza $\overline{CD}$ paralelo al eje *X*, siendo $\overline{OC} = \overline{OD} = R$; por *O*, se traza $\overline{AB}$ paralelo al eje *Y*, siendo $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ (radio reducido según el coeficiente del sistema). Por paralelas se puede dibujar el romboide *N-M-P-Q*, cuyos lados son paralelos a los diámetros conjugados $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ de la elipse. Esta elipse, que está inscrita en el romboide, se debe trazar con lápiz, a mano alzada, y después pasarla a tinta con plantilla de curvas. Este es el método más rápido y que menos líneas requiere.

- **Circunferencia en el plano *YOZ*.** Como en el caso anterior, por *O* se trazan los diámetros conjugados, $\overline{AB}$ paralelo al eje *Z* y sin reducir, $\overline{OA} = \overline{OB} = R$, y $\overline{CD}$, paralelo al eje *Y* y reducido según el coeficiente elegido, es decir, $\overline{OC} = \overline{OD} = r = 0{,}6\,R$. El trazado de la elipse se hace como en el plano *XOY*. Piénsese que el hecho de tener que ser la elipse tangente al romboide *N-M-P-Q* facilita de forma considerable el trazado.

En el caso de elegir un sistema con un coeficiente $\mu = 1$ (caso no recomendado), en el eje *Y* no habría reducción y las elipses se pueden sustituir por óvalos de forma aproximada; los óvalos resultan algo achatados o recortados respecto a la elipse.

En la Fig. 22 se sustituye la elipse del plano XOY por un óvalo. Se toman los segmentos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = R$; se construye el romboide N-M-P-Q; por los puntos de tangencia A, D, B y C se trazan las normales o perpendiculares a los lados del romboide; estas perpendiculares se cortan en los puntos C_1, C_2, C_3 y C_4, que son los centros de curvatura de los arcos del óvalo.

Con el compás y centro en C_1, se traza el arco $\widehat{C\text{-}A}$; con centro en C_3 se traza el arco $\widehat{A\text{-}D}$; con centro en C_4, el arco $\widehat{D\text{-}B}$ y con centro en C_2, el arco $\widehat{B\text{-}C}$, que cierra el óvalo.

Este procedimiento sólo sirve para el caso de que no haya reducción sobre el eje Y y además requiere más tiempo y precisión en el trazado.

El mismo procedimiento se sigue cuando la circunferencia está en el plano YOZ o en planos paralelos a él (Fig. 23).

Se recomienda utilizar el método de los diámetros conjugados y ayudarse de las tangentes a la elipse en los extremos de estos diámetros. Las tangentes deben trazarse muy finas y sólo en las proximidades de los puntos de tangencia. Luego, como se ha indicado, se traza la elipse a lápiz, a mano alzada, o bien con plantilla. Para pasar a tinta se utilizará la plantilla de curvas.

En la Fig. 24 se representa la perspectiva de la circunferencia situada en cada uno de los tres planos del sistema, obteniendo puntos de las elipses por el método de haces proyectivos, ya conocido.

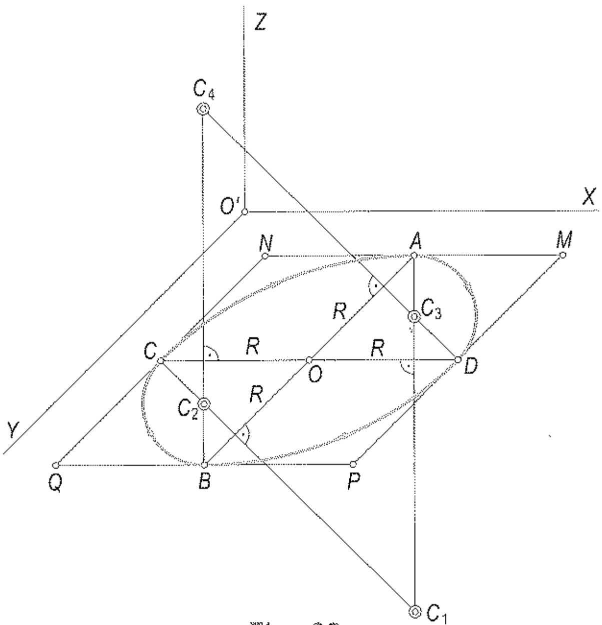


Fig. 22.

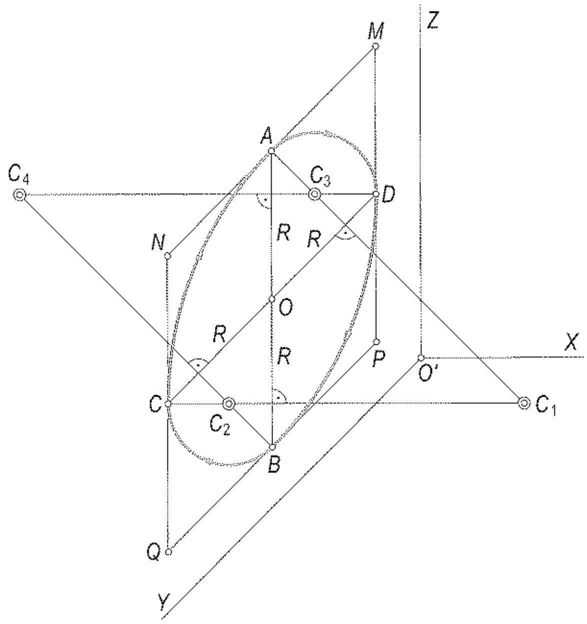


Fig. 23.

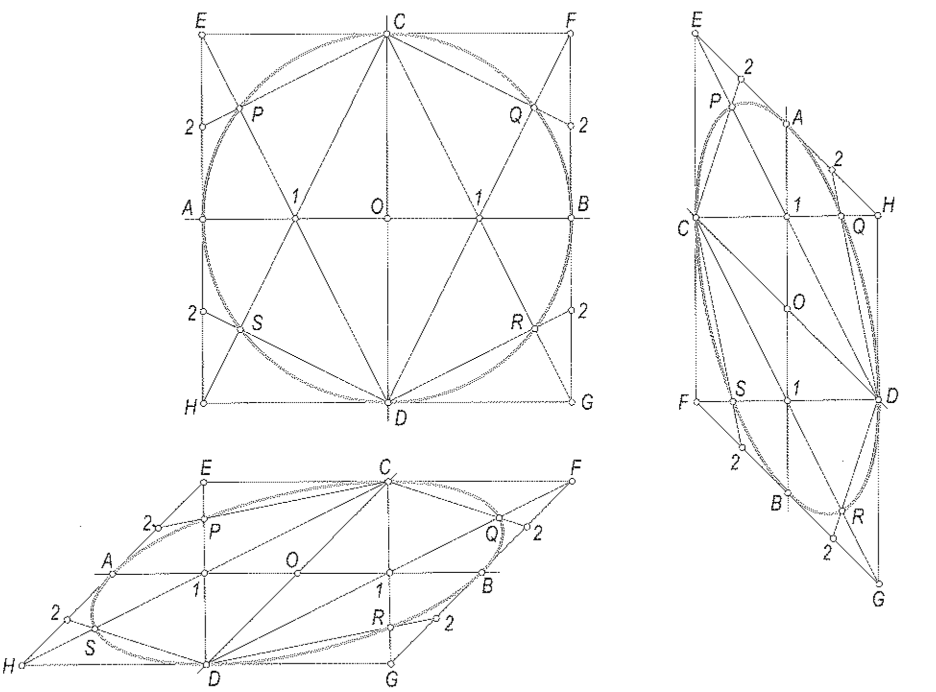
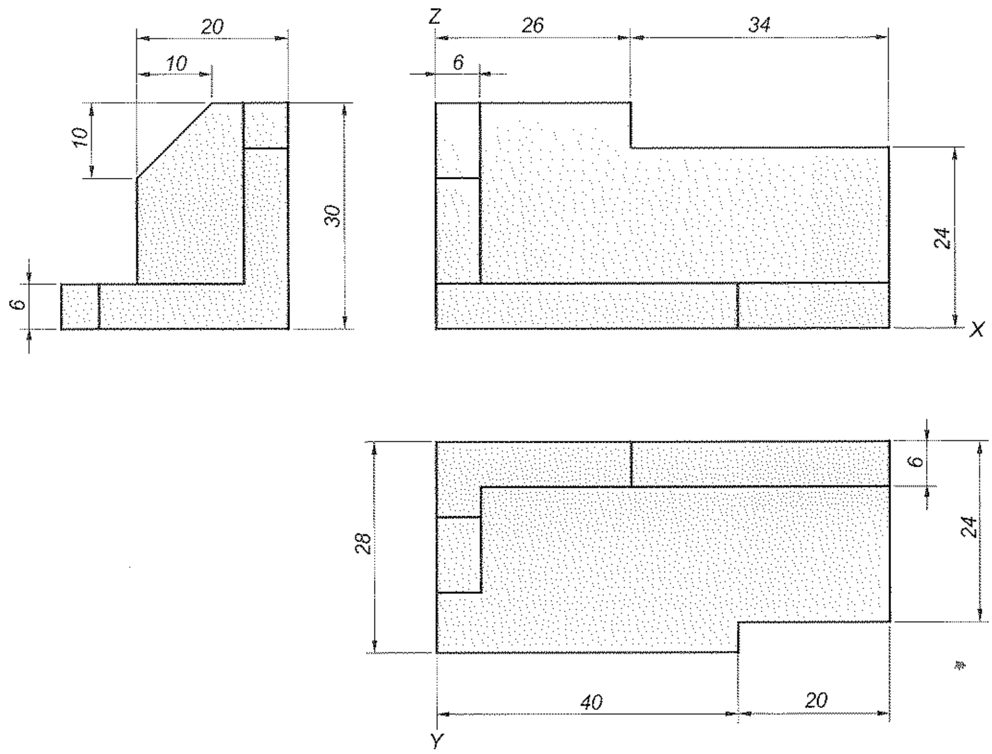


Fig. 24.

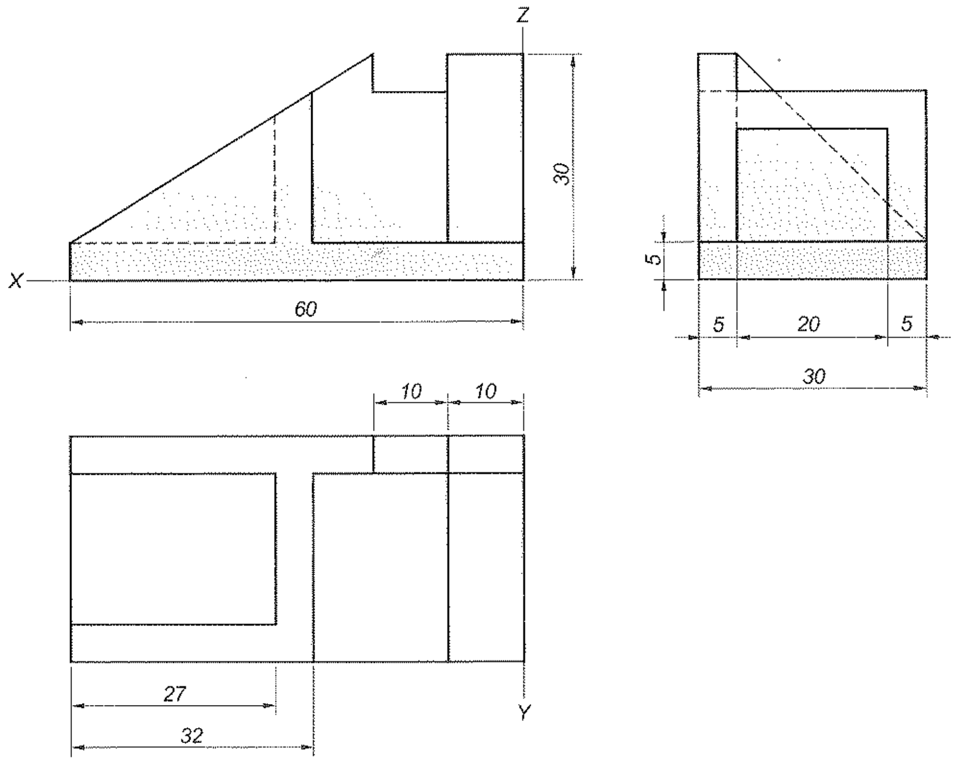
ACTIVIDADES

Tenemos dos piezas poliédricas representadas por sus vistas o proyecciones diédricas, alzado, planta y perfil. Dibujar la perspectiva caballera de cada una de ellas, poniendo las líneas ocultas que sean necesarias para la comprensión de las piezas. La escala la elegirá el alumno a tenor del formato de papel disponible.

1

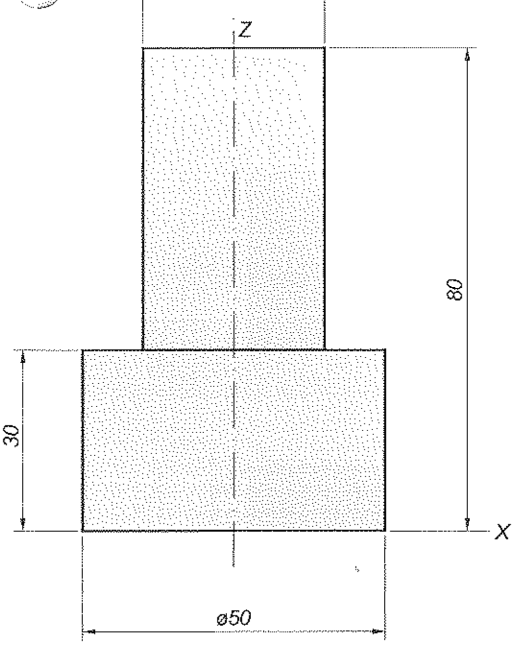


2

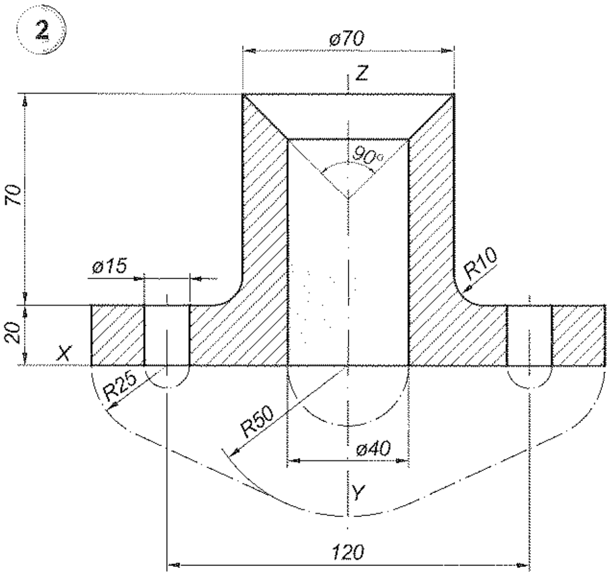


Tenemos cuatro piezas reales, representadas con las proyecciones diédricas necesarias para su completa definición. En ellas aparecen superficies curvas. Dibujar la perspectiva caballera eligiendo los ejes que se indican. Los datos del sistema aconsejables son: $\varphi = 135°$, $\sigma = 0{,}6$. El dibujo puede hacerse a mano alzada o con instrumentos a escala.

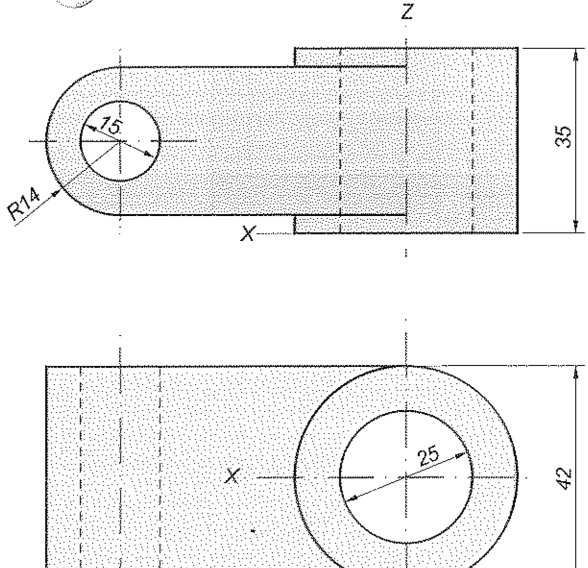
1



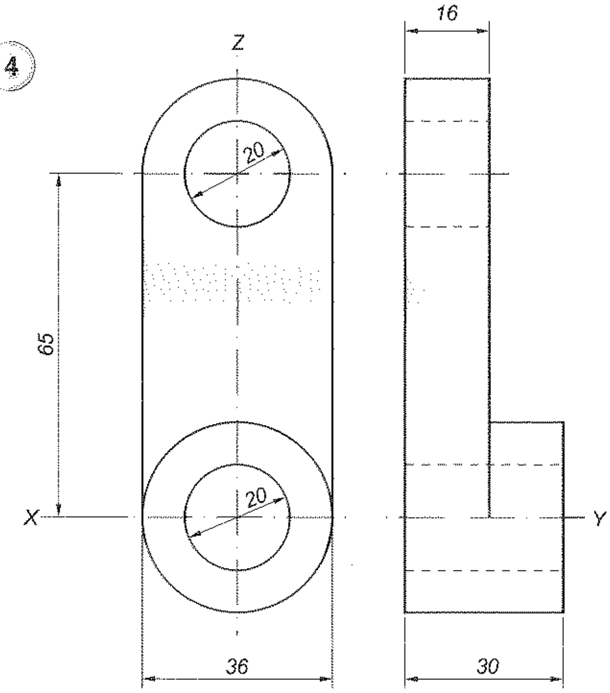
2



3



4



NORMALIZACIÓN
Principios generales de representación

TEMA 16

Objetivos y orientaciones metodológicas

El objetivo de esta unidad temática es concienciar al alumno de la importancia de la normalización en todo lo relacionado con la vida del hombre.

Partiendo de este objetivo se centrará en la normalización del Dibujo Técnico, fijándose que unas normas son de estudio y otras de consulta y que todas ellas son de aplicación obligada en los planos industriales.

Como segundo objetivo de esta unidad temática el alumno aprenderá los principios generales de representación de cuerpos sobre un plano.

A esta unidad temática se dedicará un mínimo de tres clases.

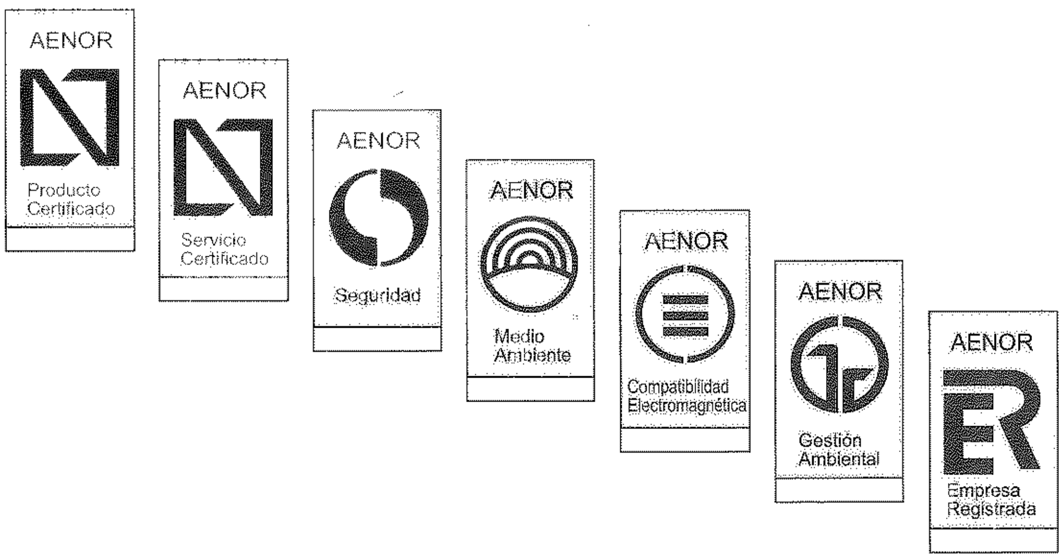


Fig. 1. Marcas de certificación AENOR.

Introducción

La normalización es un conjunto de especificaciones, reglamentos y normas que a lo largo del tiempo, y según la experiencia, ha ido estableciendo el hombre para, como objetivo final, mejorar el nivel de vida.

La normalización se extiende a todo el saber humano y sus efectos son importantísimos en todos los campos. Influye notablemente en la productividad del operario, en la seguridad e higiene del trabajo, en la calidad de los productos, en la economía de todo proceso productivo, etc.

La normalización se expresa en forma de documentos técnicos:

Documentos técnicos de la normalización:
- Normas.
- Especificaciones.
- Reglamentos.

- **Las normas**: son documentos que permiten establecer contratos bilaterales y, en general, son un conjunto de acuerdos y convenciones de aceptación general. Por ejemplo, si un cliente encarga a un proveedor la fabricación de un tipo de tornillo normalizado, éste lo fabrica, y ambos se someten a la misma norma del tornillo.

- **Las especificaciones**: son documentos que fijan las condiciones que ha de cumplir un material, un producto o un procedimiento, y constituyen lo que se llama "pliego de condiciones facultativas" que de forma unilateral fija el cliente al proveedor.

- **Los reglamentos**: son especificaciones de carácter obligatorio fijadas por la ley. Por ejemplo, las normas sobre hormigón armado, el Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión, etc.

Objetivos de la normalización:

1. Definir.
2. Tipificar.
3. Simplificar.

- **La definición**:
  - Fija las características de los materiales, de los productos y de los procesos.
  - Evita la indeterminación.
  - Garantiza la calidad.

- **La tipificación**:
  - Adopta soluciones tipo.
  - Posibilita la intercambiabilidad.
  - Favorece la fabricación de grandes series.

- **La simplificación**:
  - Reduce el número de productos y materiales.
  - Reduce los movimientos y las operaciones.
  - Garantiza la economía de tiempo y materiales.
  - Permite la catalogación.

La intercambiabilidad, **la garantía** y **la economía** son los fines últimos de la normalización.

Por el campo de aplicación las normas pueden clasificarse de esta forma:

- Normas
  - Nacionales
    - oficiales
    - de sector
    - de empresas
  - Internacionales
    - CEI
    - ISO
    - OIT, etc.

Las **normas nacionales** se aprueban y aplican dentro de un país. En España, el organismo encargado de la normalización es la Asociación Española de Normalización y Certificación (AENOR), sita en c/ Génova, 6, 28004-Madrid.

Las normas oficiales españolas editadas por AENOR llevan las siglas UNE (una norma española) y están clasificadas en el Catálogo de Normas UNE por medio de **comisiones técnicas de normalización (CTN)**. En la actualidad hay 121 comisiones técnicas, algunas de las cuales citamos a continuación:

0 Estudios fundamentales
1 Normas generales
7 Ensayos de materiales
9 Calderas y recipientes a presión
11 Mobiliario
14 Soldadura y técnicas conexas
15 Máquinas-herramientas
16 Herramientas
17 Elementos de fijación
... .
51 Productos petrolíferos
... .
149 Ingeniería del agua

El código numérico de identificación de una norma UNE está constituido de la forma siguiente:

	A	B	C
UNE	000	000	00

A → Comité técnico de normalización al que pertenece la norma.

B → Código numérico de clasificación, complementado cuando se trata de una revisión (R), una modificación (M) o un complemento (C).

C → Año de edición de la norma.

Por ejemplo:

UNE 1 032 2R 82

es la Norma UNE del CTN nº 1 y, dentro de él, la Norma nº 32 que ha tenido la segunda revisión y está editada en el año 1982. Su título es: "dibujos técnicos: principios generales de representación".

Las **normas de sector** son las que adoptan un grupo de empresas del mismo sector, por ejemplo, empresas eléctricas, de automoción, etc.

Las **normas de empresa** son las que adopta una sola empresa, como, por ejemplo, las normas de Renfe, de Iberdrola, etc.

Otros países elaboran sus normas oficiales con sus siglas propias. Citamos algunos ejemplos:

Alemania	DIN
Bélgica	NBN
Francia	NF
Italia	UNI
Japón	JIS
Reino Unido	BS
EE.UU.	ASA

Las **normas internacionales** son las adoptadas por un organismo internacional de normalización. La **ISO** (International Organization for Standardization) es el organismo internacional más importante en el que están integrados la totalidad de los países, que, en general, adoptan las normas y las recomendaciones ISO.

ISO: Norma elaborada por la Organización Internacional de Normalización.

ISO/R: Recomendación elaborada por la ISO.

ISO/TR: Informe técnico elaborado por la ISO.

Existen otros organismos internacionales de normalización como, por ejemplo, los que se citan a continuación:

CEN: Comité Europeo de Normalización.

CENELEC: Comité Europeo de Normalización Electrónica.

ETSI: Instituto Europeo de Normas de Telecomunicación.

ECISS: Comité Europeo de Normalización de Hierro y Acero.

CEI: Comisión Electrotécnica Internacional.

En los temas siguientes vamos a desarrollar y explicar una serie de normas UNE de Dibujo Técnico, haciéndolo de forma elemental y sencilla, dado el carácter de este primer estudio.

Cuando hacemos un plano debemos aplicar las recomendaciones, consejos y convenciones que indican las normas. De esta forma, el lenguaje gráfico que transmitimos podrá ser interpretado con sencillez y sin indeterminación por los que hablan el mismo lenguaje.

Por ejemplo, la norma que determina las clases de líneas empleadas en dibujo técnico fija que los ejes de simetría total o parcial se representan por medio de una línea fina de trazo y punto. Esto es una norma a seguir.

Otro ejemplo. La norma de representación de roscas fija que las superficies roscadas se representan por medio de una línea fina continua, próxima y paralela al contorno aparente de la superficie roscada. Esta línea fina representa el fondo de la rosca. Esta es otra norma o convención adoptada universalmente.

Aplicando normas como las citadas anterior-mente, conseguiremos que el plano no tenga "faltas de ortografía" y pueda ser interpretado correctamente.

Principios generales de representación

1. Fundamentos del dibujo industrial

El hombre tiene necesidad de representar los objetos que le rodean o aquellos que él se imagina y proyecta, para dárselos a conocer a los demás. Para llevar a efecto esta representación, dispone de una superficie plana que es el papel del dibujo. El problema que se plantea, o mejor, que se planteó desde la antigüedad, era buscar el sistema o los sistemas para representar sobre el papel, que tiene dos dimensiones, un objeto cualquiera, que tiene tres dimensiones.

En la actualidad se emplean varios "**sistemas de representación**", cada uno de los cuales tiene una aplicación específica en una clase de dibujo. Por ejemplo, en "dibujo topográfico" se utiliza el **sistema de planos acotados**; en "dibujo industrial" o "dibujo de taller" propiamente dicho, se emplea el **sistema diédrico**, fundamentalmente. Los "**sistemas de perspectiva axonométrica, caballera** y **cónica**" tienen muy diversas aplicaciones según el tipo de plano y lo que se pretenda conseguir o manifestar.

Del estudio teórico y práctico de estos y de otros sistemas se encarga la **Geometría Descriptiva**, que es el pilar fundamental en el que se apoyan todos los problemas de representación del dibujo técnico en general.

2. Vistas

Vamos a representar un cuerpo sobre un plano empleando proyecciones ortogonales sobre los tres planos del sistema diédrico. Cada una de las proyecciones, en lo sucesivo, recibirá el nombre de "**vista**".

Tenemos el plano horizontal *PH* y el plano vertical *PV*, que son perpendiculares y se cortan según la línea de tierra, *L.T.* Se considera un tercer plano, perpendicular a los anteriores, llamado **plano de perfil** y designado por *PP*. Para entrar en situación, estos tres planos pueden ser: el suelo de la clase, la pared de la pizarra y una de las paredes laterales (**Fig. 2**).

Vamos a representar un cuerpo muy sencillo, como el de la figura. A cada vértice se le puede nombrar con una letra o con un número.

- **Proyección vertical o alzado**:

  Para hallar esta proyección se mira la pieza desde el infinito en la dirección F_1, perpendicular al plano *V*; como ejemplo, los vértices *1, 2, 3* y *4* se proyectan según *1'', 2'', 3''* y *4''*.

El **alzado** es la vista principal de la pieza y es la que tiene que dar mejor idea de la forma de dicha pieza. Esta debe colocarse en la posición de uso o montaje.

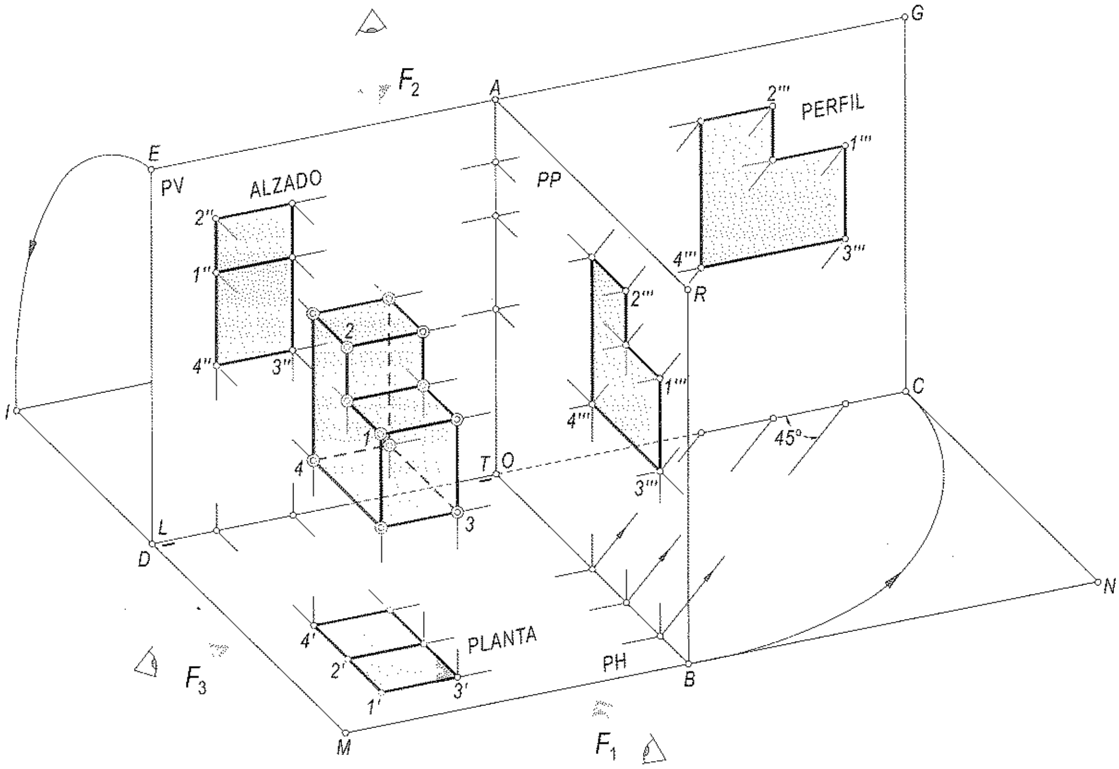


Fig. 2.

- **Proyección horizontal o planta**:

  Para hallar esta proyección se mira la pieza desde el infinito en la dirección F_2, perpendicular al plano *H*, es decir, según la dirección vertical; como ejemplo, los vértices *1, 2, 3* y *4* se proyectan según los puntos *1', 2', 3'* y *4'*.

  Con el alzado y la planta esta pieza no queda definida, ya que no se conoce la forma de sus caras de perfil; por ello, hay que hacer una tercera proyección.

- **Proyección de perfil o perfil**:

  Para hallar esta proyección se mira la pieza desde el infinito en la dirección F_3, perpendicular al plano de perfil *PP*; los puntos *1, 2, 3* y *4* se proyectan según *1''', 2''', 3'''* y *4'''*. Esta es la "**tercera proyección**" o "**perfil**" o "**vista de perfil**" de la pieza.

Se han empleado tres proyecciones perpendiculares, una a cada uno de los planos de proyección.

Veamos la forma de hacer coincidir estos tres planos *PH, PV* y *PP* en uno solo, precisamente el plano horizontal *PH*, que es el plano del dibujo.

1°. Se supone, mentalmente, que el plano de perfil *PP* gira alrededor de la recta *OA* hasta coincidir con el plano vertical. Según esto, el rectángulo *OARB* (Fig. 2) gira alrededor de *OA*, que hace de bisagra o charnela, y viene a confundirse con el *OAGC*. En este giro, la proyección tercera o perfil pasa a estar situada en el plano vertical.

2°. Ahora sólo quedan el plano *H* y el plano *V*. Se supone de nuevo que el plano vertical gira alrededor de *L.T.*, como charnela, hasta confundirse con el horizontal.

Según lo anterior, las tres vistas o proyecciones ya están en un solo plano, el plano *H*, y su disposición final queda como indica la Fig. 3.

Es muy importante observar a la vez estas dos figuras hasta comprenderlas perfectamente.

Esta pieza queda representada o definida con estas tres vistas y el conjunto de ellas es lo que forma "**el plano**" o "**dibujo de taller**" de la pieza.

Las vistas de una pieza han de corresponderse, es decir:

- El alzado y la planta se han de corresponder en la dirección perpendicular a la línea de tierra *L.T.*
- El alzado y el perfil se han de corresponder en la dirección paralela a la línea de tierra *L.T.*
- La planta y el perfil se han de corresponder también, lo que se comprueba con los arcos de 90° de la figura o bien con rectas a 45° con la *L.T.*

Si a estas vistas se agregan las "cotas" o "medidas" necesarias tendremos el plano completo.

Cuando la pieza o el cuerpo a representar sea más complicado, habrá necesidad de dibujar más vistas, ayudarse de símbolos, dar alguna sección o corte, agregar leyendas explicativas, etc. El estudio de todas estas convenciones, normalizadas internacionalmente, es lo que realmente constituye el Dibujo Industrial y, paso a paso, se irán estudiando, a fin de familiarizarse con ellas.

En las Figs. 2 y 3 queda expuesta la idea fundamental: la forma de representar los cuerpos en "dibujo de taller".

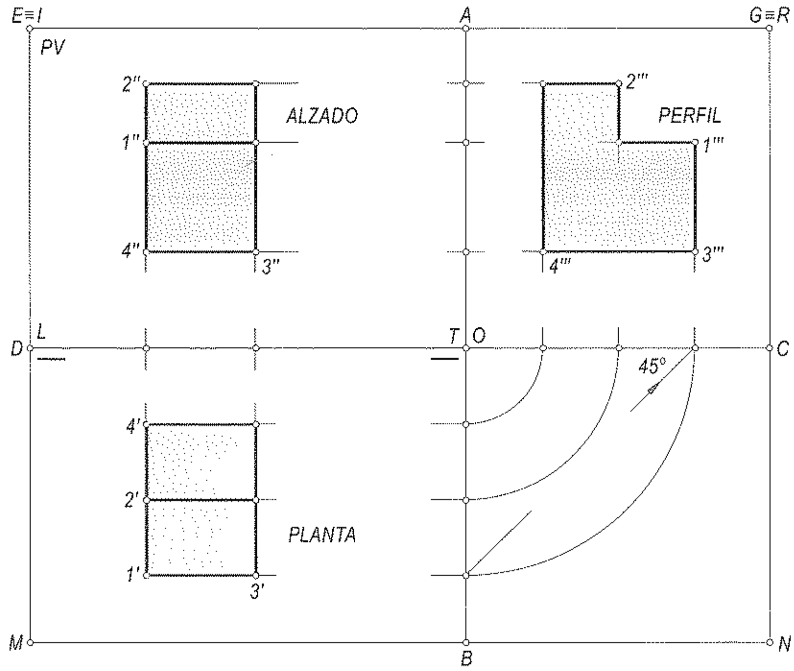


Fig. 3.

NORMALIZACIÓN

3. Vistas necesarias de una pieza

Hay que hacer el plano de una pieza. El proceso es el siguiente:

- Estudio lo más detallado posible de la misma.
- Decidir en qué posición se va a dibujar, eligiendo para ello como "alzado" la vista que manifieste el mayor número de detalles y la mejor idea de la forma de la pieza. Se dibuja el alzado.
- Deducir el número de vistas necesarias para la determinación completa de la pieza. Se dibujará la planta, debajo del alzado y correspondiéndose con él; luego, si es preciso, un perfil, y si la complejidad de la pieza lo requiere, se dibujarán hasta un total de seis vistas. Todo cuerpo se puede proyectar sobre las seis caras de un paralelepípedo rectángulo que lo envuelva. Se tienen así el alzado, la planta, el perfil, un segundo perfil, la vista desde abajo y la vista por detrás.

4. Denominación de las vistas (Fig. 4)

Las vistas reciben los nombres siguientes:

Vista según *A* = **Vista de frente o alzado.**

Vista según *B* = **Vista por encima o planta superior.**

Vista según *C* = **Vista desde la izquierda o perfil izquierdo.**

Vista según *D* = **Vista desde la derecha o perfil derecho.**

Vista según *E* = **Vista desde abajo o planta inferior.**

Vista según *F* = **Vista por detrás o alzado posterior.**

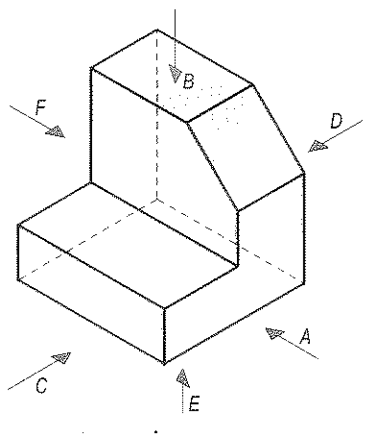


Fig. 4.

5. Posiciones relativas de las vistas

Pueden utilizarse dos variantes de proyección ortogonal de la misma importancia:

- El método de proyección del primer diedro (antiguamente método *E*: Europeo).
- El método de proyección del tercer diedro (antiguamente método *A*: Americano).

Método de proyección del primer diedro.

La pieza se supone situada en el primer diedro.

Se dibuja la vista de frente o alzado (vista *A*). A partir de ésta, las demás vistas se colocan como indica la Fig. 5.

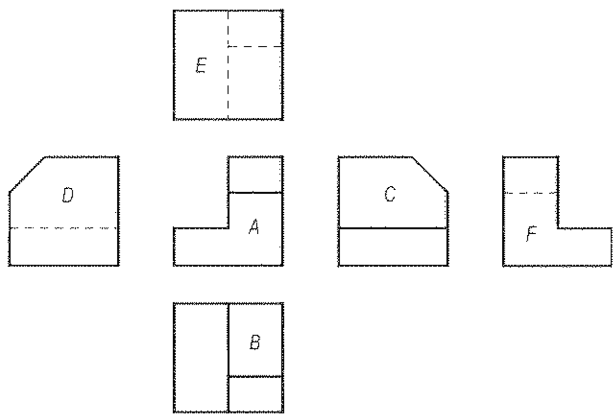


Fig. 5.

- La vista por encima o planta superior, vista *B*, se coloca debajo de *A* y correspondiéndose con ella.
- La vista desde la izquierda o perfil izquierdo, vista *C*, se coloca a la derecha del alzado *A*.
- La vista desde la derecha o perfil derecho, vista *D*, se dibuja a la izquierda del alzado *A*.
- La vista desde abajo o planta inferior, vista *E*, se dibuja encima del alzado *A*.
- La vista por detrás o alzado posterior, vista *F*, se puede colocar indistintamente a la izquierda del perfil *D* o a la derecha del perfil *C*.

Para indicar que un plano está dibujado en este sistema, se dibuja el símbolo que indica la Fig. 6, que son las vistas de un tronco de cono, dibujado en este sistema. Este símbolo se coloca en la casilla de "escala" y después de ella.

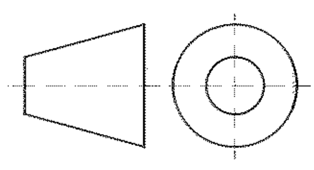


Fig. 6.

Método de proyección del tercer diedro.

La pieza se supone situada en el tercer diedro.

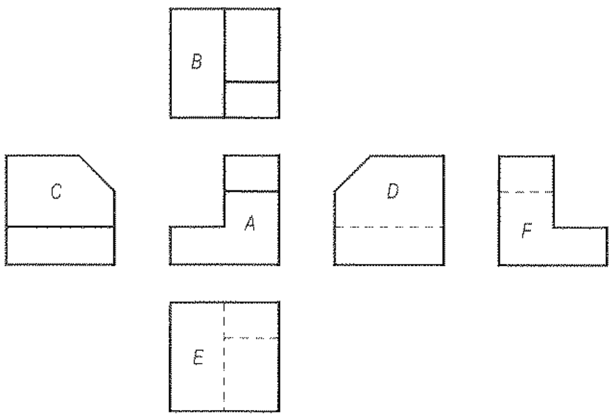


Fig. 7.

Se dibuja la vista de frente o alzado (vista *A*). A partir de ésta, las demás vistas se colocan como indica la Fig. 7.

- La vista por encima o planta superior, vista *B*, se dibuja encima del alzado *A*.
- La vista desde la izquierda o perfil izquierdo, vista *C*, se coloca a la izquierda del alzado *A*.
- La vista desde la derecha o perfil derecho, vista *D*, se coloca a la derecha del alzado A.
- La vista desde abajo o planta inferior, vista *E*, se dibuja debajo del alzado *A*.
- La vista por detrás o alzado posterior, vista *F*, se puede poner indistintamente a la izquierda de *C* o a la derecha de *D*.

Si un plano está dibujado en este sistema, se puede indicar con el símbolo de la Fig. 8. Es el mismo tronco de cono, pero obsérvese que la vista desde la izquierda se pone a la izquierda, al contrario que en el sistema anterior.

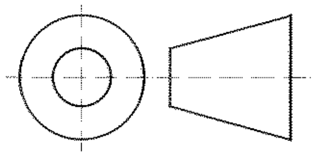


Fig. 8.

6. Elección de las vistas

La vista más característica del objeto debe elegirse como vista de frente o vista principal.

Generalmente, esta vista representa al objeto en su posición de utilización.

Las piezas utilizables en cualquier posición se representan preferentemente en su posición principal de mecanización o de montaje.

Cuando sean necesarias otras vistas (incluidas las secciones), deben elegirse de manera que:

- Se limite el número de vistas y de secciones al mínimo necesario, pero suficiente para definir el objeto sin ambigüedad.
- Se evite la representación de numerosos contornos o aristas ocultos.
- Se evite la repetición inútil de detalles.

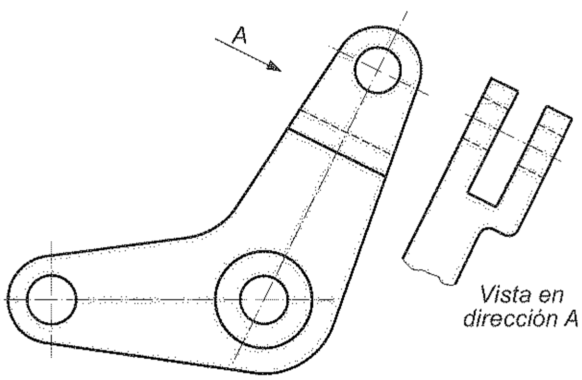


Fig. 9.

7. Vistas particulares

Cuando una vista no se puede hacer en una de las seis direcciones indicadas, o si la posición no está de acuerdo con los sistemas estudiados, se debe indicar la dirección de observación con una flecha y una letra (Figs. 9 y 10).

En la Fig. 10, obsérvese que el perfil está visto desde la derecha y tendría que ir dibujado a la izquierda del alzado. La excepción está en dibujarlo a la derecha del alzado y por ello se indica con **la flecha y la letra *A*** y debajo del perfil se pone la leyenda "**vista en dirección *A***".

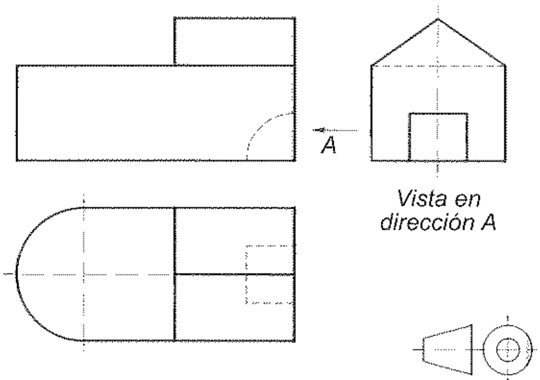


Fig. 10.

Cualquiera que sea la dirección de observación de las vistas, las letras mayúsculas de identificación de vistas deben colocarse siempre en la posición normal de lectura del dibujo.

Las vistas particulares, también llamadas "vistas auxiliares", se emplean sobre todo cuando la pieza tiene partes oblicuas a los planos de proyección (Fig. 11). Se obtiene así, por medio de un cambio de plano, una nueva proyección ortogonal que permite una mayor claridad y rapidez en el dibujo.

8. Vistas locales

En los elementos simétricos se permite dar una vista local en lugar de una vista completa, con la condición de que la representación no sea ambigua (Fig. 12).

Las vistas locales deben realizarse según el método de proyección del tercer diedro, cualquiera que sea el método elegido para la ejecución general del dibujo.

Las vistas locales se dibujan con línea llena gruesa y deben estar unidas a la vista principal por medio de una línea fina de trazos y puntos. La Fig. 12 muestra cuatro ejemplos de vistas locales.

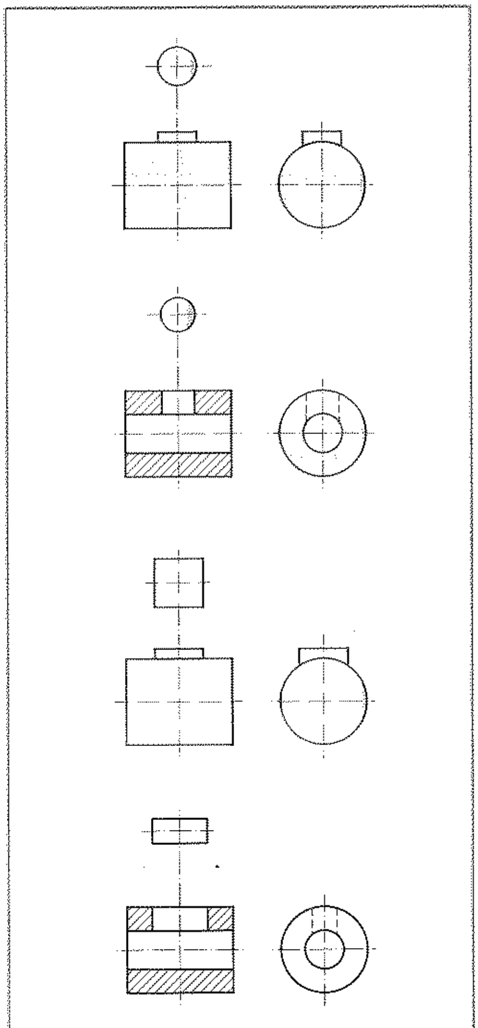


Fig. 12.

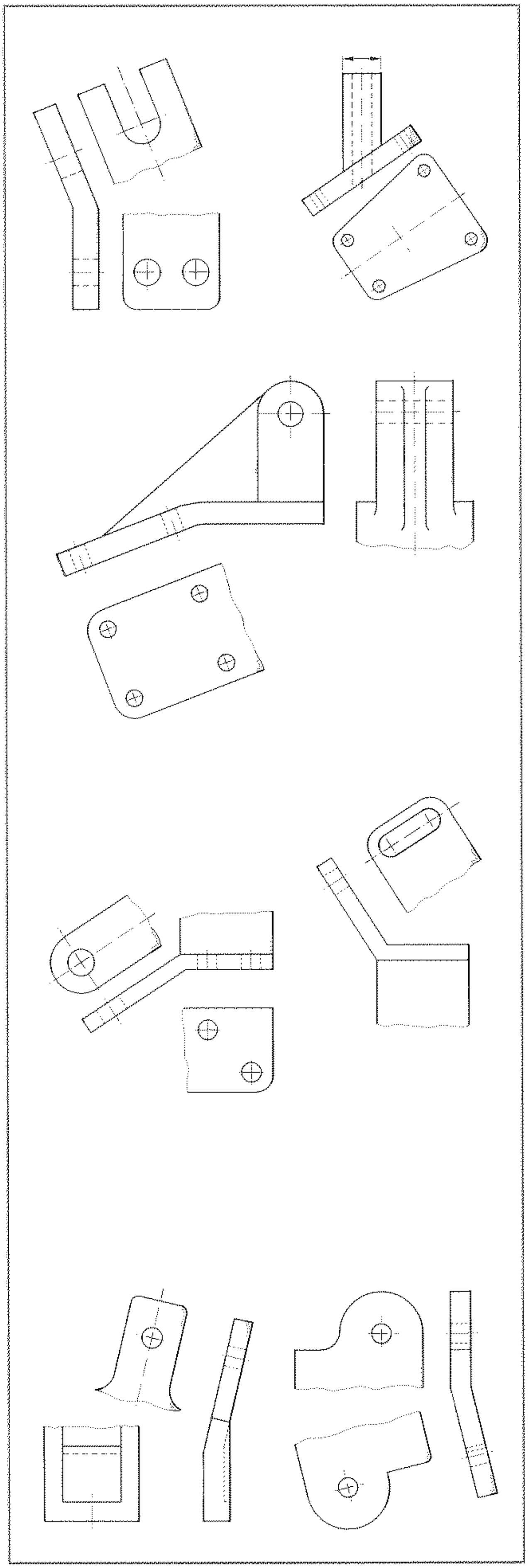


Fig. 11. Ejemplos de vistas particulares o auxiliares.

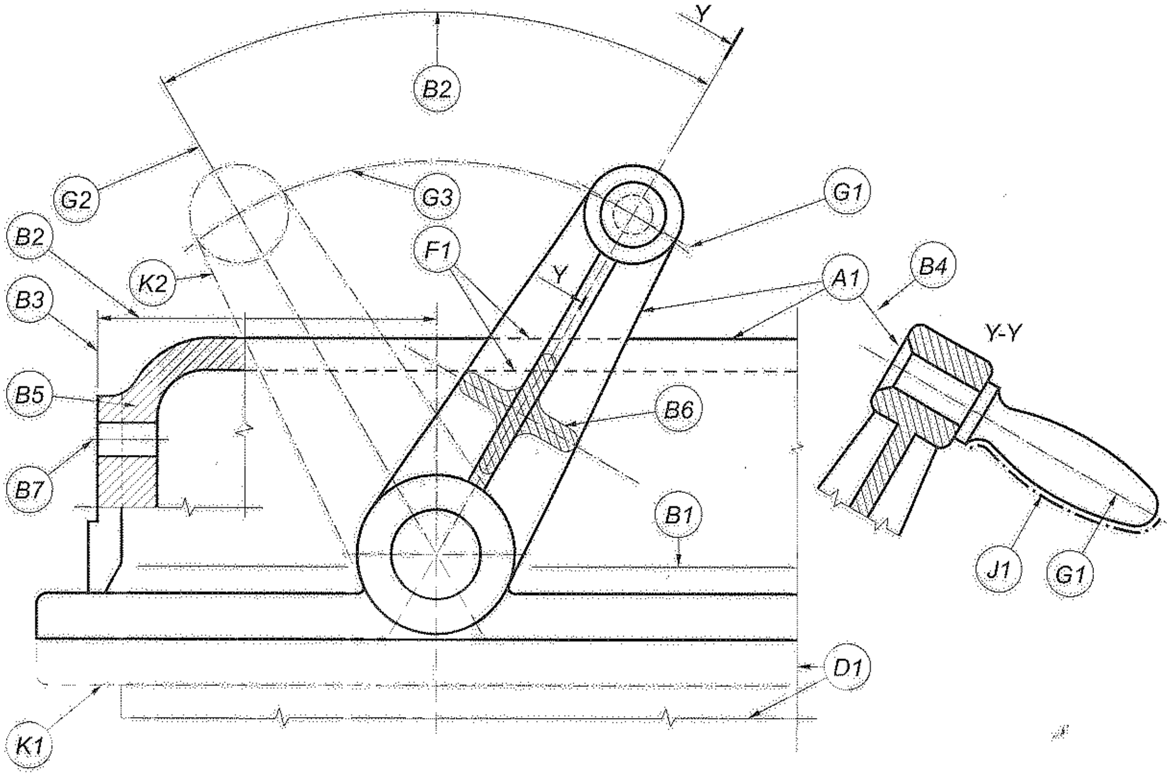


Fig. 13.

9. Clases de líneas empleadas en dibujo industrial

En la tabla 1 figuran los tipos de líneas empleados, su designación y las correspondientes aplicaciones de cada una de ellas.

Únicamente los tipos de anchuras de línea que figuran en la tabla se utilizan para las aplicaciones correspondientes.

Cuando se utilicen otros tipos o anchuras de línea en casos especiales (p. ej., esquemas eléctricos o de tuberías) o cuando las líneas definidas en la tabla se utilicen en otras aplicaciones especiales diferentes a las dadas en la última columna, los convenios elegidos deben estar indicados en otras normas internacionales o deben citarse en una leyenda o apéndice en el dibujo de que se trate.

Las aplicaciones características de los diferentes tipos de líneas se muestran en las Figs. 13 y 14.

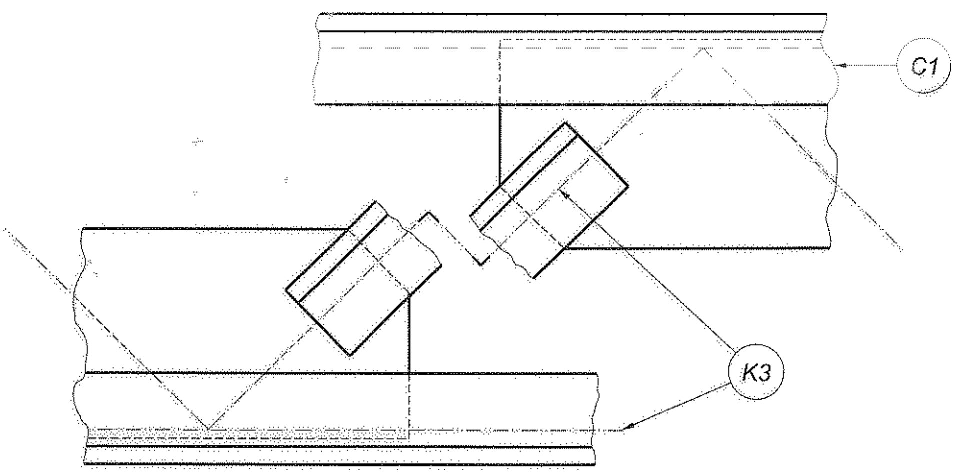


Fig. 14.

Tabla 1

Línea	Designación	Aplicaciones generales. Véanse las figuras 13 y 14
A	Línea gruesa	A1 Contornos vistos A2 Aristas vistas
B	Línea fina (recta o curva)	B1 Líneas ficticias vistas B2 Líneas de cota B3 Líneas de proyección B4 Líneas de referencia B5 Rayados B6 Contornos de secciones abatidas sobre la superficie del dibujo B7 Ejes cortos
C *D*[1]	Línea fina a mano alzada[2] Línea fina (recta) con zigzag	C1 Límites de vistas o cortes parciales o interrumpidos D1 Líneas finas a trazos y puntos
E *F*	Gruesa de trazos Fina de trazos	E1 Contornos ocultos E2 Aristas ocultas F1 Contornos ocultos F2 Aristas ocultas
G	Fina de trazos y puntos	G1 Ejes de revolución G2 Trazas de plano de simetría G3 Trayectorias
H	Fina de trazos y puntos, gruesa en los extremos y en los cambios de dirección	H1 Trazas de plano de corte
J	Gruesa de trazos y puntos	J1 Indicación de líneas o superficies que son objeto de especificaciones particulares
K	Fina de trazos y doble punto	K1 Contornos de piezas adyacentes K2 Posiciones intermedias y extremos de piezas móviles K3 Líneas de centros de gravedad K4 Contornos iniciales antes del conformado K5 Partes situadas delante de un plano de corte

1) Este tipo de línea se utiliza particularmente para los dibujos ejecutados de una manera automatizada.

2) Aunque haya disponibles dos variantes, sólo hay que utilizar un tipo de línea en un mismo dibujo.

10. Anchura de las líneas

La relación entre las anchuras de las líneas gruesas y finas no debe ser inferior a 2.

La anchura de la línea debe elegirse en función de las dimensiones o del tipo de dibujo entre la gama siguiente:

0,18; 0,25; 0,35; 0,5; 0,7; 1; 1,4 y 2 mm.

No es aconsejable la línea de anchura inferior a 0,18 mm, ante las dificultades con algunos procedimientos de reproducción.

Debe conservarse la misma anchura de línea para las diferentes vistas de una pieza, dibujadas con la misma escala.

11. Espaciamiento entre líneas

El espaciamiento mínimo entre líneas paralelas (comprendida la representación de los rayados) no debe nunca ser inferior a dos veces la anchura de la línea más gruesa. Se recomienda que este espacio no sea nunca inferior a 0,7 mm.

12. Orden de prioridad de las líneas coincidentes

Si dos o más líneas de naturaleza diferente coinciden, el orden de prioridad es el siguiente (Fig. 15).

1) contornos y aristas vistos (línea llena gruesa, tipo *A*);

2) contornos y aristas ocultos (línea de trazos, tipo *E* o *F*);

3) trazas de planos de corte (línea fina de trazos y puntos, gruesa en los extremos y en los cambios de dirección, tipo *H*);

4) ejes de revolución y trazas de planos de simetría (línea fina de trazos y puntos, tipo *G*);

5) líneas de centros de gravedad (línea fina de trazos y doble punto, tipo *K*);

6) líneas de proyección (línea llena fina, tipo *B*).

Los contornos contiguos de piezas ensambladas o unidas deben coincidir, excepto en el caso de secciones delgadas negras.

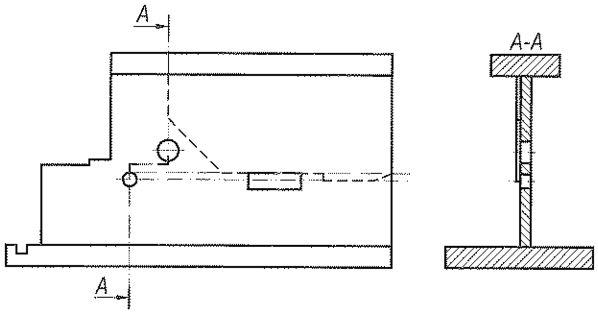


Fig. 15.

13. Terminación de las líneas de referencia

Una línea de referencia sirve para indicar un elemento (línea de cota, objeto, contorno, etc.).

Las líneas de referencia deben terminar:

- en un punto, si acaban en el interior del contorno del objeto representado (Fig. 16);
- en una flecha, si acaban en el contorno del objeto representado (Fig. 17);
- sin punto ni flecha, si acaban en una línea de cota (Fig. 18).

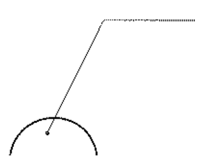


Fig. 16.

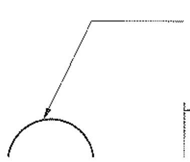


Fig. 17.

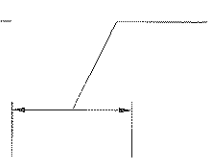
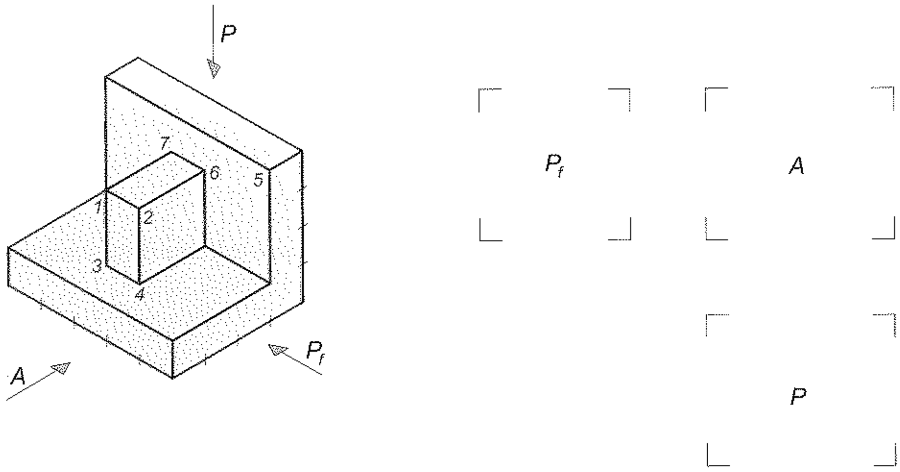


Fig. 18.

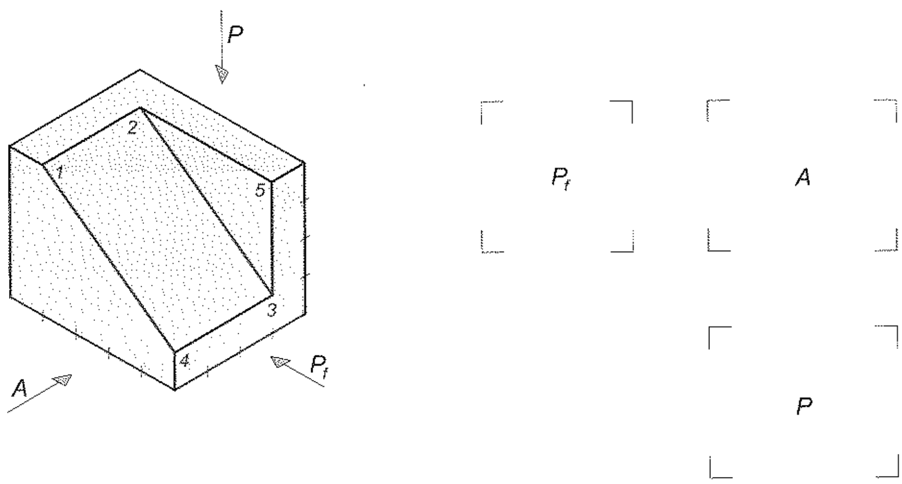
ACTIVIDADES

Se dan tres piezas representadas en perspectiva. Se pide: Dibujar a mano alzada las tres vistas en las direcciones indicadas. Situar en ellas la posición de los vértices numerados.

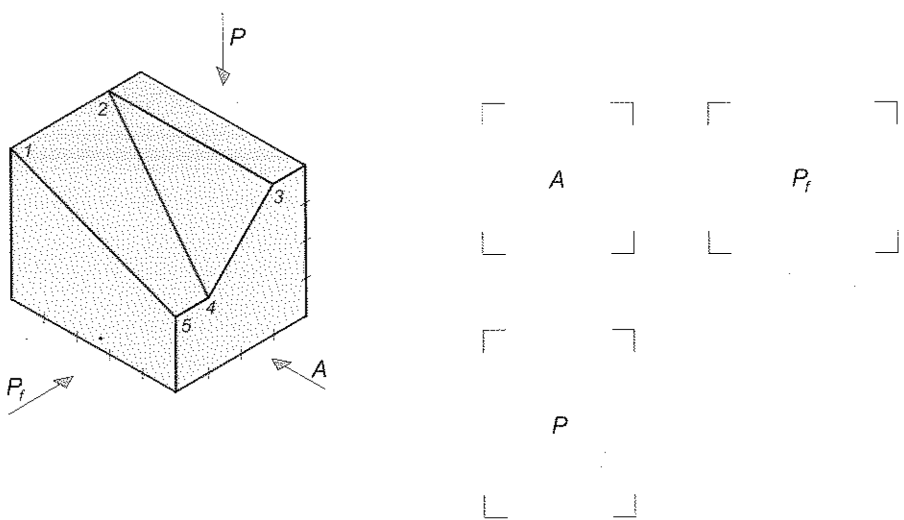
1



2

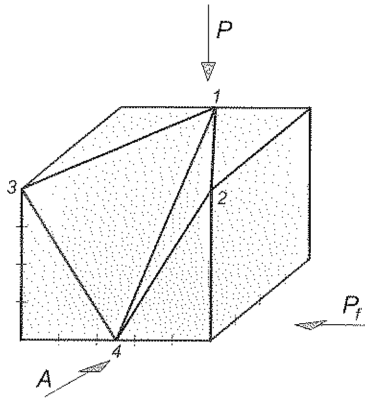


3



Se dan tres piezas representadas en perspectiva. Se pide: Dibujar a mano alzada las tres vistas en las direcciones indicadas. Situar en ellas la posición de los vértices numerados.

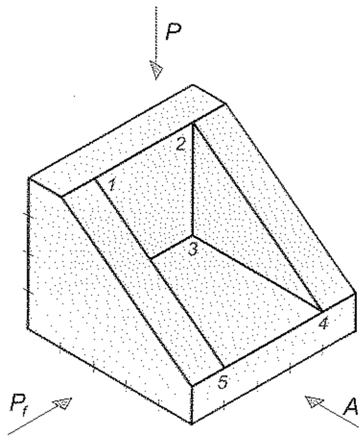
1



P_f A

P

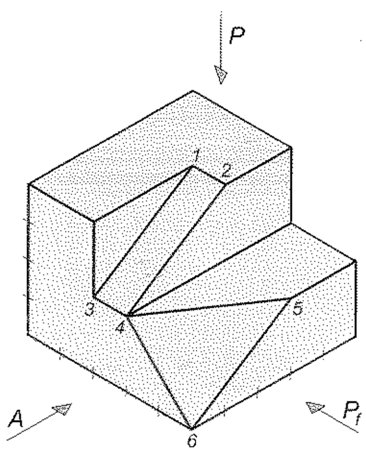
2



A P_f

P

3

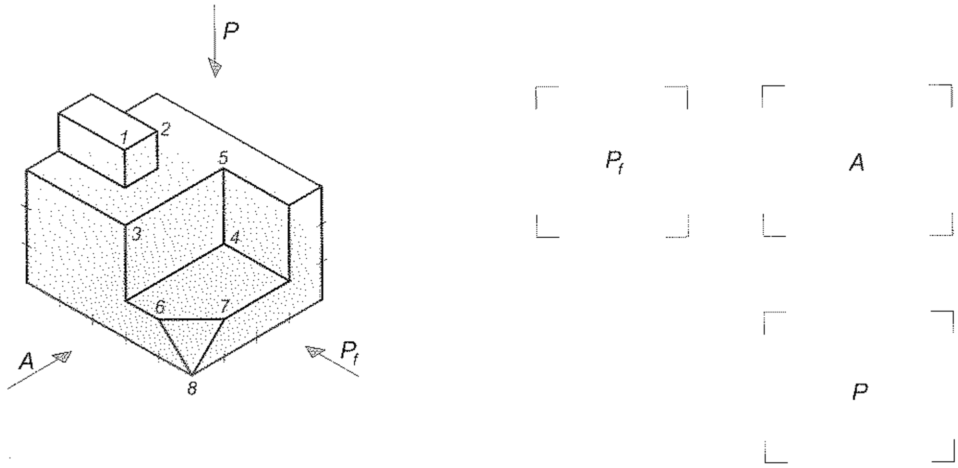


P_f A

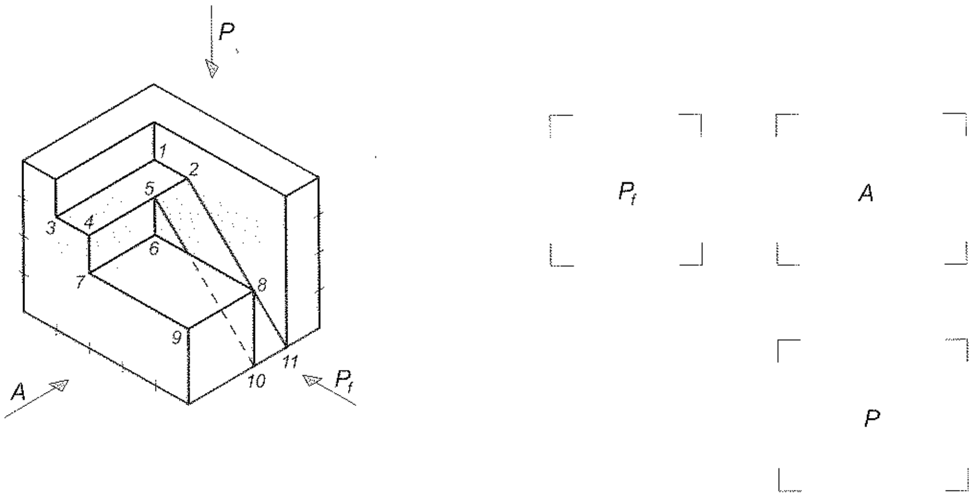
P

Se dan tres piezas representadas en perspectiva. Se pide: Dibujar a mano alzada las tres vistas en las direcciones indicadas. Situar en ellas la posición de los vértices numerados.

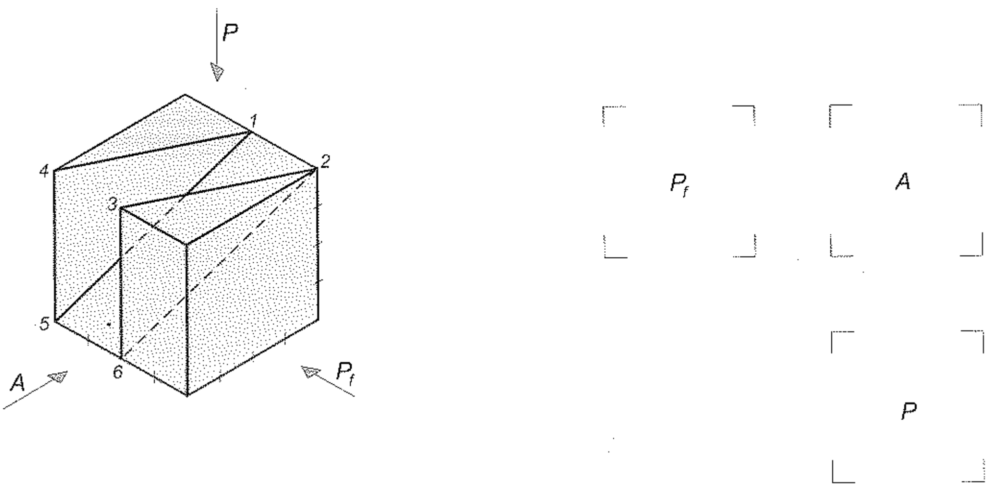
1



2

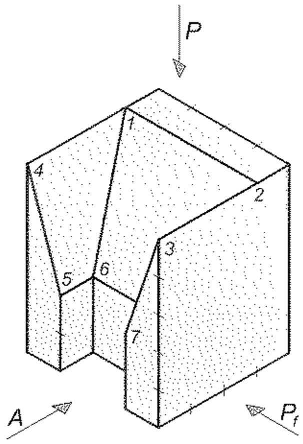


3



Se dan tres piezas representadas en perspectiva. Se pide: Dibujar a mano alzada las tres vistas en las direcciones indicadas. Situar en ellas la posición de los vértices numerados.

1

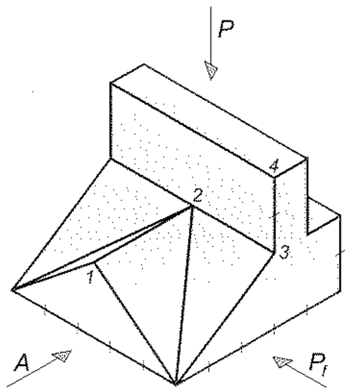


P_f

A

P

2

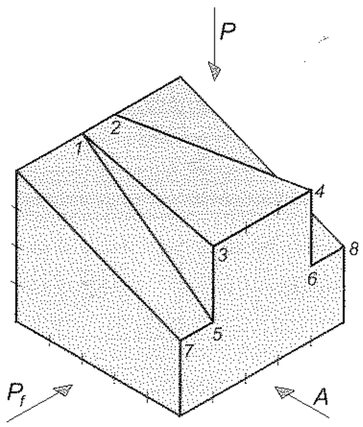


P_f

A

P

3



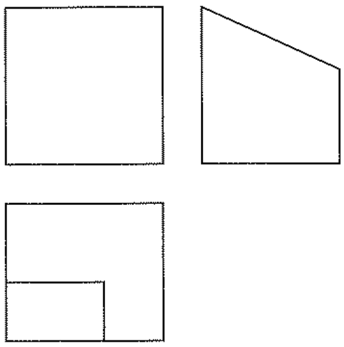
A

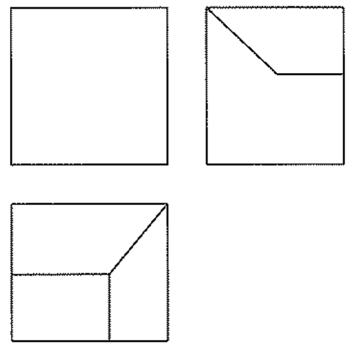
P_f

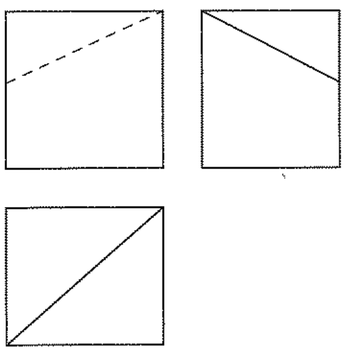
P

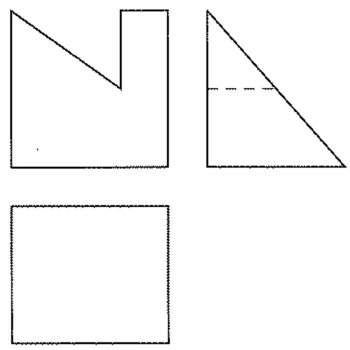
Se dan las vistas incompletas de seis piezas. Se pide:

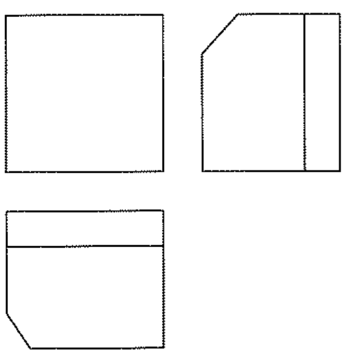
- Completar las vistas con las líneas que faltan.
- Visualizar las piezas mediante una perspectiva convencional a mano alzada.

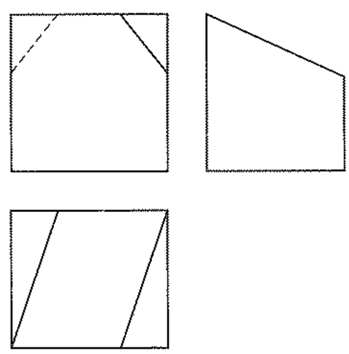
1


4


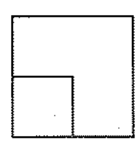
2


5


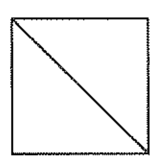
3


6


Dibujar tres alzados diferentes que se correspondan con esta planta.



Dibujar cuatro alzados diferentes que se correspondan con esta planta.



En todos los casos, visualizar las piezas.

NORMALIZACIÓN
Rotulación normalizada

TEMA 17

Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática el alumno debe conocer la forma de la escritura normalizada, letras y números, para luego poder indicar en los planos las cotas, materiales y todo tipo de leyendas explicativas.

Si el alumno puede ir disponiendo de plantillas para rotular y de estilógrafos, es lógico que la práctica se extienda a la rotulación con plantillas.

Esta unidad temática se puede hacer en una clase y la práctica de la misma a lo largo de todo el curso.

1. Objeto y características de la rotulación

La escritura de los planos se hace rotulada, bien a mano alzada o con plantillas, o bien mediante el ordenador a través del propio menú de texto que tenga el programa.

En este tema se desarrolla la escritura rotulada, es decir, la que se hace sobre planos a la manera tradicional, sin ayuda del ordenador, sistema todavía muy utilizado.

La escritura rotulada es muy importante, pues sirve para indicar medidas, materiales, acabados y todo tipo de especificaciones.

La rotulación, sea de tipo inclinada o vertical, está normalizada en la Norma UNE 1034-75, que concuerda con la ISO 3098/1 (1974).

La escritura utilizada en los dibujos técnicos debe ser:

- **Legible**, es decir, que pueda leerse con facilidad.
- **Homogénea**, es decir, que sean constantes la anchura de las líneas y la separación de las letras.
- **Apta para el microfilme** y otros procedimientos de reproducción fotográfica.

Con objeto de satisfacer las exigencias anteriores, hay que tener en cuenta las normas siguientes:

- Deben distinguirse claramente unos caracteres de otros, para evitar cualquier confusión entre ellos, incluso en el caso de ligeras alteraciones.
- El microfilme y los otros procedimientos de reproducción fotográfica exigen que la distancia entre dos líneas contiguas, o el espacio entre letras o cifras, sea, como mínimo, igual al doble de la anchura de la línea. En el caso de que dos líneas contiguas tengan anchuras diferentes, el espacio deberá ser igual al doble de la anchura de la línea más ancha (Fig. 1 y tabla 2).
- Deberá emplearse la misma anchura para las letras minúsculas y las mayúsculas.

2. Medidas de las letras y de las cifras

En cuanto a las medidas de las letras y de las cifras, se tendrá en cuenta:

1. La altura *h* de las mayúsculas se toma como medida nominal (tablas 1 y 2).
2. La gama de alturas *h* normalizadas de escritura es la siguiente:

   2,5 - 3,5 - 5 - 7 - 10 - 14 - 20 mm

   La razón $\sqrt{2}$ de la gama de alturas de escritura se deriva de la progresión normalizada de las medidas de los formatos de papel.
3. Las alturas *h* y *c* no serán inferiores a 2,5 mm. Según esto, un texto que tenga una altura máxima de escritura de 2,5 mm. solamente puede escribirse con letras mayúsculas.
4. Las dos relaciones normalizadas para **d/h**, *1/14* y *1/10*, son las más económicas, pues corresponden a un número mínimo de anchuras de trazo, según se ve en las tablas 1 y 2.

   Las relaciones recomendadas para la altura de las minúsculas (sin tener en cuenta los trazos salientes hacia arriba o hacia abajo), para el espacio entre los caracteres y para el espacio mínimo entre las líneas de apoyo de la escritura (interlínea) y entre las palabras, se dan en las tablas 1 y 2.
5. La escritura puede ser **cursiva** (con una inclinación de 15° hacia la derecha) o **vertical**.
6. Las anchuras de trazos normalizados son:

   0,18 - 0,25 - 0,35 - 0,5 - 0,7 - 1 - 1,4 - 2 mm (serie 1)
7. La serie 2 se incluye para poder aprovechar aparatos de escritura y de dibujo existentes durante un período transitorio (corresponde a la antigua serie de tamaños nominales de la norma):

   0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 - 0,5 - 0,6 - 0,8 - 1,2 mm (serie 2)

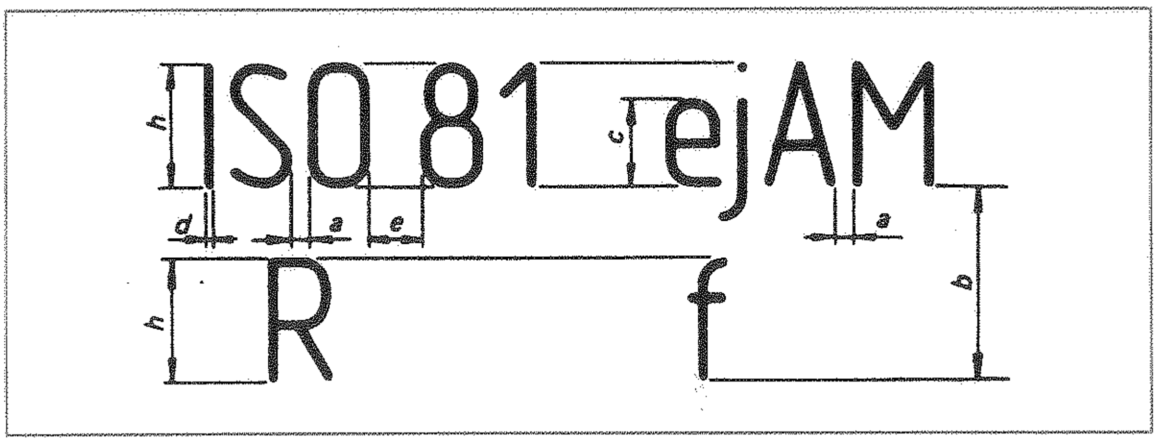


Fig. 1.

3. Escritura estrecha

Tabla 1

Escritura A (d = h/14) — Valores en milímetros

Características		Relación	Medidas						
Altura de escritura									
Altura de las mayúsculas	*h*	(14/14) *h*	2,5	3,5	5	7	10	14	20
Altura de las minúsculas (sin trazos salientes)	*c*	(10/14) *h*	---	2,5	3,5	5	7	10	14
Espacio entre caracteres	*a*	(2/14) *h*	0,35	0,5	0,7	1	1,4	2	2,8
Espacio mínimo entre líneas de apoyo de la escritura (interlínea)	*b*	(20/14) *h*	3,5	5	7	10	14	20	28
Espacio mínimo entre palabras	*e*	(6/14) *h*	1,05	1,5	2,1	3	4,2	6	8,4
Anchura del trazo	*d*	(1/14) *h*	0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1	0,18

Nota. El espacio *a* entre dos caracteres podrá reducirse a la mitad si proporciona un mejor efecto visual, por ejemplo. LA TV: le corresponderá entonces una anchura de trazo *d*.

Escritura A cursiva

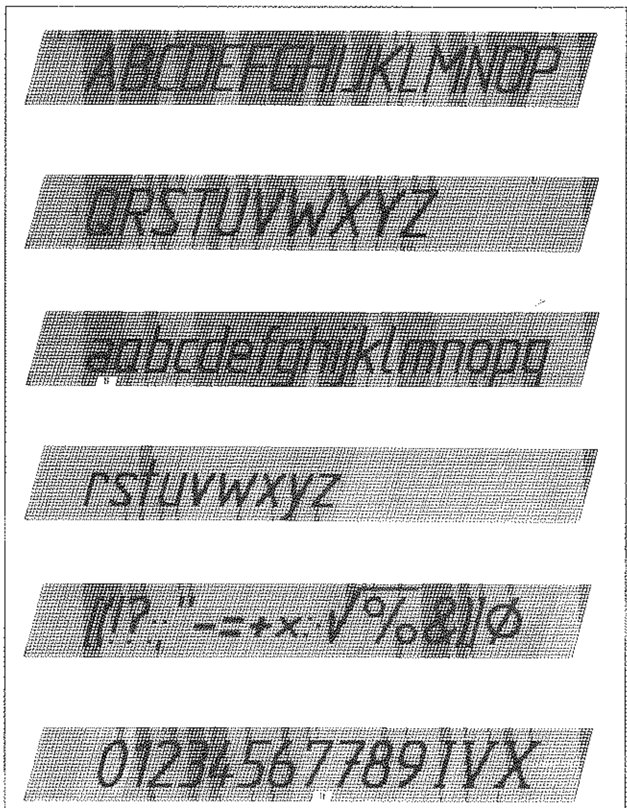


Fig. 2.

Escritura A derecha

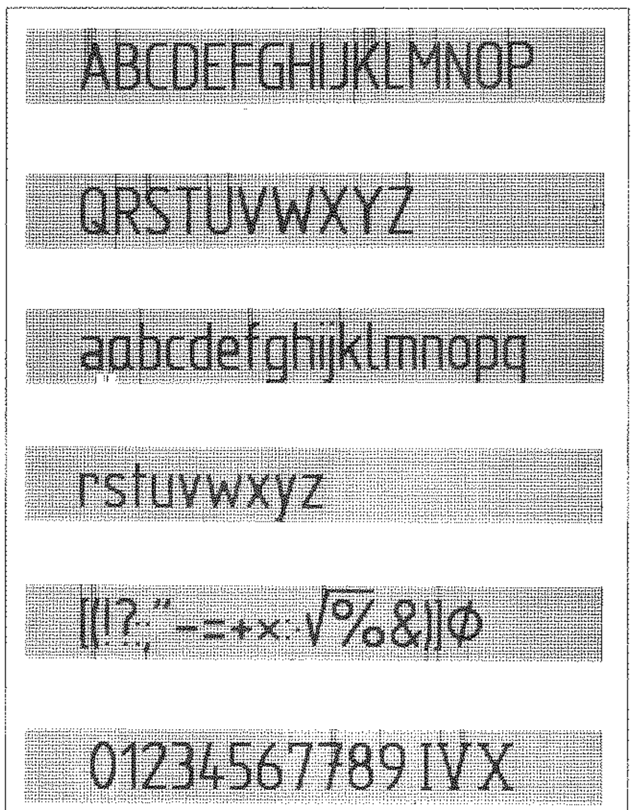


Fig. 3.

4. Escritura corriente

Tabla 2

Escritura B (d = h/10) — Valores en milímetros

Características		Relación	Medidas						
Altura de escritura									
Altura de las mayúsculas	*h*	(10/10) *h*	2,5	3,5	5	7	10	14	20
Altura de las minúsculas (sin trazos salientes)	*c*	(7/10) *h*	---	2,5	3,5	5	7	10	14
Espacio entre caracteres	*a*	(2/10) *h*	0,5	0,7	1	1,4	2	2,8	4
Espacio mínimo entre líneas de apoyo de la escritura (interlínea)	*b*	(14/10) *h*	3,5	5	7	10	14	20	28
Espacio mínimo entre palabras	*e*	(6/10) *h*	1,5	2,1	3	4,2	6	8,4	12
Anchura del trazo	*d*	(1/10) *h*	0,25	0,35	0,5	0,7	1	1,4	2

Nota. El espacio *a* entre dos caracteres podrá reducirse a la mitad si proporciona un mejor efecto visual, por ejemplo. LA TV. le corresponderá entonces una anchura de trazo *d*.

Escritura B cursiva

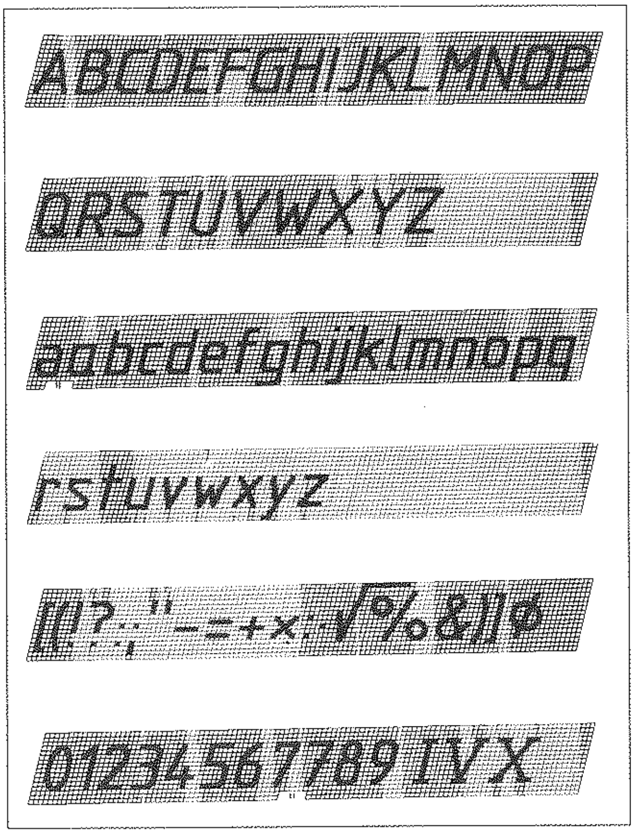


Fig. 4.

Escritura B derecha

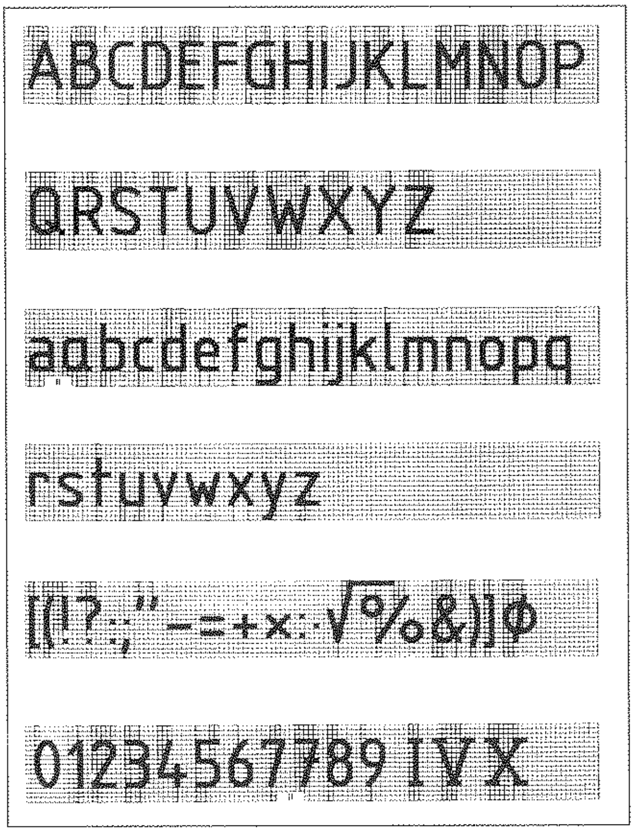


Fig. 5.

5. Rotulación a mano

La soltura en la rotulación a mano requiere una práctica lenta y constante. Debe tenerse en cuenta, como norma más importante, la uniformidad de las letras y su separación.

Se utilizan plumillas de punta redonda, llamadas "de punto vuelto", "de platillo" o "de paleta", las cuales se cargan con el cuentagotas del tintero o con el tubo de tinta. La superficie del platillo, que es el elemento trazador de la pluma, debe apoyarse totalmente en el papel para conseguir un trazo uniforme.

Las plumas se designan por el diámetro del platillo y pueden ser de:

0,25 - 0,5 - 0,75 - 1 - 1,5 - 2 mm.

En la **Fig. 6** se indica la posición correcta de la pluma, tanto en la forma de cogerla como con la inclinación de 60° respecto al plano del papel. De esta forma el platillo queda completamente apoyado.

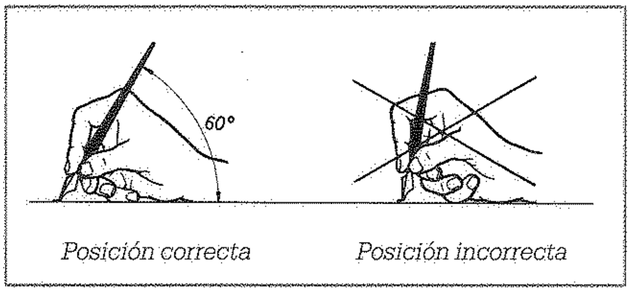


Fig. 6.

Para rotular, hay que trazar "líneas de guía" que delimitan la altura de las letras; se hacen a lápiz y de trazo muy fino. Existen plantillas para el trazado de las líneas de guía para el rotulado (**Fig. 7**).

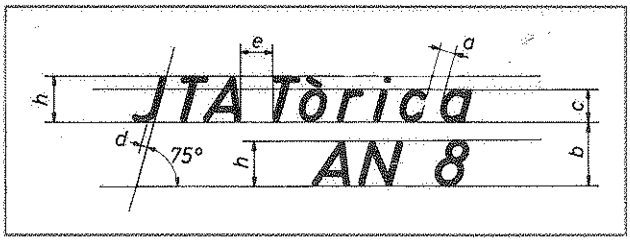


Fig. 7.

Conviene empezar rotulando a lápiz con mina poco dura, p. ej., HB.

La letra que se emplea es de trazo simple o de palo seco, es decir, el grueso de los palos y ganchos de las letras es uniforme e igual a la anchura de la pluma.

La presión que se ejerce con la pluma sobre el papel debe ser constante y suficiente, pero no excesiva, ya que el trazo obtenido no sería el deseado.

Los trazos de las letras y de las cifras deben hacerse en el orden y sentido que se indica a continuación:

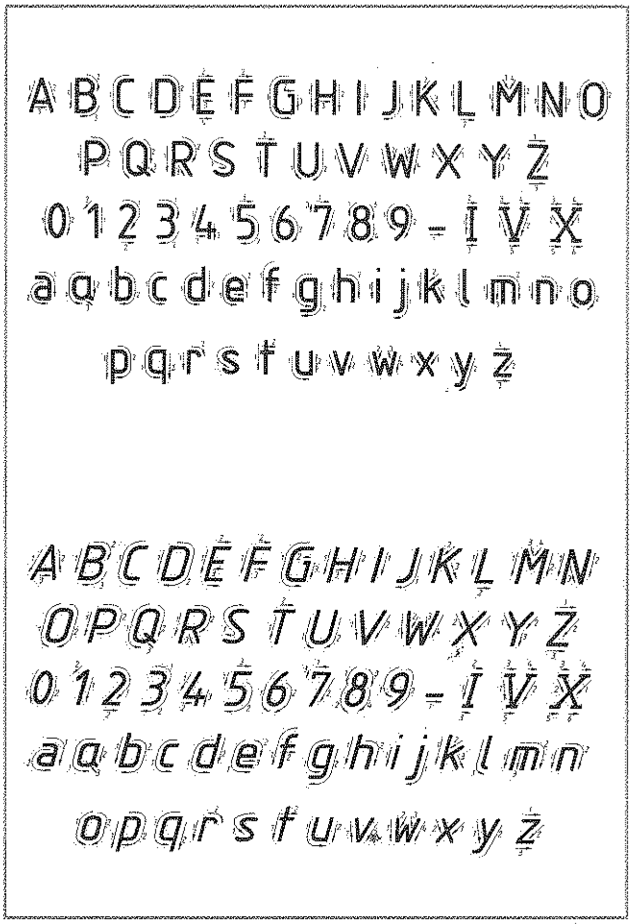


Fig. 8.

6. Rotulación con plantilla

Este tipo de rotulación requiere también una gran práctica para adquirir la soltura y seguridad necesarias. Se utilizan plantillas y plumas especiales.

Plantillas para rotular

Las plantillas para rotular o normógrafos están formadas por una placa rectangular de plástico en la que están troqueladas las letras, números y símbolos. Para su mejor manejo y apoyo en la regla, llevan en sus bordes unos listones o guías metálicas, que dejan la placa de plástico separada del papel.

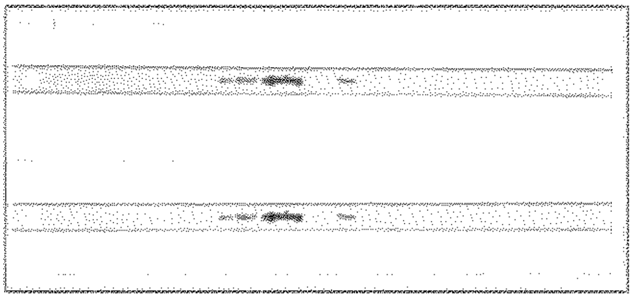


Fig. 9. Plantillas o normógrafos para rotular.

Las plantillas se deben lavar frecuentemente con jabón y un cepillo al chorro de agua; si la tinta está muy seca, se dejan a remojo en agua tibia cierto tiempo.

Plumas para rotular con plantilla

Las letras, números y símbolos se trazan con plumas especiales de las que existen diversas marcas en el mercado. Son de sistema tubular, correspondiendo a cada plantilla, por el tamaño de la letra, la pluma correspondiente.

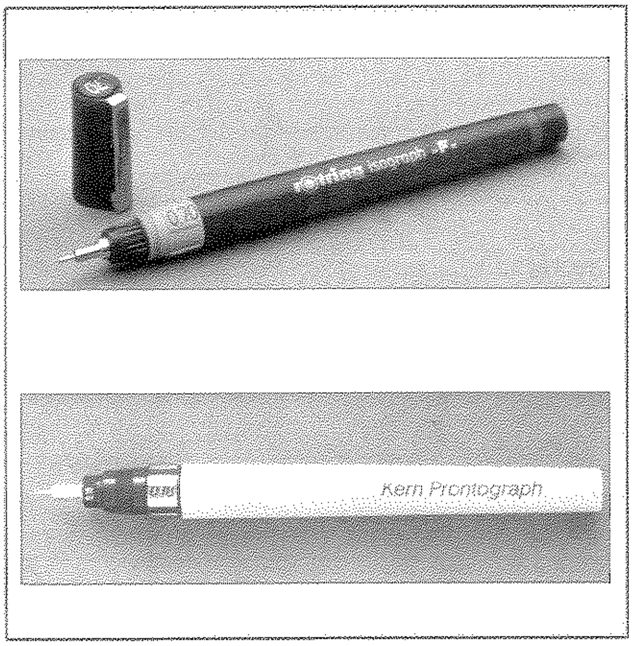


Fig. 10. Dos tipos de plumas para rotular con plantilla.

La pluma de rotular ha de permanecer en posición perpendicular al papel a fin de que la base del cilindro trazador esté situada en dicho plano y se obtenga el trazo correcto. Son instrumentos de gran calidad y deben cuidarse para que su duración sea indefinida; periódicamente hay que desmontarlas y lavarlas simplemente al chorro de agua.

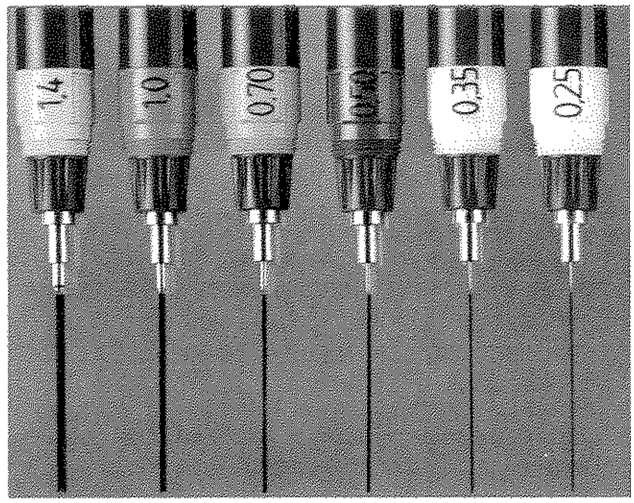


Fig. 11. Espesores de trazos.

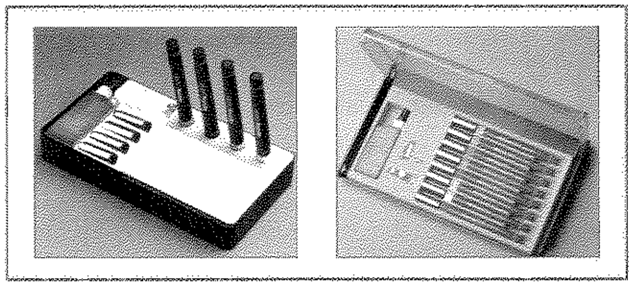
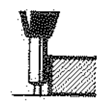


Fig. 12. Estuches de plumas para rotular y dibujar.



Esta es la punta estrangulada de las plumas para dibujar, apoyada en la regla plana.

Esta es la punta plana de las plumas para rotular, introducida en la plantilla.

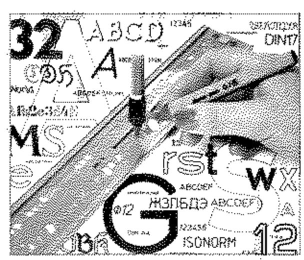


Fig. 13. Rotulación con plantilla.

NORMALIZACIÓN
Acotación

TEMA 18

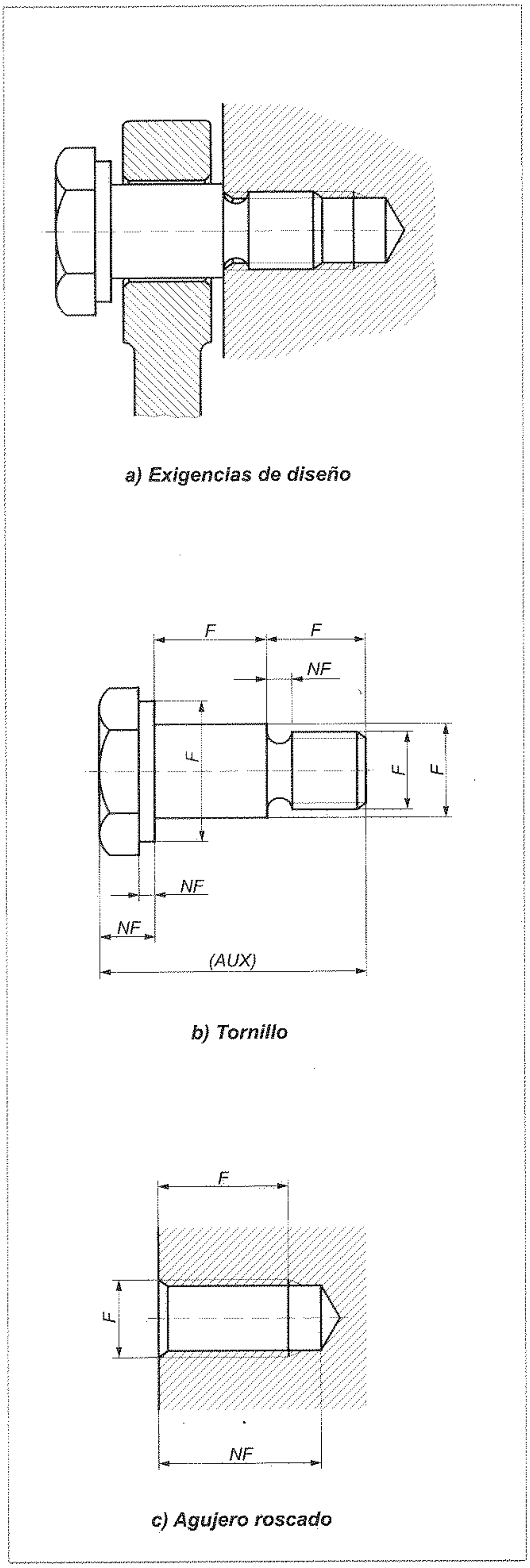
Objetivos y orientaciones metodológicas

En esta unidad temática se hará ver al alumno la importancia de la acotación en un plano industrial. Un primer objetivo se reduce a poner cada cota una sola vez y en la vista que dé mejor idea de la pieza; hay que hacer ver al alumno la necesidad de seguir unas normas muy sencillas para que la acotación sea correcta y simplificada al máximo. Aunque no se trata de un curso completo sobre acotación, el alumno debe saber los sistemas que se utilizan, la forma de simplificarlos, los símbolos que se agregan a las cifras de cota, etc. Con la simple inspección de las figuras que se proponen a título de ejemplo, el alumno puede deducir la explicación pertinente.

Las actividades se centrarán en proponer las vistas de piezas sencillas en las que el alumno incorpore las cotas necesarias para la definición completa de la pieza.

El desarrollo teórico puede hacerse en dos clases y las actividades extenderse al mayor número de clases que disponga el profesor.

Los contenidos de este tema se adaptan a la última actualización de la Norma UNE 1-039-94.



a) Exigencias de diseño

b) Tornillo

c) Agujero roscado

Fig. 1. Cotas funcionales, no funcionales y auxiliares.

1. Acotación

Después de dibujar las vistas necesarias que definen una pieza de forma clara y completa, viene la operación de toma de medidas y colocación en el croquis o dibujo correspondiente. El estudio y práctica de esta operación es largo, y por ello, en este curso se dan las primeras normas sobre acotación, y se deja para estudios superiores la ampliación de este tema.

"Acotar una pieza" es poner en el dibujo las dimensiones que se van tomando con los instrumentos de medida adecuados.

La norma de acotación define los términos siguientes:

Cota: Es el valor numérico expresado en unidades de medida apropiadas y representada gráficamente en los dibujos técnicos con líneas, símbolos y notas.

Cota funcional (F): Es la cota esencial para la función de la pieza o hueco (Fig. 1).

Cota no funcional (NF): Es una cota no esencial para la función de la pieza o hueco (Fig. 1).

Cota auxiliar (AUX): Es la cota que se da a nivel informativo. No desempeña ningún papel decisivo en la fabricación o el control y se deduce de otros valores dados en el dibujo. Se indica entre paréntesis y en ningún caso es objeto de tolerancia (Fig.1).

Elemento: Es la característica individual de una pieza, tal como superficie plana, superficie cilíndrica, dos superficies paralelas, una rosca, una ranura, una nervadura, un perfil, etc.

Producto acabado: Es la pieza preparada para el montaje o la puesta en servicio, o bien la configuración fabricada a partir de un dibujo. Un producto acabado puede ser igualmente una pieza que precisa tratamientos posteriores (p. ej., las piezas fundidas o de forja) o una configuración que necesita ser trabajada.

2. Aplicación de las cotas

Se indicarán directamente sobre el dibujo todas las informaciones dimensionales necesarias para definir clara y completamente una pieza o un elemento, salvo que esta información esté dada en documentos afines.

Cada elemento se acotará sólo una vez en un dibujo.

Las cotas se colocarán sobre las vistas, cortes o secciones que representen más claramente los elementos correspondientes.

Todas las cotas de un dibujo se expresarán en la misma unidad (por ejemplo, en milímetros) aunque sin indicar su símbolo. Para evitar confusiones, el símbolo de la unidad predominante puede ser especificado en una nota.

Si es necesario indicar otras unidades (por ejemplo, $N \cdot m$ para el momento o $K \cdot Pa$ para la presión) el símbolo de la unidad figurará junto a la cifra de cota.

No se indicarán más cotas de las necesarias para definir una pieza o un producto acabado. Ningún elemento de una pieza o un producto acabado debe ser definido por más de una cota en cada dibujo.

Se pueden admitir excepciones a esta regla en las siguientes circunstancias:

a) Cuando sea necesario dar cotas adicionales que se refieran a estados intermedios de fabricación (por ejemplo, para las dimensiones de un elemento antes de un tratamiento y/o acabado).

b) Cuando la adición de una cota auxiliar represente ventajas.

Los métodos de fabricación o de control no deben ser especificados, a menos que sean imprescindibles para asegurar el buen funcionamiento o la intercambiabilidad.

3. Método de acotación

Los elementos de acotación son:

- la línea auxiliar de cota.
- la línea de cota.
- las líneas de referencia.
- los extremos de la línea de cota.
- la indicación de origen.
- la cifra de cota y símbolos.

Estos elementos se indican en las **Figs. 2 y 3**.

Las líneas auxiliares de cota, las líneas de cota y las líneas de referencia se dibujan en trazo continuo fino (UNE 1-032).

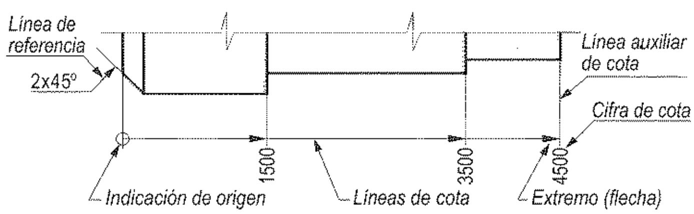


Fig. 2.

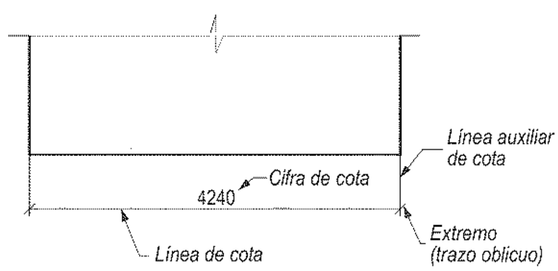


Fig. 3.

La separación entre las líneas de cota será lo suficiente para una lectura clara de la indicación escrita que se haga. La norma no indica una medida concreta, la práctica nos enseña que esta separación depende del tamaño del dibujo y del espacio disponible (Fig. 4).

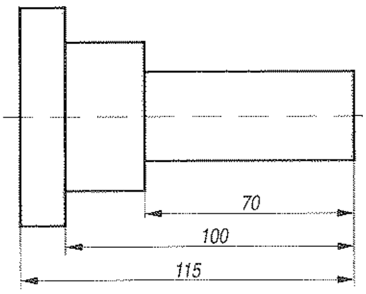


Fig. 4.

- **Las líneas auxiliares de cota** deberán prolongarse ligeramente más allá de las líneas de cota (Figs. 2, 3 y 4).

  Las líneas auxiliares de cota se trazarán perpendicularmente a los elementos a acotar; en caso necesario pueden trazarse oblicuamente, pero paralelas entre si (Fig. 5).

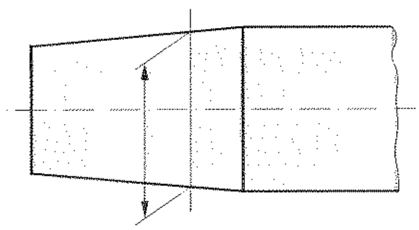


Fig. 5.

Las líneas auxiliares de cota pasarán por la intersección de las líneas de construcción y se prolongarán ligeramente todas ellas más de su punto de intersección (Fig. 6).

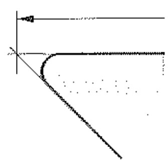


Fig. 6.

Las líneas auxiliares de cota y las líneas de cota no deben, por regla general, cortar otras líneas del dibujo a menos que sea inevitable (Fig. 7).

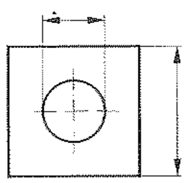


Fig. 7.

- **Las líneas de cota** deberán trazarse sin interrupción, es decir, seguidas, incluso si el elemento acotado está representado mediante una vista interrumpida (Fig. 8). Más adelante se estudia un segundo método de acotación en el que las líneas de cota sí se interrumpen (Figs. 20 a 25).

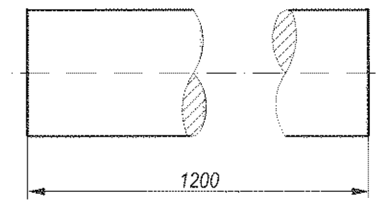


Fig. 8.

Las líneas de cota nunca se cortarán entre sí. También deben evitarse las intersecciones de líneas auxiliares de cota con las líneas de cota. En caso de imposibilidad, ninguna línea debe interrumpirse (Fig. 9).

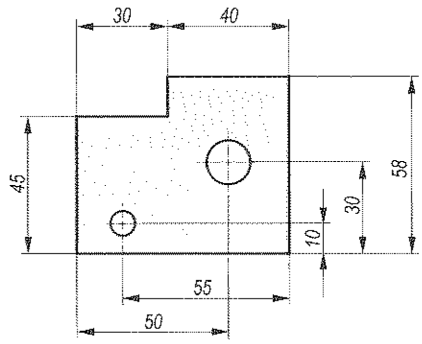


Fig. 9.

No debe utilizarse como línea de cota una **línea de simetría o de contorno**, pero pueden emplearse como líneas auxiliares de cota (Fig. 9).

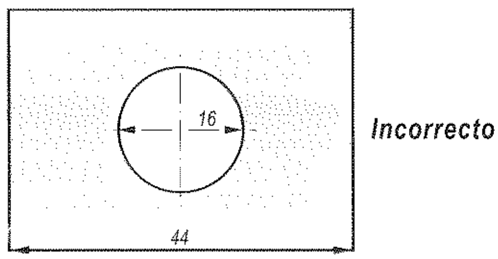


Fig. 10.

Por lo indicado en el párrafo anterior la Fig. 10 está mal acotada.

- **Las líneas de referencia** son las que acotan líneas auxiliares de forma excepcional (Fig. 2).

- **Extremos e indicación de origen de las líneas de cota**. Las líneas de cota deben tener terminaciones precisas, es decir, flechas o trazos oblicuos, o en su caso, una indicación de origen.

Las líneas de cota pueden tener dos tipos de extremos y una indicación de origen.

La flecha se representa con dos trazos cortos que pueden formar ángulo comprendido entre 15° y 90°. La flecha puede ser abierta, cerrada, o cerrada y llena (Fig. 11).

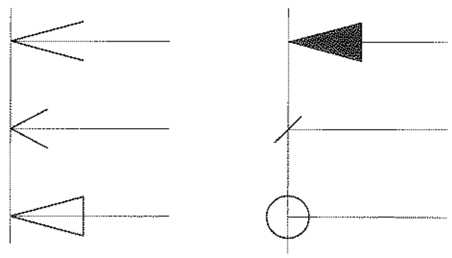


Fig. 11.

La indicación de origen se representa por un pequeño círculo de aproximadamente 3 mm de diámetro (Fig. 11).

El tamaño de los extremos será proporcional al tamaño del dibujo. Se debe emplear un único tipo y tamaño de extremo en un mismo dibujo.

Cuando el espacio es demasiado pequeño la flecha puede ser sustituida por un trazo oblicuo o un punto (Fig. 12).

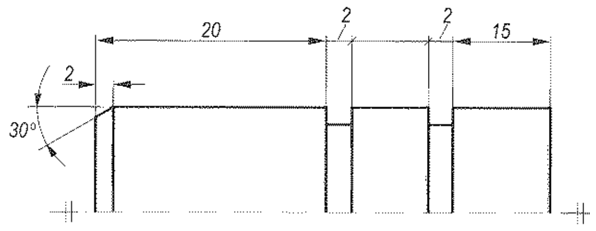


Fig. 12.

Las flechas deben estar colocadas dentro de los límites de la línea de cota (Fig. 13).

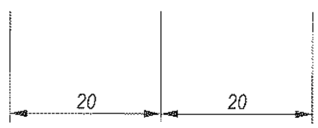


Fig. 13.

Cuando no haya espacio suficiente, la flecha puede colocarse en el exterior de los límites de la línea de cota, la cual debe prolongarse más allá de la flecha para poner la cifra de cota (Fig. 14).

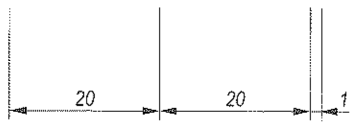


Fig. 14.

Acotación de radios

Para acotar el radio de una circunferencia se traza una línea de cota con una sola flecha en contacto con la circunferencia. La flecha puede encontrarse en el interior o en el exterior de la circunferencia según el tamaño de la misma (Fig. 15).

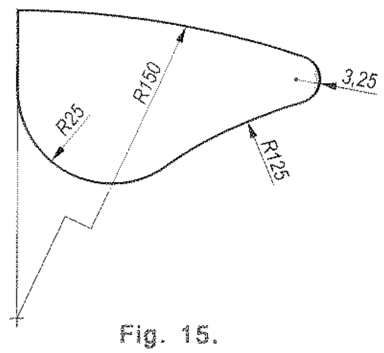


Fig. 15.

Inscripción de las cifras de cota

Las cifras de cota se dibujarán de un tamaño suficiente para que puedan ser legibles en el plano y en reproducciones de microfilm.

Deben situarse de forma que no las cruce ninguna línea del dibujo.

La inscripción de las cifras debe hacerse de acuerdo con uno de los métodos siguientes. Sólo deberá emplearse un método en un mismo dibujo.

Método 1

Las cifras de cota se colocan paralelamente a sus líneas de cota y preferentemente en el centro, por encima y ligeramente separadas de la línea de cota (Fig. 16).

Una excepción a esta regla puede hacerse para la acotación de cotas superpuestas, como veremos más adelante.

Las cifras deben inscribirse para ser leídas desde abajo o desde la derecha del dibujo (Fig. 16).

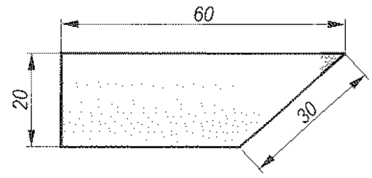


Fig. 16.

Las cifras inscritas sobre líneas de cota oblicuas deben orientarse como indica la Fig. 17.

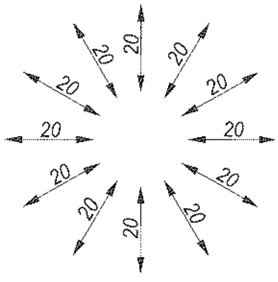


Fig. 17.

Las cifras de cotas angulares pueden orientarse como indican las Figs. 18 y 19.

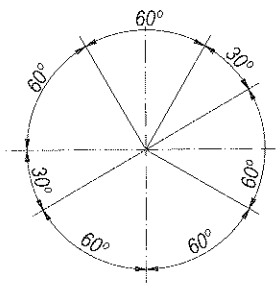


Fig. 18.

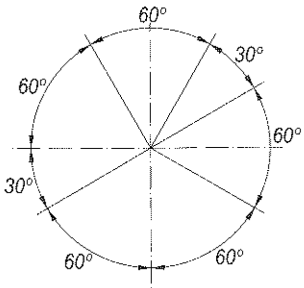


Fig. 19.

Método 2

Las cifras de cota deben inscribirse para ser leídas desde abajo de la hoja del dibujo. Las líneas de cota no horizontales, se interrumpen preferentemente hacia el centro, para poner la cifra de cota (Figs. 20 y 21).

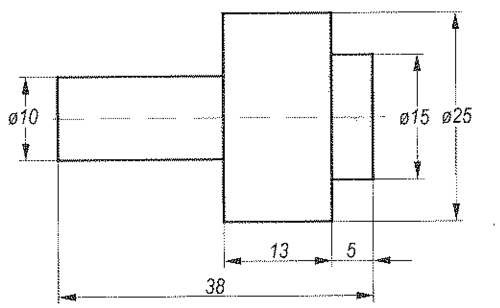


Fig. 20.

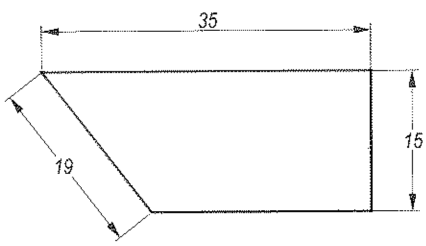


Fig. 21.

Las cifras de cota angulares pueden orientarse como en la Fig. 19 o como en la Fig. 22.

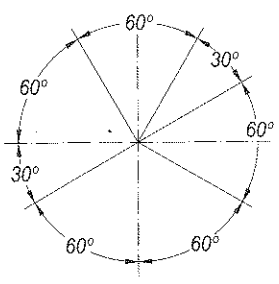


Fig. 22.

La inscripción de las cifras de cota, frecuentemente, necesita adaptarse a diferentes situaciones. Veamos algunos casos.

1. Las cifras de cota se pondrán más cerca de uno de los extremos para evitar tener que dibujar largas líneas de cota, pudiendo trazarlas entonces parcialmente (Fig. 23).

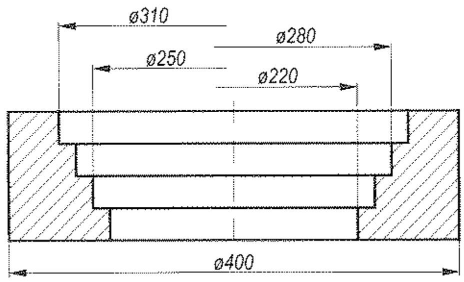


Fig. 23.

2. Si falta espacio la cifra de cota se coloca por encima de la prolongación de la línea de cota, exteriormente a uno de los extremos (Fig. 24).

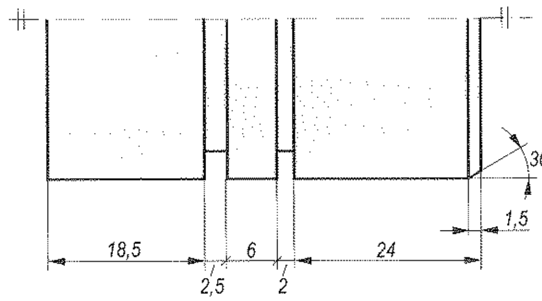


Fig. 24.

3. Se coloca sobre o en el extremo de una línea de referencia muy corta, que termina sobre una línea de cota (Fig. 24).
4. Se coloca por encima de la prolongación de la línea de cota cuando la falta de espacio no permite la inscripción en la interrupción de una línea de cota no horizontal (Fig. 25).

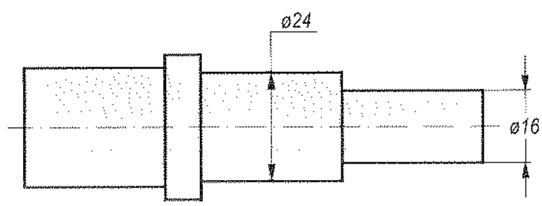


Fig. 25.

En las cotas que no están a escala, se subraya la cifra con un trazo continuo grueso (Fig. 26).

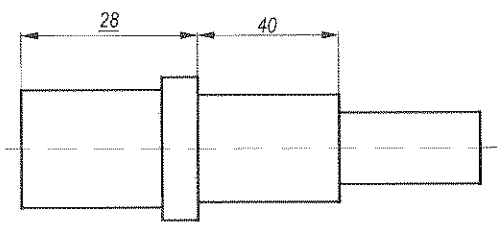


Fig. 26.

Los siguientes símbolos o indicaciones se usan con cotas que permiten la identificación de formas y que mejoran la interpretación del dibujo.

Los símbolos de diámetro y cuadrado se pueden omitir si la forma está claramente indicada.

El símbolo debe preceder a la cifra de cota (Figs. 27 a 31).

Ø: Diámetro SR: Radio de esfera

R: Radio SØ: Diámetro de esfera

□: Cuadrado

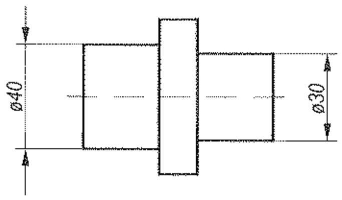


Fig. 27.

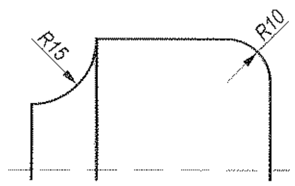


Fig. 28.

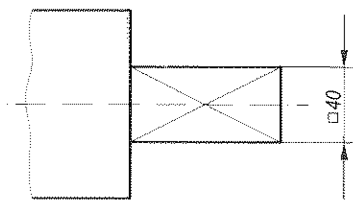


Fig. 29.

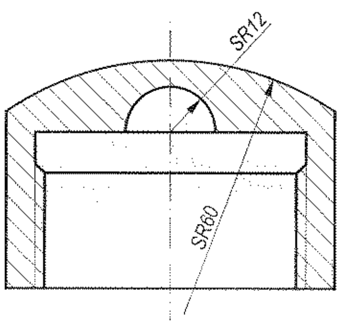


Fig. 30.

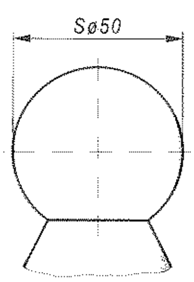


Fig. 31.

4. Disposición e inscripción de las cotas

La disposición de las cotas sobre un dibujo debe hacer resaltar claramente el objetivo del dibujo.

Generalmente, las cotas resultan de la combinación de diferentes exigencias del diseño.

4.1. Acotación en serie

Las cadenas de cotas (Fig. 32) no pueden emplearse más que cuando la eventual acumulación de tolerancias no afecta a la aptitud de empleo de la pieza.

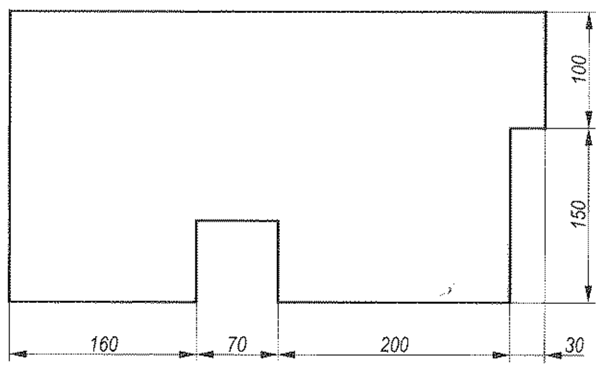


Fig. 32. Acotación en serie.

4.2. Acotación a partir de un elemento común

Este sistema de acotación es utilizado cuando varias cotas con la misma dirección se refieren a un origen común.

La acotación a partir de un elemento común puede hacerse en paralelo o con cotas superpuestas.

4.2.1. Acotación en paralelo: consiste en la disposición de un cierto número de líneas de cota paralelas entre sí, espaciadas suficientemente para inscribir las cotas sin dificultad (Fig. 33).

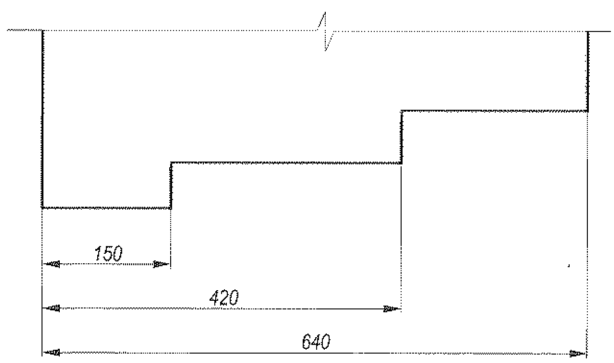


Fig. 33. Acotación en paralelo.

4.2.2. **Acotación mediante cotas superpuestas:** es una acotación en paralelo simplificada, que puede utilizarse cuando falte espacio y siempre que, en ningún caso afecte a la claridad (Figs. 34 y 35).

La indicación de origen debe situarse en el lugar conveniente y el extremo opuesto de cada línea de cota debe estar terminado únicamente por una flecha.

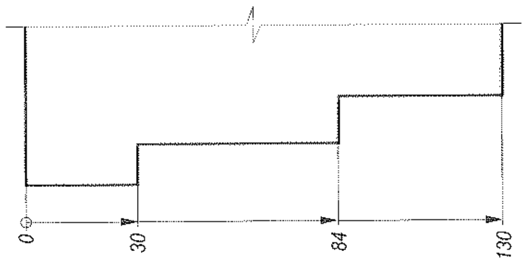


Fig. 34.

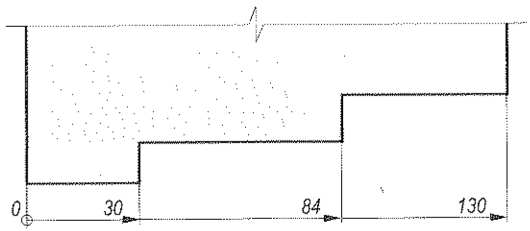


Fig. 35.

Las cifras de cota pueden inscribirse, bien:

- cerca de la flecha, alineadas con la línea auxiliar de cota correspondiente (Fig. 34).
- cerca de la flecha, por encima de la línea de cota, un poco separadas de ella (Fig. 35).

Puede resultar ventajoso utilizar acotación de cotas superpuestas en dos direcciones. En este caso, los orígenes pueden estar representados como indica la Fig. 36.

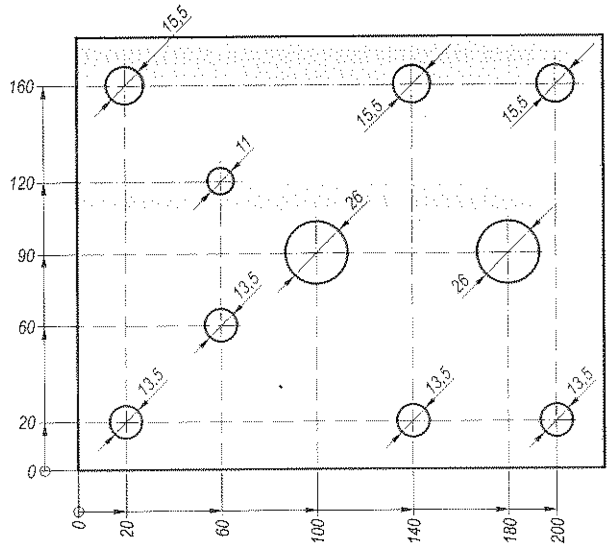
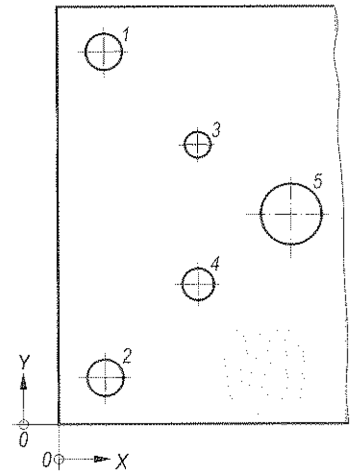


Fig. 36.

4.3. Acotación por coordenadas

Puede ser útil, en vez de utilizar el sistema de acotación indicado en la Fig. 36, reagrupar las cifras de cota en una tabla (Fig. 37).



	X	Y	ø
1	20	160	15,5
2	20	20	13,5
3	60	120	11
4	60	60	13,5
5	100	90	26
6			
7			
8			
9			
10			

Fig. 37.

Las coordenadas de intersección en una rejilla (planos de situación) se indican de la forma representada en la Fig. 38.

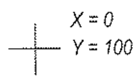


Fig. 38.

Las coordenadas de puntos de referencia arbitrarios, sin rejilla, deben colocarse al lado de cada punto (Fig. 39) o en forma de tabla (Fig. 40).

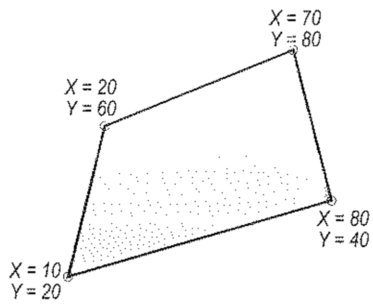
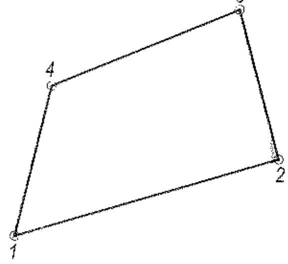


Fig. 39.



	X	Y
1	10	20
2	80	40
3	70	80
4	20	60

Fig. 40.

4.4. Acotación combinada

Las cotas únicas, las cotas en serie y las cotas a partir de un elemento común pueden ser combinadas en un dibujo, si es necesario (Figs. 41 y 42).

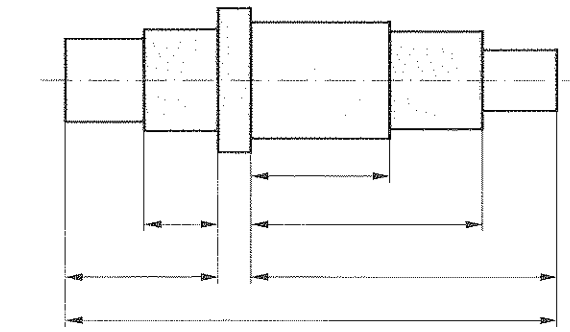


Fig. 41.

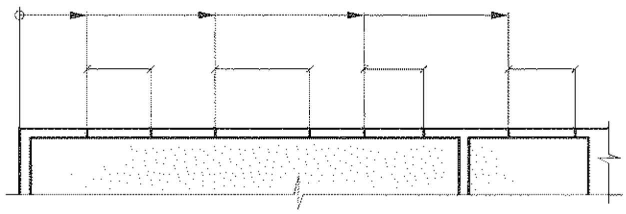


Fig. 42.

5. Indicaciones especiales

5.1. Cuerdas, arcos, ángulos y radios

Las cuerdas, los arcos y los ángulos deben ser acotados como se indica en la Fig. 43.

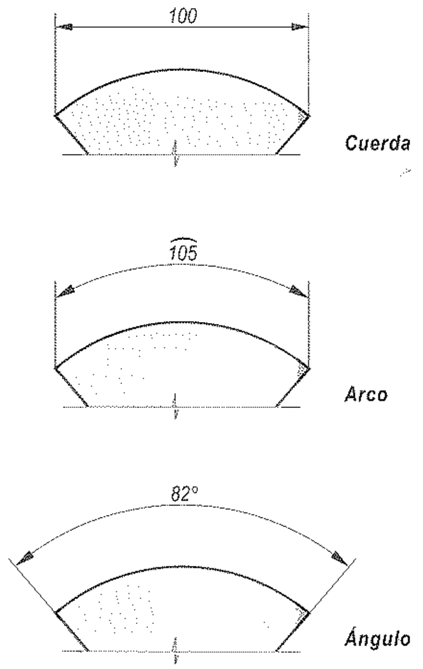


Fig. 43.

Cuando el centro de un arco se encuentra fuera de los límites del dibujo, la línea de cota del radio debe ser quebrada o interrumpida, según que sea o no necesario situar el centro (Fig. 15).

Cuando la cota de un radio se deduzca de otras cotas, ésta deberá ser indicada por una flecha de radio y el símbolo R sin cifra de cota (Fig. 44).

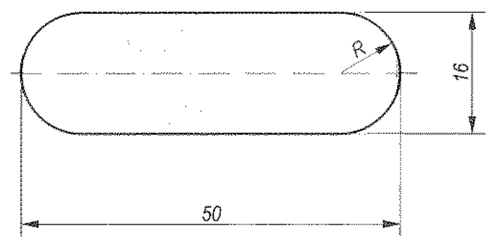


Fig. 44.

5.2. Elementos equidistantes

En los dibujos en los que aparecen elementos equidistantes dispuestos regularmente, se pueden utilizar los métodos de acotación simplificados siguientes:

5.2.1. Los elementos dispuestos linealmente a intervalos pueden ser acotados según la Fig. 45. En caso de posible confusión entre la longitud de un intervalo y el número de intervalos, la acotación debe hacerse según indica la Fig. 46.

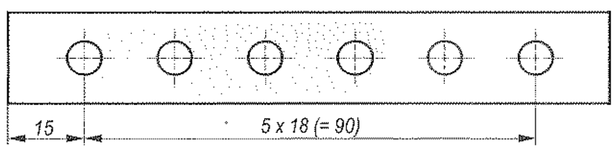


Fig. 45.

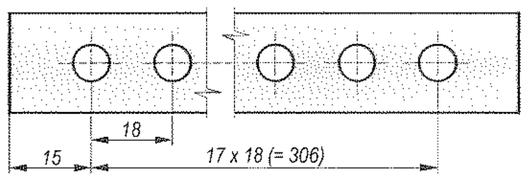


Fig. 46.

5.2.2. Los elementos dispuestos angularmente a intervalos se pueden acotar según la Fig. 47.

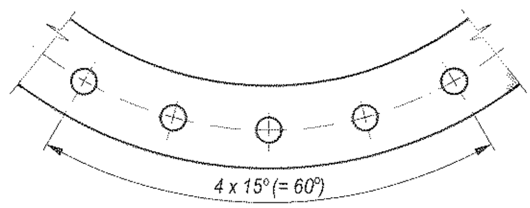


Fig. 47.

Las cotas angulares de los intervalos pueden omitirse si éstas no presentan ningún riesgo de ambigüedad (Fig. 48).

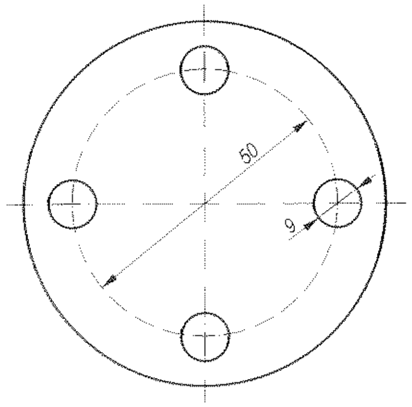


Fig. 48.

Los intervalos circulares pueden acotarse indirectamente con indicación del número de elementos (Fig. 49).

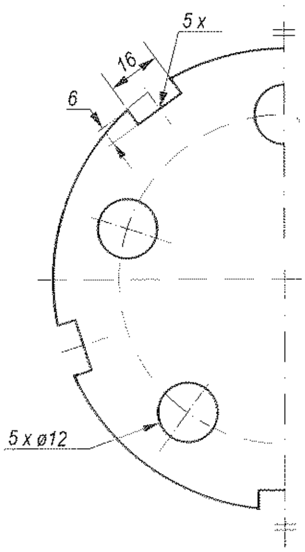


Fig. 49.

5.3. Elementos repetitivos

Cuando sea posible definir varios elementos del mismo tamaño para evitar repetir la misma cota, se pueden seguir las indicaciones de las Figs. 50 y 51.

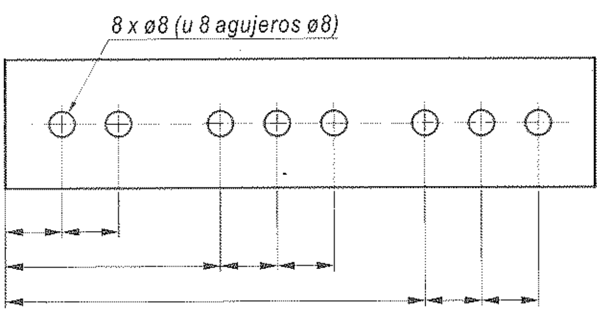


Fig. 50.

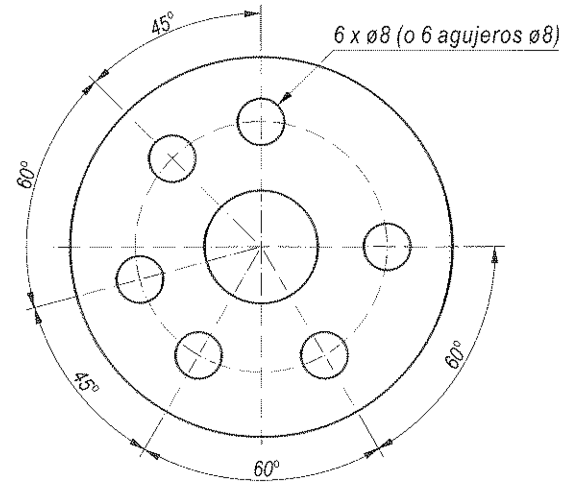


Fig. 51.

5.4. Chaflanes y avellanados

Los chaflanes deben acotarse según indica la Fig. 52. Cuando el ángulo es de 45°, la acotación puede simplificarse tal como indican las Figs. 53 y 54.

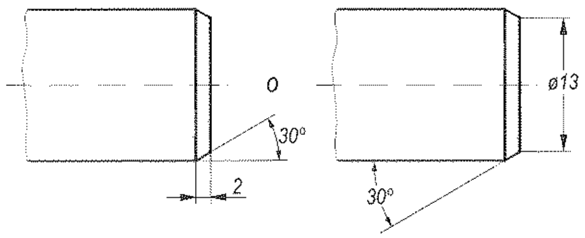


Fig. 52. Chaflanes acotados.

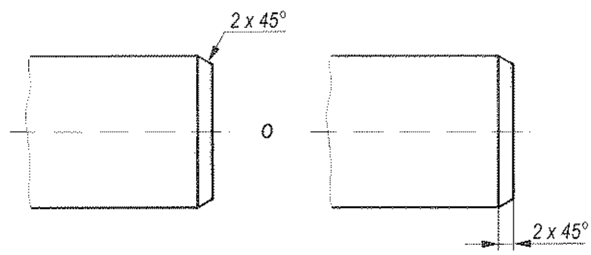


Fig. 53. Acotación simplificada de chaflanes.

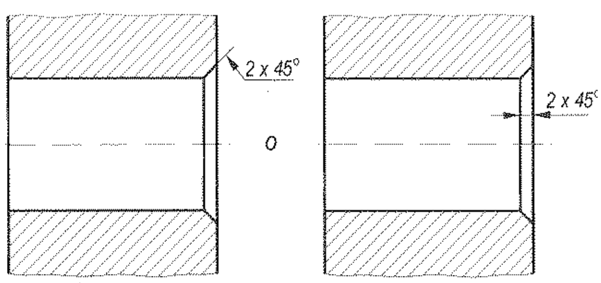


Fig. 54. Chaflanes interiores.

Los avellanados deben acotarse de alguna de las dos formas que indica la Fig. 55.

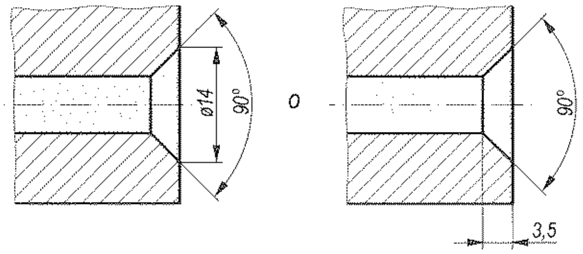


Fig. 55. Avellanados.

5.5. Otras indicaciones

Para evitar repetir la misma cota o trazar largas líneas de referencia, pueden utilizarse letras de referencia asociadas a una tabla explicativa o a una nota (Fig. 56).

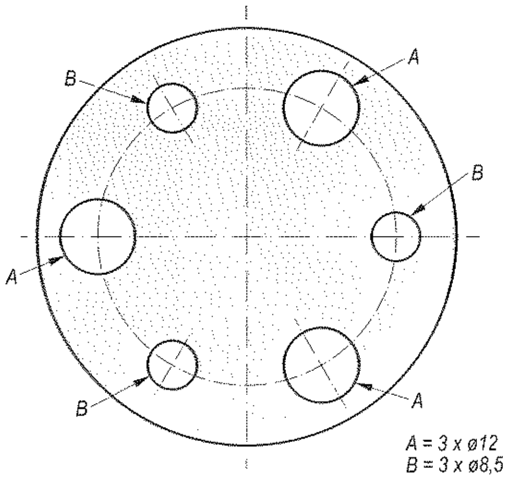


Fig. 56.

En vistas o cortes de piezas simétricas dibujadas parcialmente, las líneas de cota se deben prolongar ligeramente más allá del eje de simetría. La segunda flecha se suprime (Fig. 57).

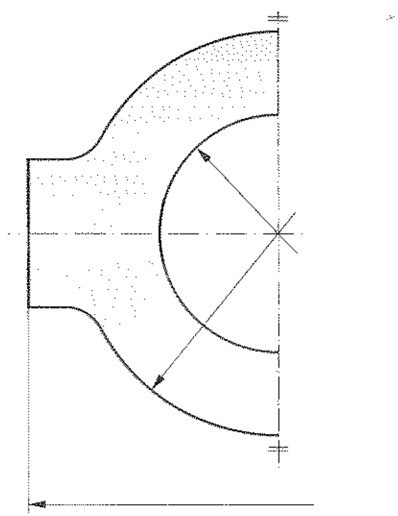


Fig. 57.

En dibujos y acotación de conjuntos, los grupos de cotas relativos a cada pieza deben ser colocados tan separados como sea posible (Fig. 58).

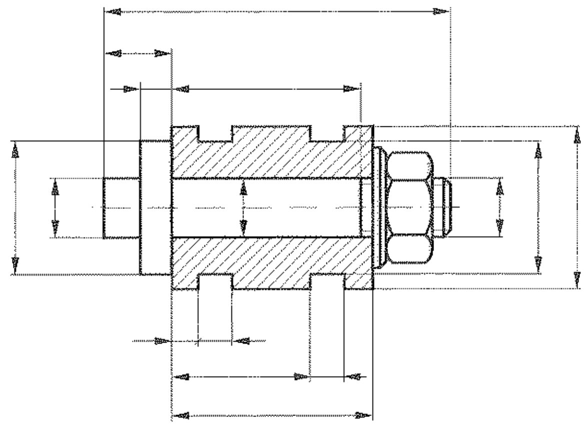


Fig. 58. Acotación de un conjunto.

A veces es necesario indicar que cierta área o longitud de una superficie a acotar es objeto de una especificación o tratamiento especial. En este caso, el área o longitud, así como su posición, se indican con una línea gruesa de trazo largo y punto, trazada exterior y paralelamente a la superficie en cuestión y próxima a ella.

Si se trata de un elemento de revolución, la indicación aparecerá únicamente en uno de los lados (Fig. 59).

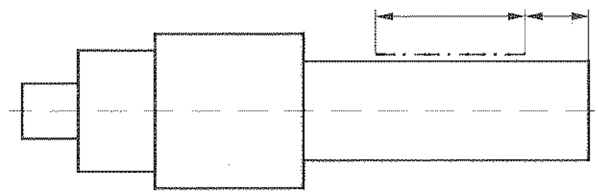


Fig. 59.

Si la posición y las dimensiones de la superficie objeto de la especificación necesitan ser precisadas, la acotación es necesaria. Si por el contrario resaltan claramente del dibujo, no es necesario acotarlas (Fig. 60).

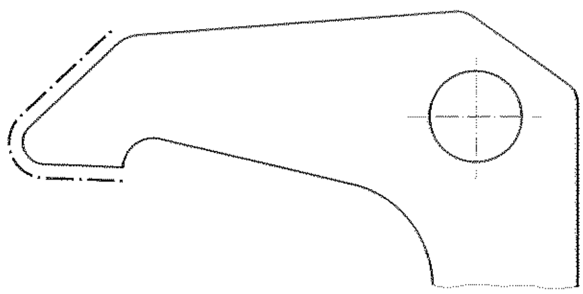


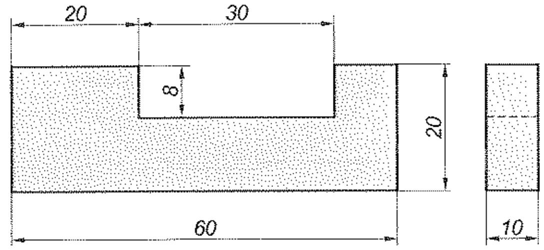
Fig. 60.

ACTIVIDADES

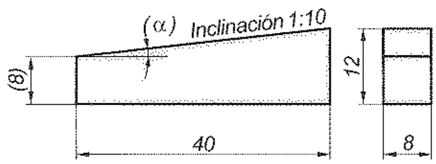
Ejercicios resueltos de acotación

Estudiar detenidamente cada uno de los seis casos resueltos en esta página: la disposición de las cotas, el método empleado, la separación entre líneas de cota, de éstas respecto del elemento acotado y demás consideraciones expuestas en el tema.

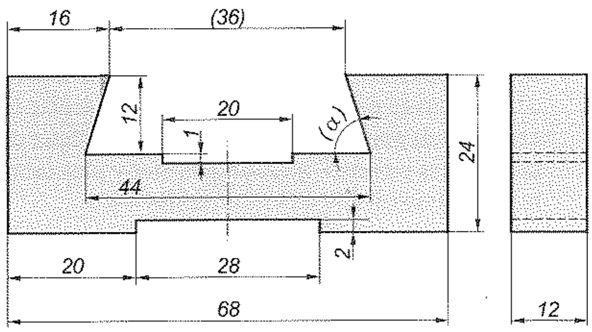
1



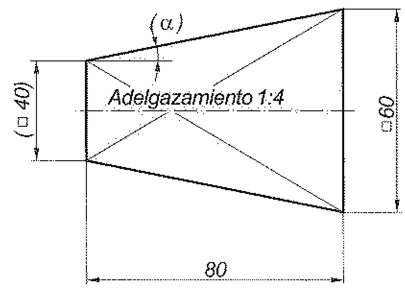
2



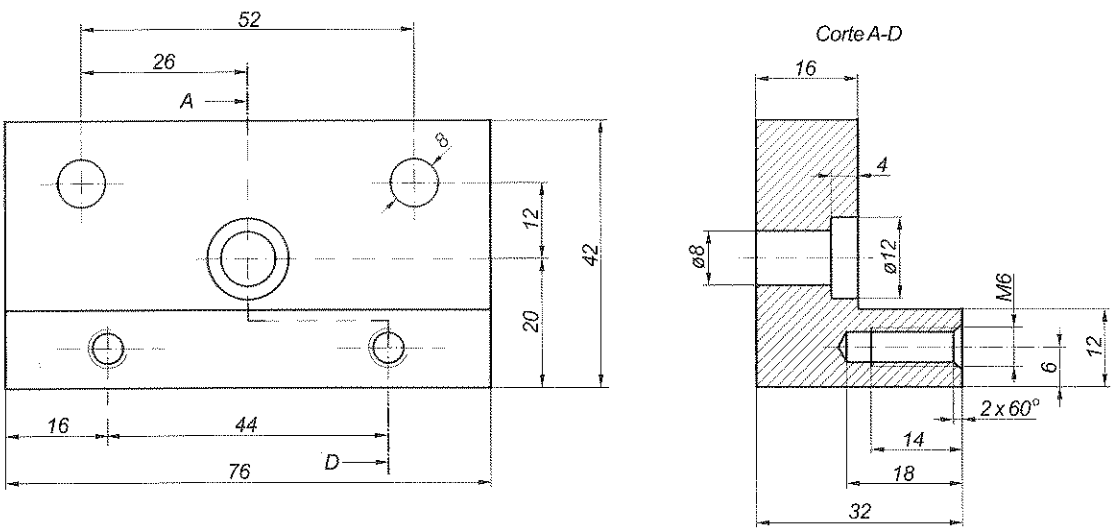
3



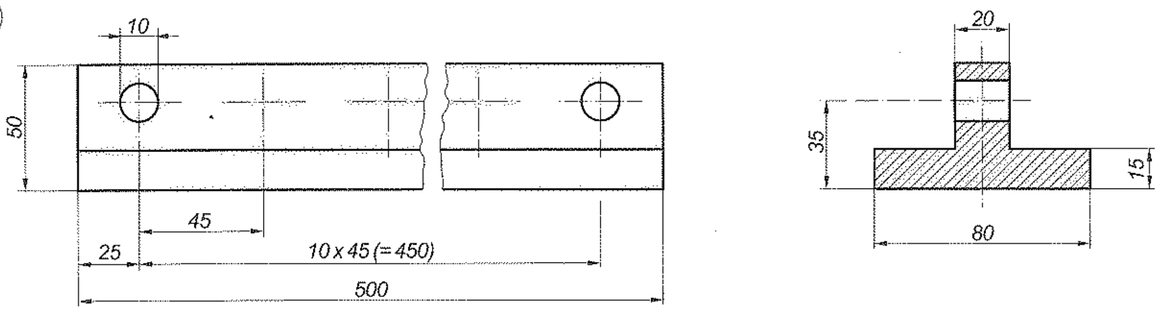
4



5

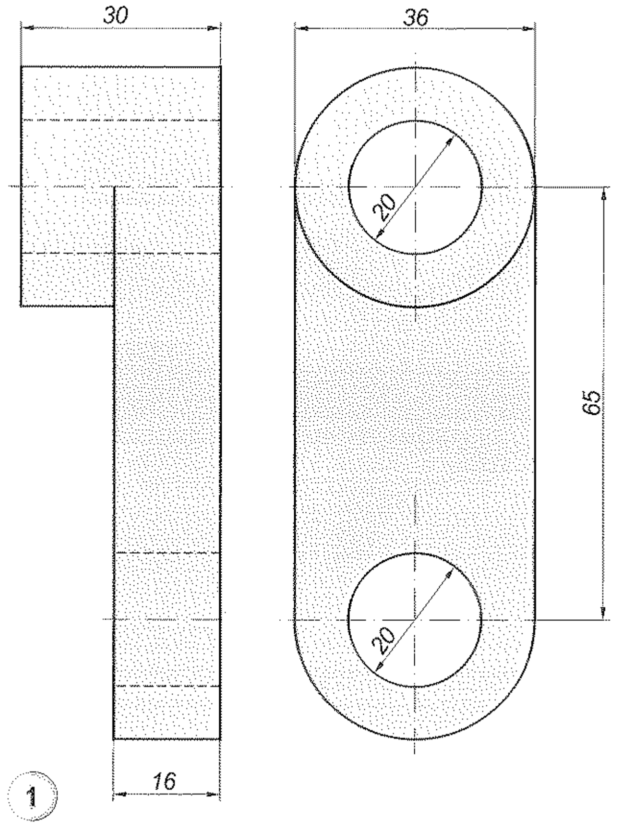


6

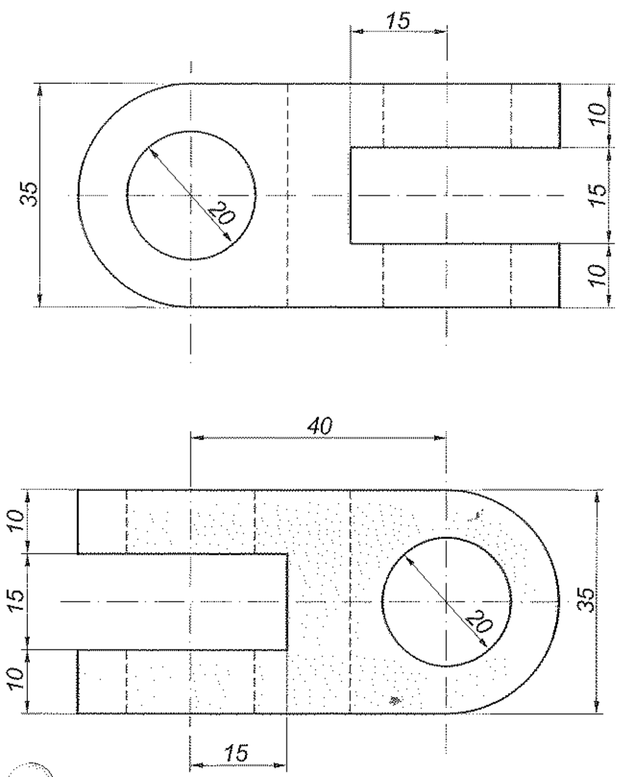


Cuatro ejercicios de acotación resueltos sobre piezas sencillas representadas por vistas.

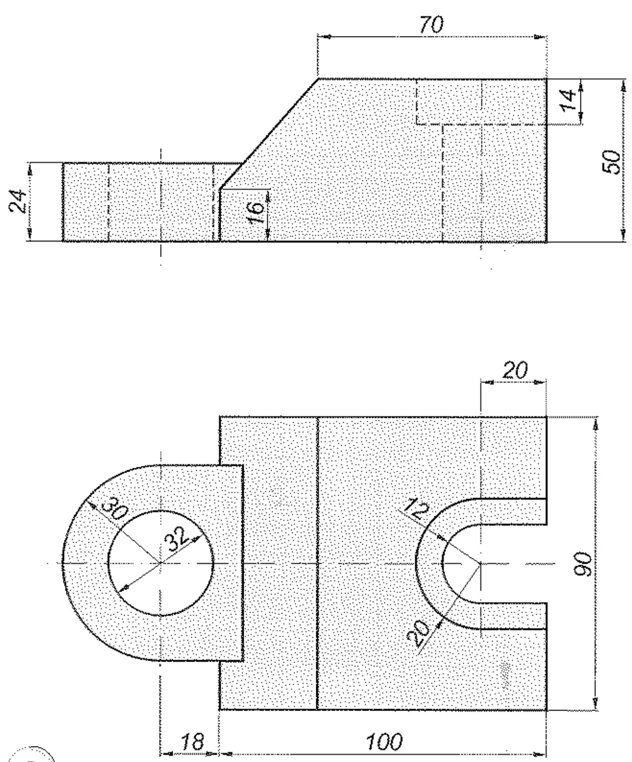
Estudiar detenidamente cada uno de los casos.



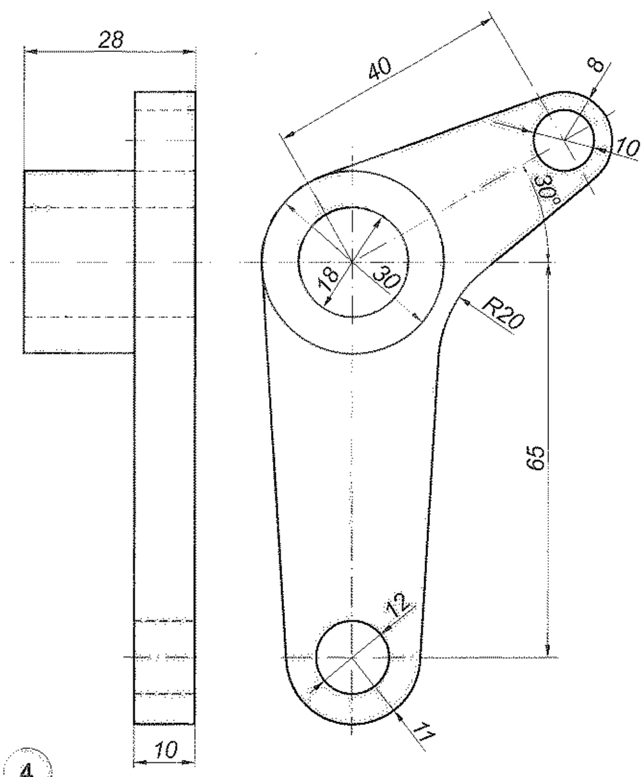
1



2



3



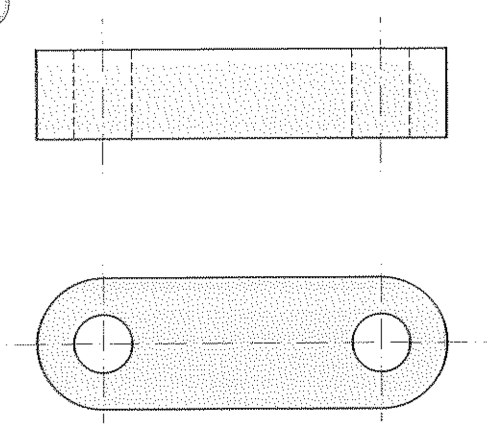
4

Ejercicio de acotación de las piezas propuestas

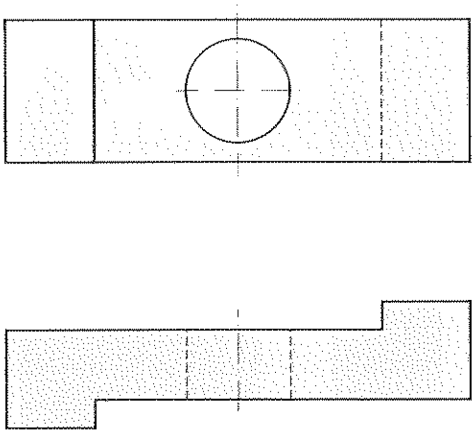
Reproducir cada una de las piezas para su posterior acotación, teniendo en cuenta una mayor separación entre las vistas y entre éstas y los límites del formato para la ubicación de las cotas.

Estudiar con atención el tema y las prácticas resueltas.

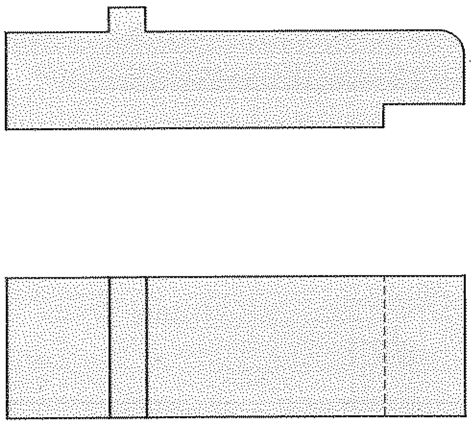
1



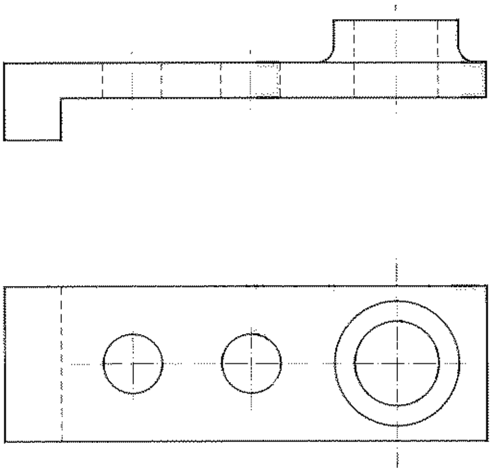
2



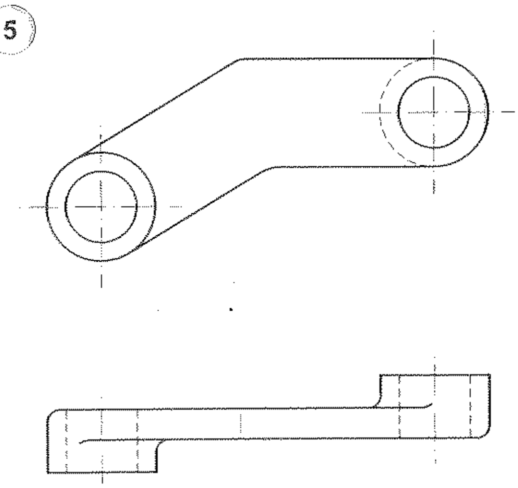
3



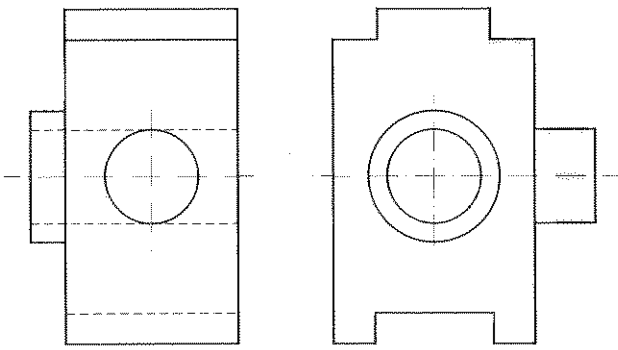
4



5



6

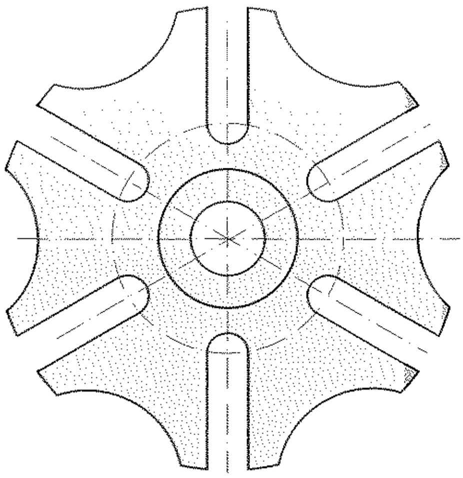


Ejercicio de acotación de las piezas propuestas

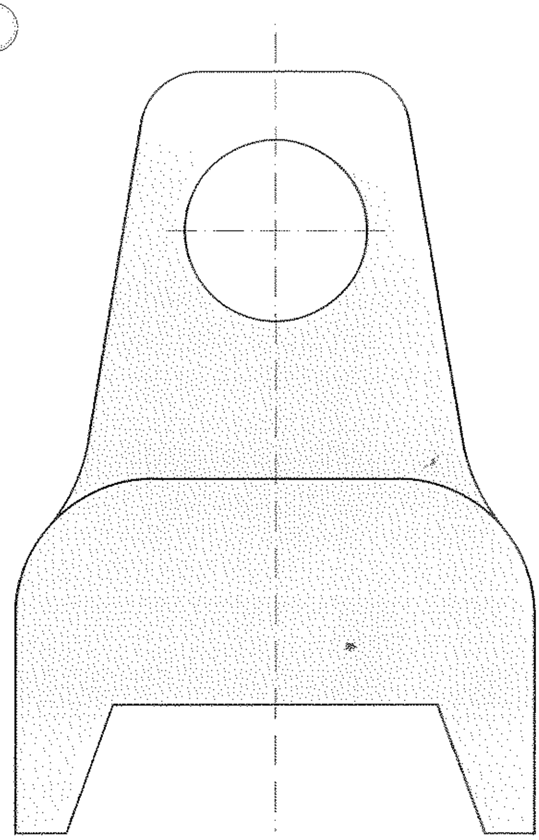
Acotar las piezas propuestas.

Una manera simple de comprobar si faltan cotas es intentar reproducir las vistas con las cotas dibujadas. Esta composición se hace a mano alzada, dibujando solamente aquellos elementos que estén acotados. Si somos capaces, de esta manera, de repetir íntegramente la pieza, la acotación inicialmente estará completa. Con la práctica esta comprobación se resuelve mentalmente.

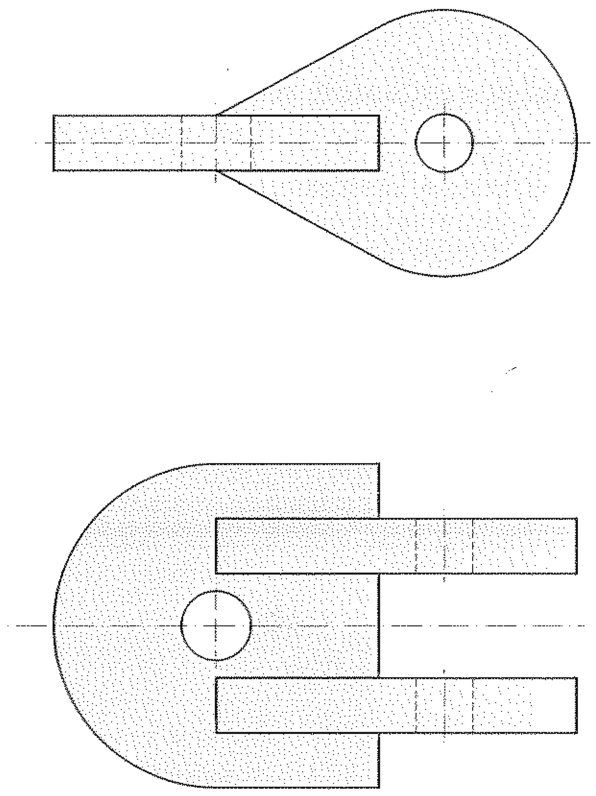
1



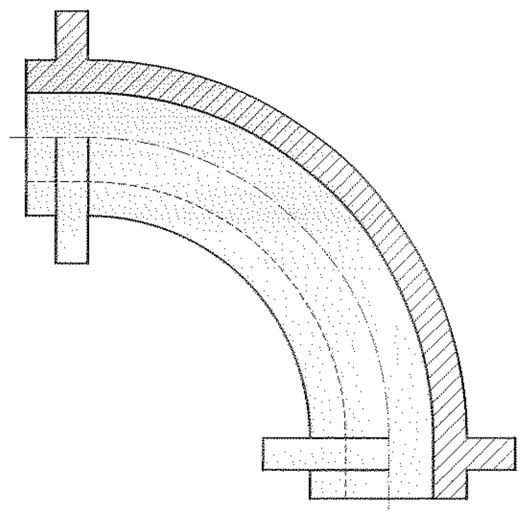
2



3



4



ARTE Y DIBUJO TÉCNICO
Diseño

TEMA 19

Objetivos y orientaciones metodológicas

El objetivo de esta unidad temática es relacionar el dibujo técnico con procesos, bien sean de creación artística o de diseño.

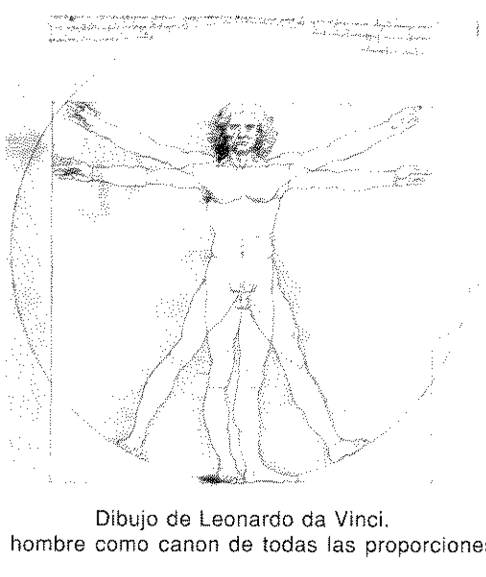
El conocimiento y correcta aplicación del dibujo técnico permite una mejor definición del producto diseñado en beneficio de su posterior fabricación.

Como prácticas a realizar por el alumno recomendamos se inicie en el diseño de objetos sencillos siguiendo estas pautas:

En primer lugar, elegir un objeto como un vaso, una copa, un frasco, jarrón..., bocetarlo con cuidado, a mano alzada y con las proporciones adecuadas. Posteriormente redibujar sobre el boceto, con ayuda de plantillas, compás, etc., para definir cada uno de los elementos dibujados, (arcos, rectas) y delimitar cada uno de ellos con sus correspondientes puntos de tangencia. Finalmente, acotarlo para reproducir con medidas y a escala el objeto diseñado. El dibujo que resulte debe ser una réplica fiel del boceto inicial.

1. Arte y geometría. Relación a lo largo de la historia

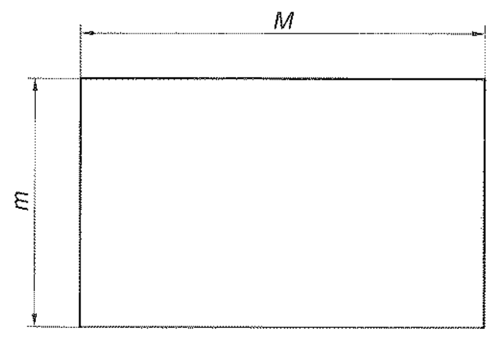
Desde la antigüedad, el hombre ha buscado para sus construcciones arquitectónicas un canon que ofreciera proporciones armónicas. Inicialmente estas proporciones se encontraron en el cuerpo humano, en sus proporciones antropométricas. Aún son frecuentes expresiones como pies, brazas, pulgadas, etc.



Dibujo de Leonardo da Vinci.
"El hombre como canon de todas las proporciones".

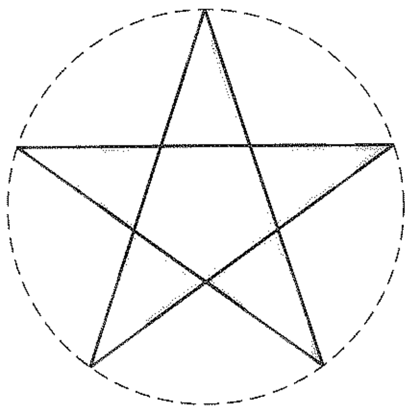
Una proporción muy utilizada en las construcciones antiguas (en edificios clásicos), en el Renacimiento italiano y en épocas más modernas es la que ofrece la división del segmento en media y extrema razón, llamada **sección áurea**. El rectángulo con los lados en esta relación armónica, se considera como el de proporciones más bellas.

Su utilización suscitó gran interés entre artistas y científicos por sus propiedades estéticas y matemáticas, hasta el punto de denominarlo "**divina proporción**".



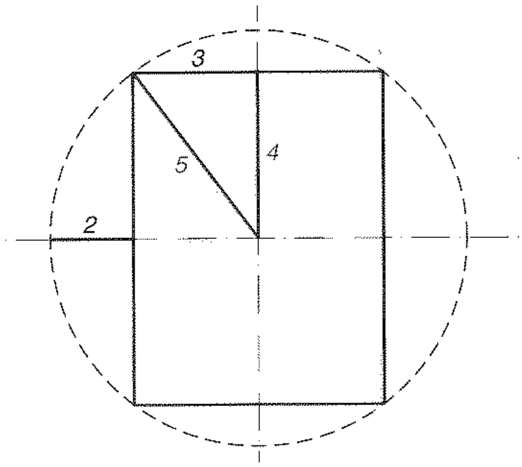
Rectángulo con lados en proporción armónica.

Existen otras proporciones entre segmentos cuyo origen está en figuras geométricas determinadas. Por ejemplo, el pentágono estrellado.



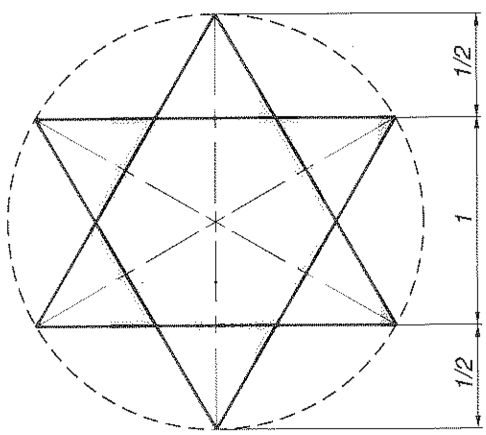
Pentágono estrellado.

El triángulo de Pitágoras, el rectángulo derivado del mismo y el círculo circunscrito forman una serie de relaciones muy próximas a las armónicas.



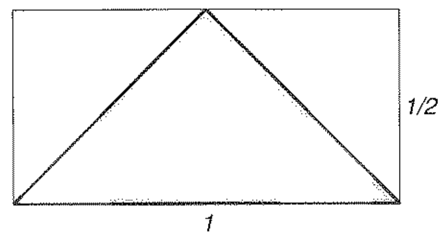
Triángulo de Pitágoras con rectángulo y círculo.

El triángulo equilátero y el hexágono regular fueron escogidos como norma para las construcciones góticas.

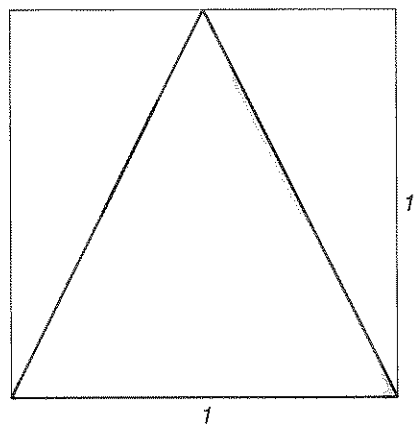


Triángulo equilátero y hexágono regular.

El triángulo rectángulo isósceles en relación 1:2 entre la altura y la base es el triángulo de la cuadratura y con frecuencia se usa para determinaciones acertadas.

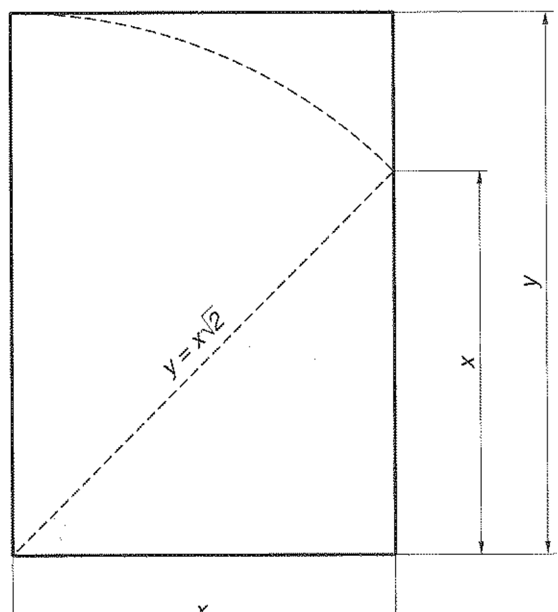


El triángulo isósceles con base y altura iguales fue utilizado para determinar las proporciones de la catedral de Colonia.



Se ha comprobado la influencia del octógono regular en una serie de edificios antiguos.

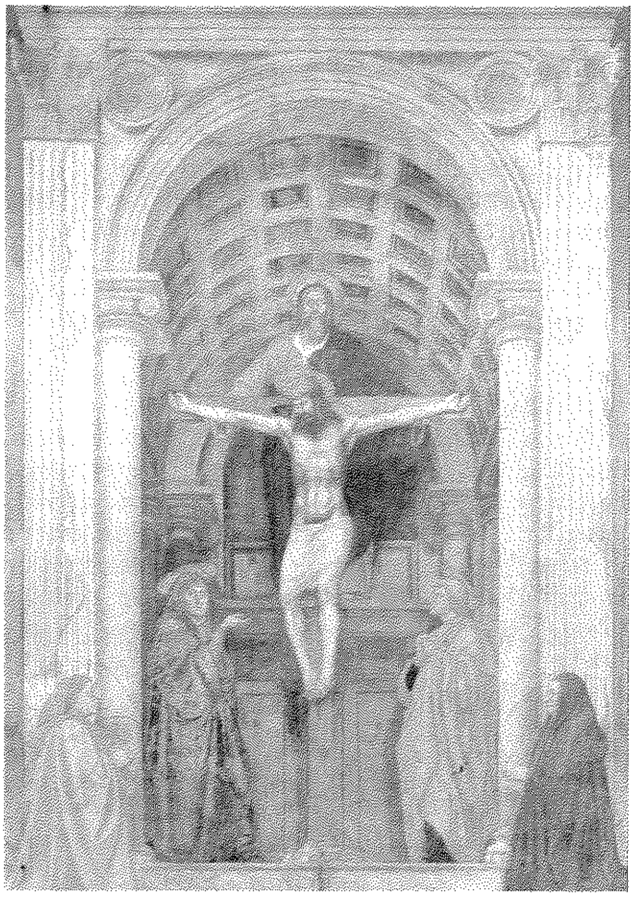
En el triángulo rectángulo isósceles, la relación entre el cateto y la hipotenusa $1:\sqrt{2}$ sirvió para establecer los formatos normales del papel.



Si a lo largo de la historia el hombre ha perseguido relaciones y proporciones con las que realizar construcciones bellas, no menos importante ha sido el estudio de los recursos para su representación, es decir, el dibujo científico o técnico.

El dibujo es el soporte bidimensional con el que se realizan representaciones que nos ofrecen sensaciones de tercera dimensión.

En el siglo XV el pintor Masaccio, el escultor Donatello y los arquitectos Brunelleschi y Ghiberti, junto con Leon Battista Alberti, el gran teórico del arte, desarrollan la perspectiva cónica.



Pintura de Masaccio. "La Trinidad" (1426). Fresco (667 x 317).

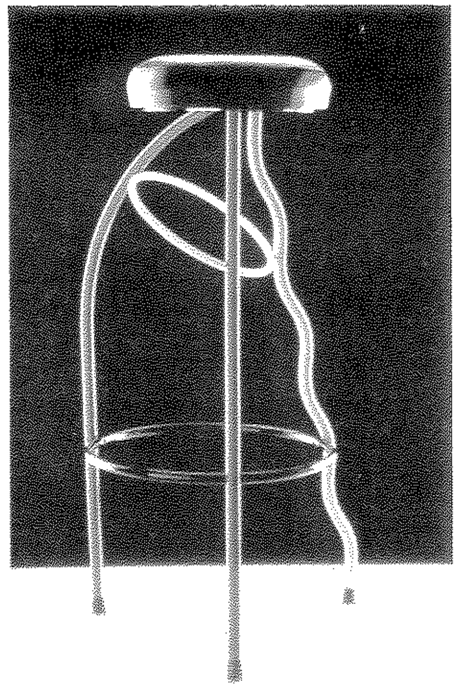
"La Escuela de San Roque" (1730).

Óleo en tela de Canaletto, pintor veneciano nacido en el siglo XVII. Fue conocido como el pintor de perspectivas.

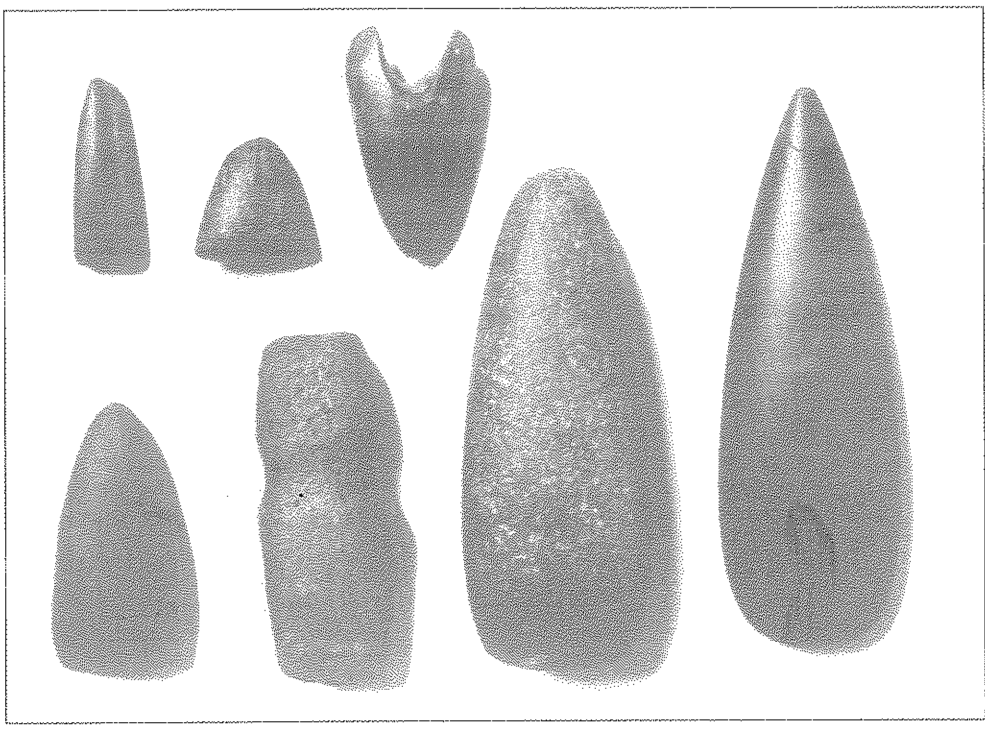
2. Diseño Industrial

Con el comienzo del desarrollo industrial, empezaron a formarse los primeros diseñadores cuya meta era configurar productos para una fabricación en serie. Este concepto de la fabricación en serie se basaba en dos cuestiones fundamentales: economía y funcionalidad, sin tener en cuenta otros aspectos culturales y estéticos que el producto debía cumplir.

Actualmente este tercer concepto ha servido para redefinir la palabra diseño y ser el elemento que tenga en cuenta, además de economía y funcionalidad, las responsabilidades sociales y culturales. El diseño, en un aspecto global, mejora nuestro entorno, nuestra calidad de vida, pues nos rodea de objetos de uso cotidiano con un elevado valor estético. Pero no se debe trivializar con este concepto simplificando y entendiendo que un producto bello es en sí mismo un buen diseño; el diseño es ante todo comunicación entre el objeto y el usuario, debe cumplir con la máxima racionalista de que "la forma sigue a la función".

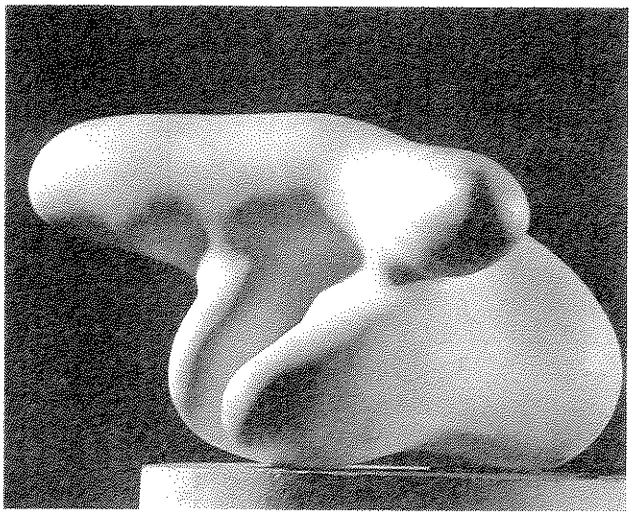


Taburete "Dúplex". Diseño: Xavier Mariscal.



Hachas de piedra. Período Neolítico. La función determina el diseño, viejo principio de la historia de la humanidad.

3. Diferencia entre Arte y Diseño Industrial



"Unión concreta", Arp.

El diseño industrial es un proceso técnico, proyectual, en donde el dibujo interviene como medio de lenguaje para que los objetos proyectados se fabriquen sin ambigüedad, en grandes series, evitando formas subjetivas. Por otro lado, es una disciplina que persigue coordinar variables para optimizar el producto.

El arte es personal, subjetivo y unitario, es decir, produce objetos únicos o series muy cortas por medios artesanales.

En la figura "Unión concreta" de Arp, éste creó un tipo de arte abstracto basado en formas orgánicas.

4. Recursos estéticos del Dibujo Técnico

Las primeras soluciones de diseño de un objeto se trazan a mano alzada directamente sobre el papel; la mayoría de las ideas originales sobre formas, proporciones, etc., encuentran su primera expresión de esta manera.

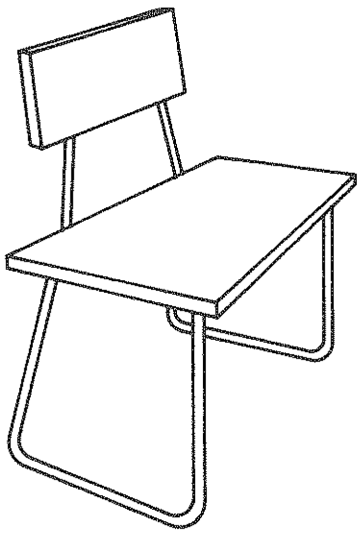
La persona que tiene habilidad artística para hacer bocetos rápidos, precisos y claros sobre ideas posee un medio de expresión muy valioso e imprescindible en las etapas iniciales del diseño.

Depósito contenedor.

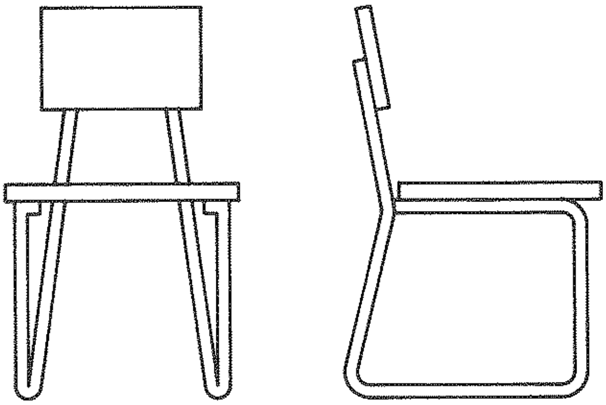
Posteriormente estos dibujos se definen geométricamente, se estudian las líneas, se acotan y se trazan con los correspondientes instrumentos a la escala adecuada.

Otra variante del trazado a mano alzada se da cuando ha de copiarse del natural un objeto que después ha de ser fabricado o simplemente dibujado a escala sin más datos que los proporcionados por dicho croquis.

Después de la etapa del croquizado, se realizan los planos, utilizando los conocimientos que proporciona el dibujo técnico.



En esta etapa, la percepción formal del objeto es más precisa y detallada. Deben quedar totalmente definidos los elementos que configuran las características estéticas del producto industrial. Estos elementos son: **forma, material, superficie y color**.



Forma: es el elemento principal de la figura. Un objeto bien diseñado bajo el punto de vista formal debe estar realizado con coherencia, equilibrio y en proporciones armónicas; se puede representar en forma espacial (perspectiva) o en forma plana a través de sus vistas. La forma espacial es la considerada tridimensional y es la más parecida a la percibida por el ojo humano. La forma plana requiere, por parte de quien recibe el plano, unos conocimientos para visualizar espacialmente el objeto.

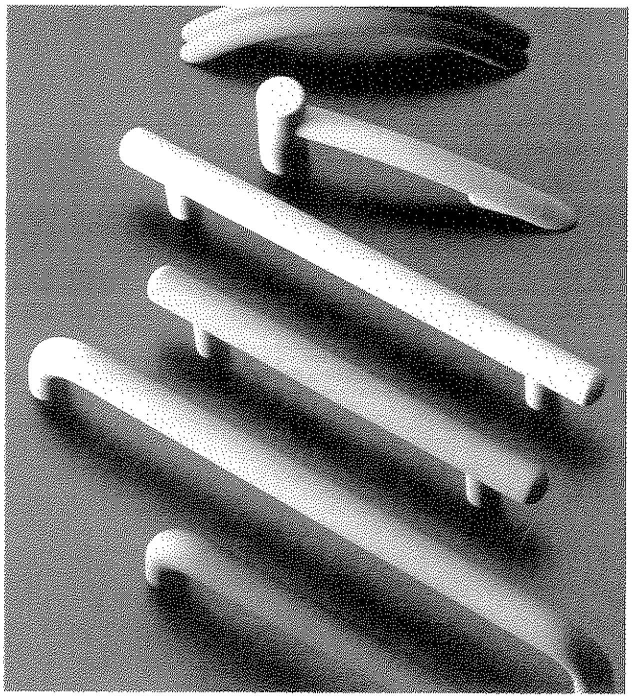
Material: en un proyecto industrial influye, en grado elevado, el empleo del material y de su proceso de fabricación. El dibujo técnico dispone de recursos para definir con exactitud el material que se debe emplear y su elaboración. El material es un factor determinante del producto y su elección no se realiza sólo por determinados efectos estéticos, sino también por motivos comerciales y funcionales.

Silla apilable de resina plástica fabricada en molde de inyección.

Superficie: la naturaleza de la superficie en los productos tiene una gran influencia sobre sus resultados visuales o táctiles.

Las superficies de los materiales, sus acabados, texturas y combinaciones, producen en el usuario importantes asociaciones de ideas, como limpieza, calor, frío, etc. Mediante las características de una superficie (brillante, mate, pulida, rugosa) y sus formas redondas o planas, se alcanzan efectos concretos.

Un determinado acabado superficial, sin fallos, en una superficie, puede sugerir propiedades o calidades que excedan de las propias características de uso del producto. (El automóvil es un buen ejemplo.)



Tiradores para muebles.
Acabado en textura "piel de melocotón".

Color: el color no es un problema que puede resolverse con códigos preestablecidos al igual que con otros factores que integran la composición.

Sin embargo, para llegar a cierto dominio es preciso conocer las teorías de las armonías cromáticas.

El color posee gran importancia comunicadora. El diseñador tiene en su mano un extraordinario poder de expresión y la influencia subjetiva que puede hacer en las personas es notable.

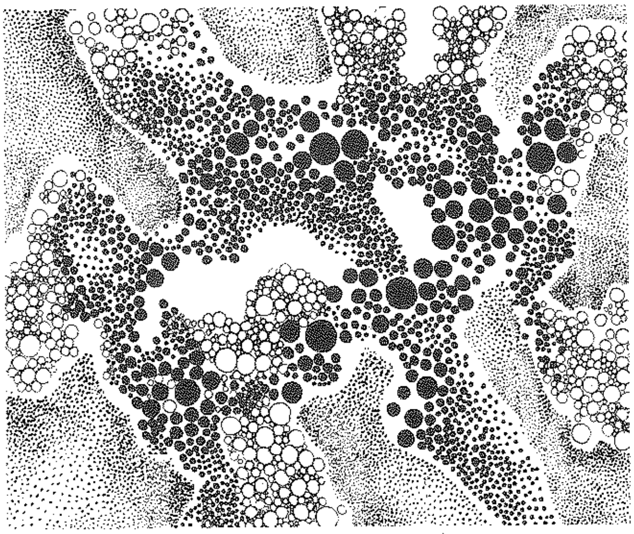
En los productos industriales, el color ejerce gran poder de atracción e influye en el volumen de ventas.

A continuación se expone una tabla de nueve colores con sus significados sicológicos.

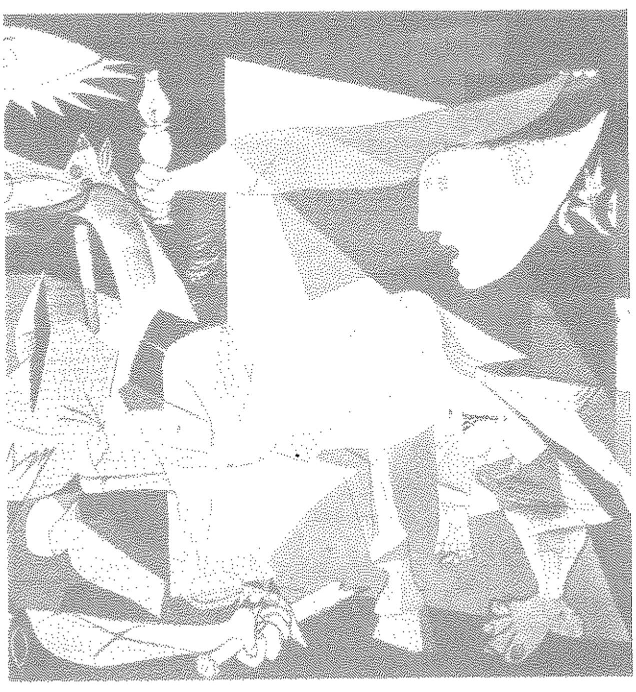
AMARILLO:	Vida, luz, acción, poder.
NARANJA:	Pasión, juventud, ardor, entusiasmo.
ROJO:	Calor, fuego, alegría, revolución.
VIOLETA:	Religiosidad, experiencia, dolor.
AZUL:	Sabiduría, seguridad, verdad.
VERDE:	Frescura, amor, esperanza, primavera.
BLANCO:	Pureza, inocencia.
GRIS:	Color neutro.
NEGRO:	Luto, pena, negación, muerte.

5. Elementos estructurales del dibujo

Para conseguir los fines representativos del dibujo tenemos que utilizar "el punto" como elemento origen.



El punto es el elemento básico estructural con el que se pueden conseguir formas. Estas formas estarán compuestas por líneas, como sucesión lineal de puntos, o por manchas cuando se refiere a cubrir una determinada superficie con color.

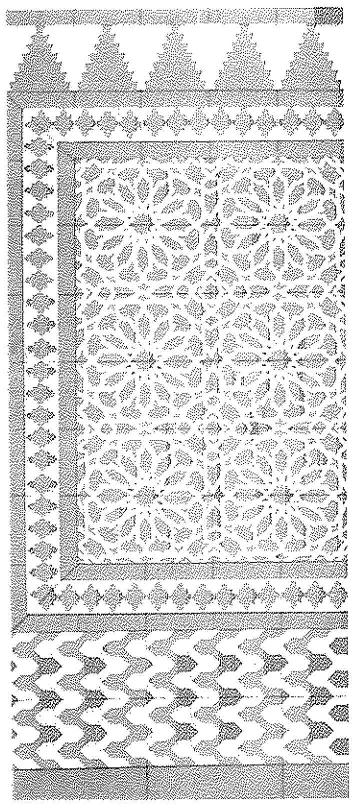


La ordenación de estos elementos compositivos, cromáticos o monocromáticos forman la comunicación visual actual, desde la pintura y el dibujo técnico hasta los folletos publicitarios, las ilustraciones, etc.

Logotipo de Telefónica.
Ejemplo de combinación de puntos y líneas.

Utilizando este método se pueden apreciar las formas que se deseen; primero se ejecuta el trazo lineal completo y bien definido, después se procede a rellenar con color las superficies elegidas, hasta conseguir formas cerradas concretas; el empleo de elementos iguales contribuye a crear composiciones estructurales.

Un ejemplo de ello y de las aplicaciones estéticas conseguidas a través del dibujo técnico lo ilustra el diseño de los azulejos de la figura.



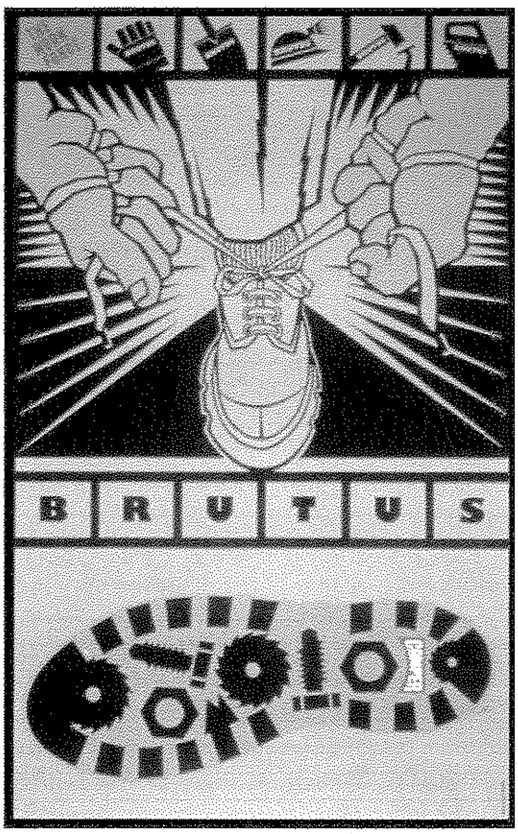
6. Diseño gráfico, urbanístico y de interiores

En principio se pueden considerar tres grandes grupos dentro del diseño.

Diseño gráfico.

En el amplio campo de interrelaciones de nuestra sociedad, el medio de comunicación más eficaz lo tenemos a través de las diferentes fases que nos ofrece la publicidad; está destinado a comunicar alguna idea o mensaje por medio de carteles, folletos, envases, logotipos, etc. El diseñador gráfico debe poseer buenos conocimientos de fotografía, rotulación, confección, ilustración, reproducción y manejo de programas informáticos apropiados.

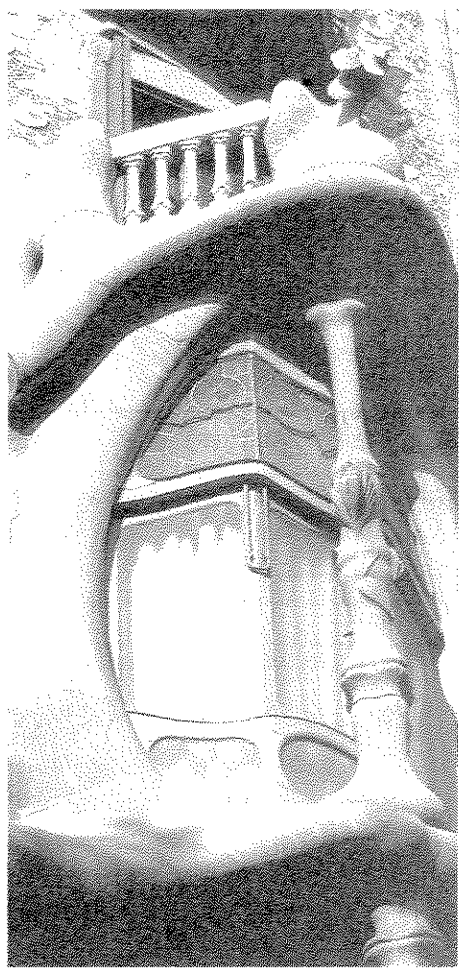
Cajero automático de una entidad bancaria.



Representación gráfica de una línea de calzado.

Diseño urbanístico.

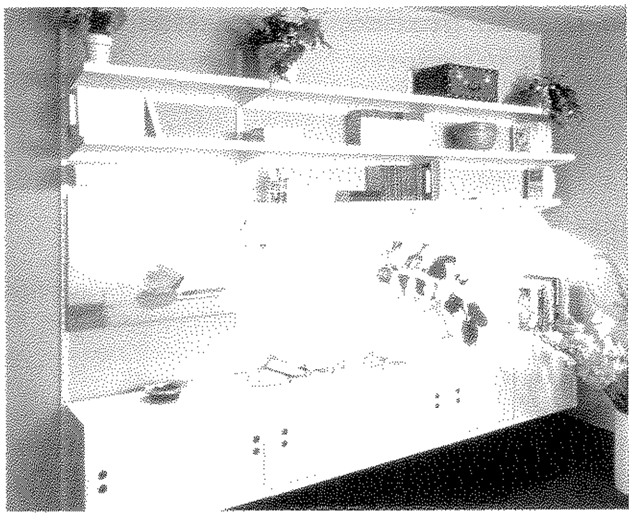
Se ocupa de proporcionar a las personas un entorno más adecuado a su bienestar físico. Depende de los planes de conjunto donde se tiene en cuenta la ubicación de edificios, calles, jardines y servicios en general.



Casa Batlló, de Gaudí (Barcelona). Estilo modernista. El edificio refleja el paisaje de Cataluña.

Diseño de interiores.

En esta especialidad, el diseñador se ocupa de la ordenación de espacios internos, viviendas, oficinas, edificios, locales comerciales, etc.


Estanterías metálicas autoportantes.

El diseñador proyecta estos espacios procurando una distribución funcional, práctica y estética de acuerdo con el fin previsto; por lo general, el diseñador de interiores utiliza mobiliario de catálogo, aunque en ocasiones es él quien proyecta muebles o instalaciones especiales.

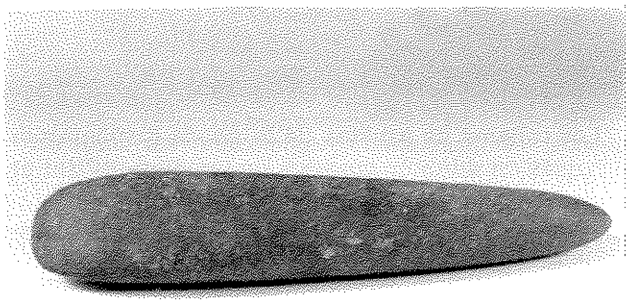
Es muy importante la elección de los puntos de luz y el color. Los colores se deben elegir de acuerdo con el material empleado, evitando imitaciones. Conviene mantener neutra la base y que los contrastes de color los expresemos mediante complementos, muebles, tejidos u objetos de adorno.


Sistema integral de ordenación y electrificación del espacio.


Mobiliario de oficina.

7. Presencia del Dibujo Técnico a lo largo de la historia

En los orígenes humanos, definimos como hombre al que es capaz de diseñar, de producir y de realizar útiles e instrumentos. En la fabricación de estos útiles interviene el dibujo como elemento trazador. Después vendrían la cerámica, los metales y el complejo mundo de la madera, cestería, etc.; todo un conjunto de materias primas importantes para fabricar toda clase de tecnología apoyada en diseños de calidad formal.



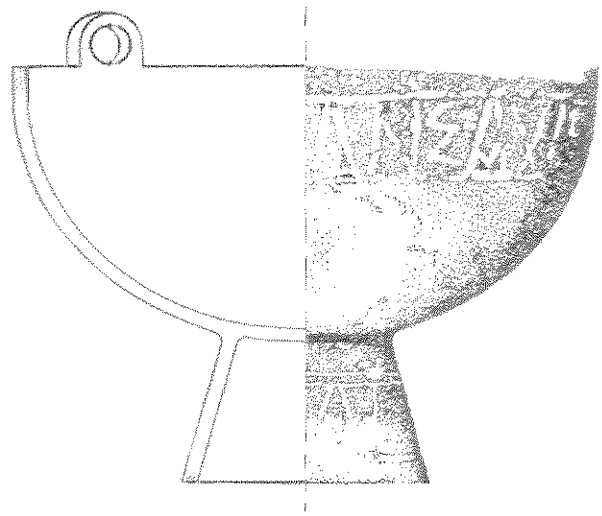
Hacha de piedra pulimentada.

Vaso de cerámica ibérica.

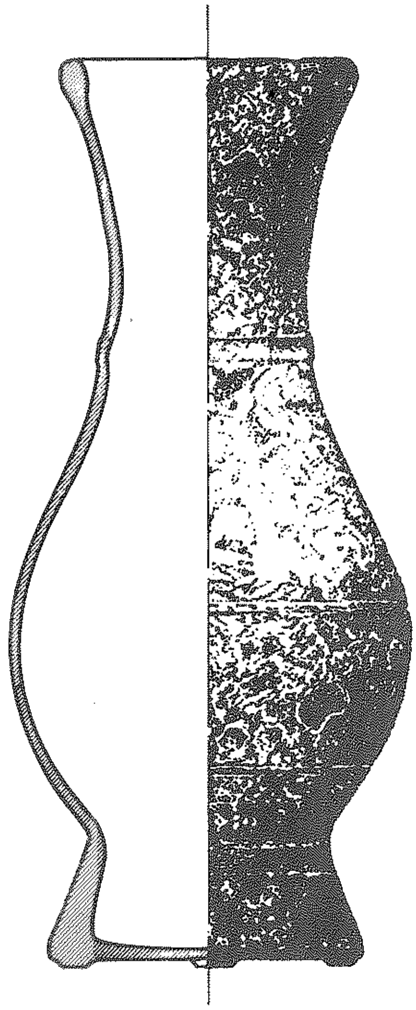
Objetos de la Hispania romana y visigoda.

Destacan por la belleza y la geometría de sus formas.

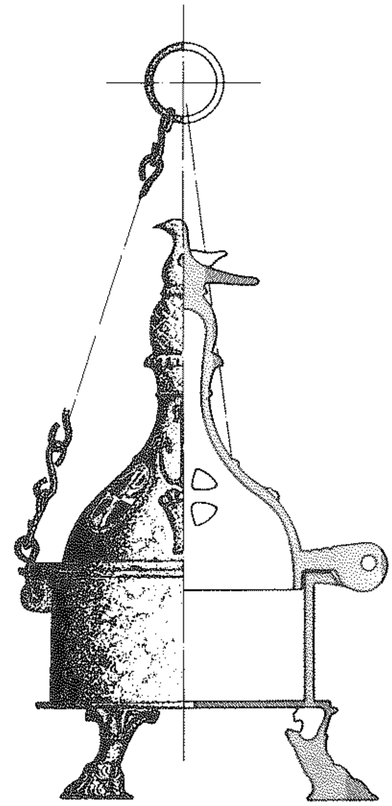
Obsérvese en estas figuras la simetría y separación entre la representación figurativa y la técnica.



Incensario bizantino de taller siciliano.



Vaso.

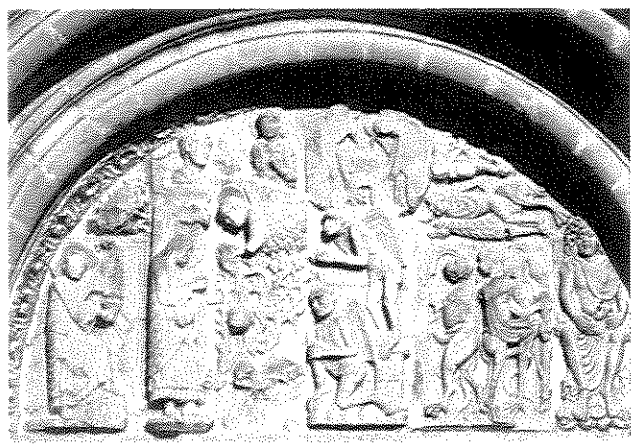


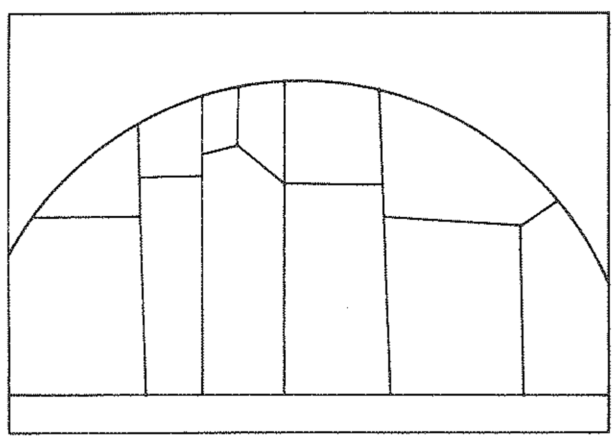
Incensario de bronce.

A lo largo de la Edad Media, desde tiempos románicos, ha sido constante la existencia de todo tipo de diseños con múltiples funciones.

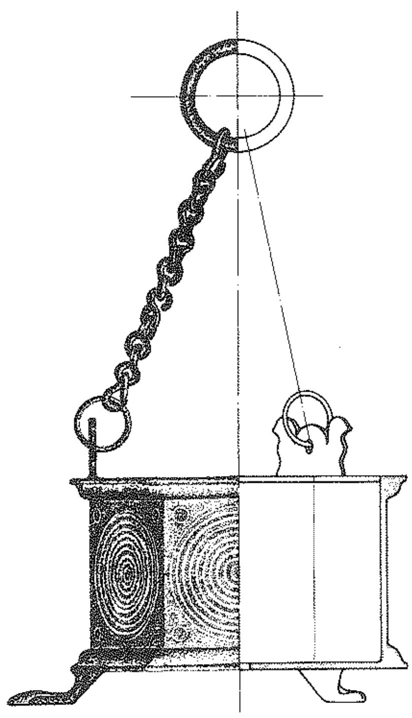
En muchas ocasiones se recurre a pintores para realizar el trabajo de bocetado, diseño, apuntes, etc., para la posterior realización de modelos con motivos ornamentales.

Los talleres de artistas de la época disponían de álbumes de dibujo y modelos que podían utilizar en diversas obras.



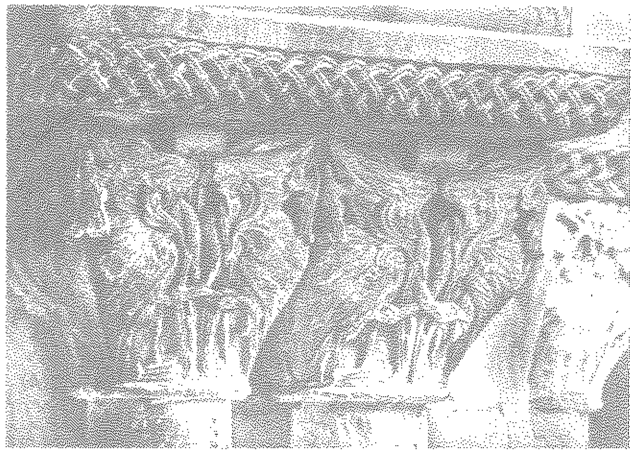


Tímpano de las Tentaciones. Portada de las Platerías.
Catedral de Santiago de Compostela.



Incensario visigodo de bronce.

En la *ornamentación mural románica*, los elementos escultóricos y pictóricos llevan motivos de tipo vegetal o geométrico. La influencia islámica y su labor de filigrana quedan patentes en infinidad de obras.

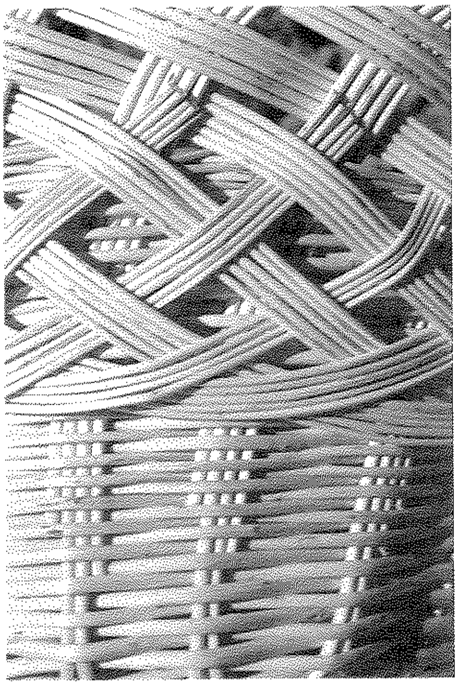


También en la escultura pueden distinguirse modelos ornamentales escogidos de un repertorio a disposición del artista y que utiliza, a veces, valiéndose de plantillas, dibujadas previamente.

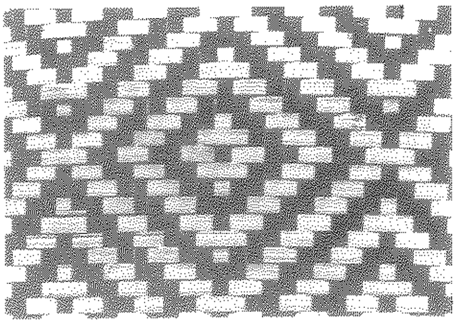
En suma, un trabajo organizado a partir de métodos que permiten la repetición y que nos aproxima a la problemática del diseño.

Ornamentación escultórica de capiteles.

Decoración ornamental pictórica.



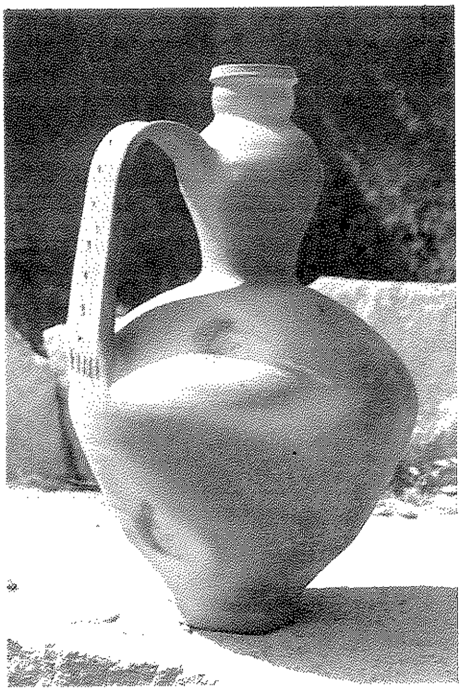
Cestería.

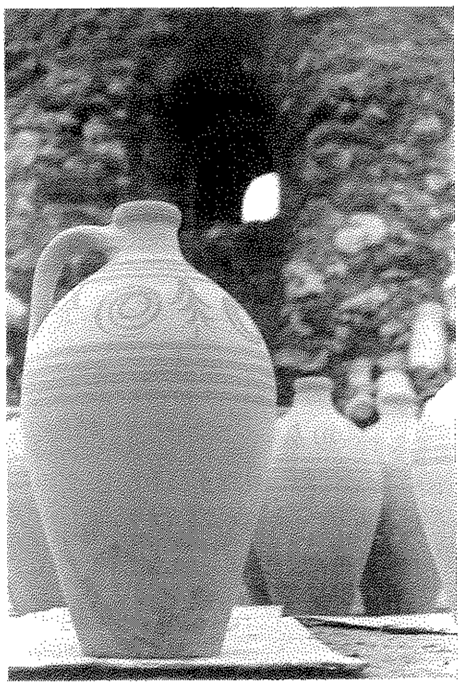


También la *cestería* es una muestra de diseño adaptado a un geometrismo peculiar.

La Península Ibérica, entre el Atlántico y el Mediterráneo, presenta en su suelo una muestra completa de formaciones vegetales. Maderas reducidas a flexibles tiras que se entretejen, paja ensamblada en espiral, caña, esparto, mimbre, etc.; cada material tiene sus cualidades, y de acuerdo con ellas se presta a la manipulación, condicionando técnica y forma, blandura o rigidez, solidez o liviandad, según la predisposición funcional del producto resultante.

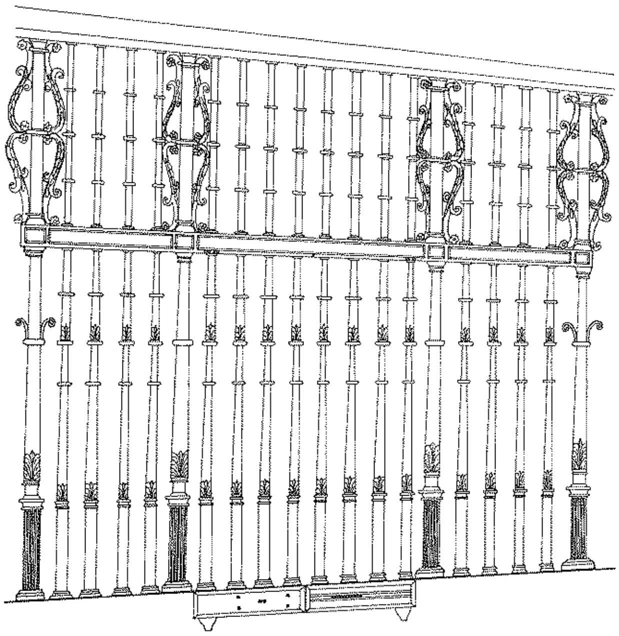
Entrecruzados lineales, movimientos en zigzag, motivos de espiga, escalonamientos de secuencia desplazada, ritmos, rombos, romboides, combinaciones geométricas, componen la arquitectura de esta tradicional artesanía.





La alfarería y la cerámica son también claros ejemplos de soluciones geométricas a problemas de diseño.

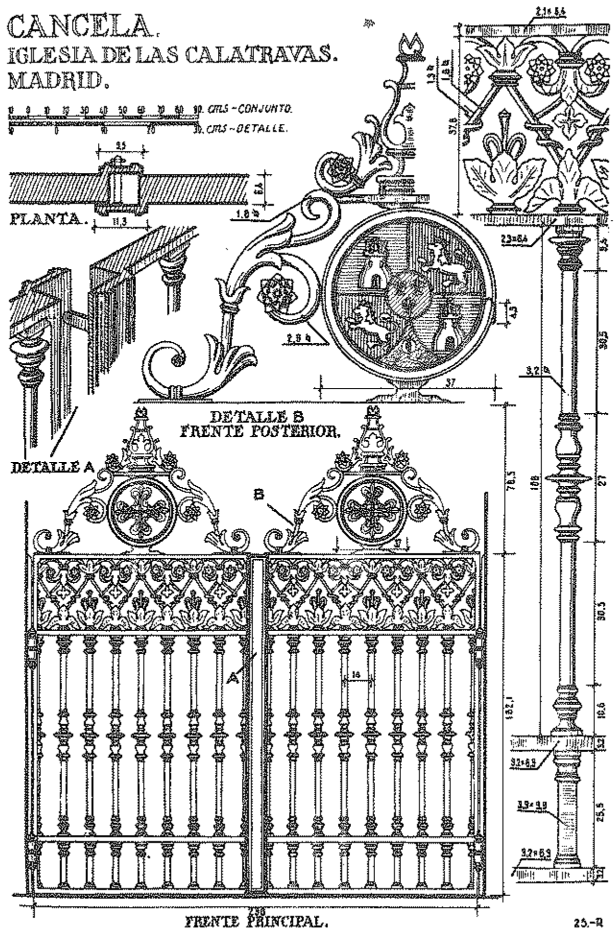
En el siglo XVI, el arte de la forja fue ciñéndose estrechamente a la evolución de su arquitectura barroca.



Diseño de cuerpo de reja propio del último tercio del siglo XVI.

La *rejería* es un ejemplo de diseño, lineal, muy geométrica, formada por elementos cilíndricos, piramidales y esféricos. En el presente siglo, todavía los diseños renacentistas y barrocos siguen ejerciendo su influencia sobre los artistas del metal.

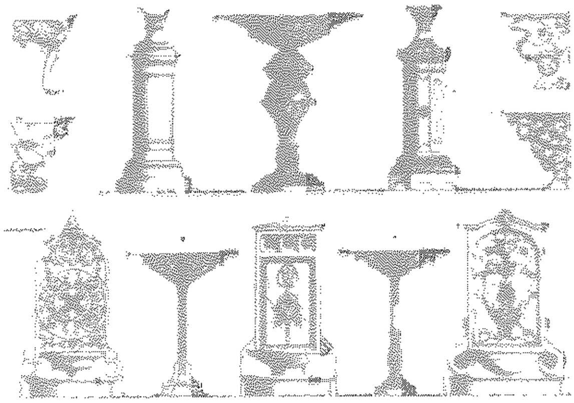
El objeto diseñado y producido industrialmente se va adueñando de la vida cotidiana. Así, la mayoría de las piezas producidas son diseños originales o copias de modelos procedentes de otros países. El trabajo se va clasificando en áreas de producción integradas en una misma empresa; hay operarios dedicados a labores basadas en el trabajo intelectual y el dibujo y tareas más mecánicas, basadas en la práctica del oficio.



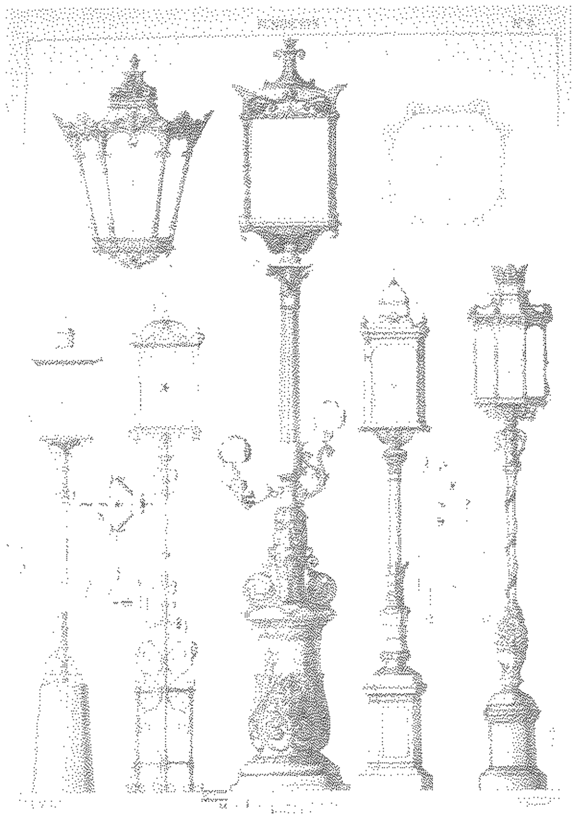
Cancela. Iglesia de las Calatravas (Madrid).

El dibujo en la industria se desarrolla con la aparición de la máquina, "instrumento inventado para facilitar y acelerar la producción". Concurre en el trazado de formas geométricas: rectilíneas y poligonales propias de la arquitectura; cilíndricas, curvas o cónicas propias de la cerámica a torno, carpintería y ebanistería; esféricas, acordes con los productos del vidrio.

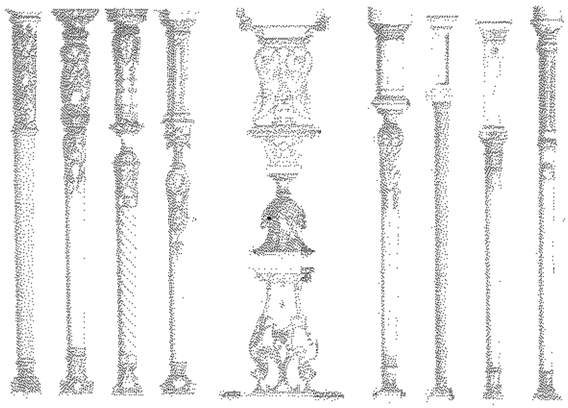
La regularidad de formas semejantes salta a la vista. Estas formas agrupadas se prestan a todas las combinaciones que el gusto pueda idear.



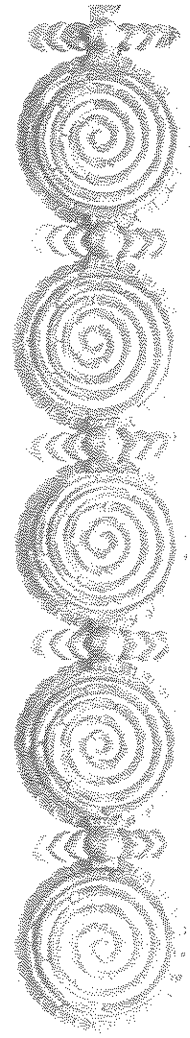
Fundición.



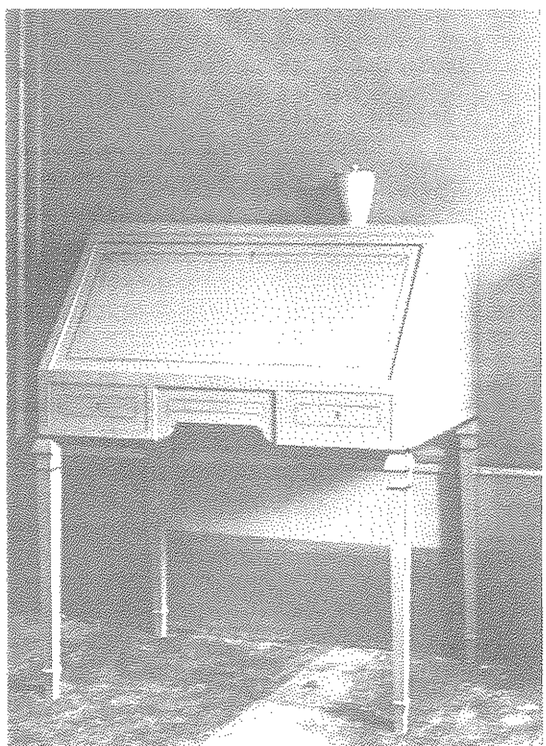
Fundición.



Columnas y balaustres de fundición.



Brazalete.



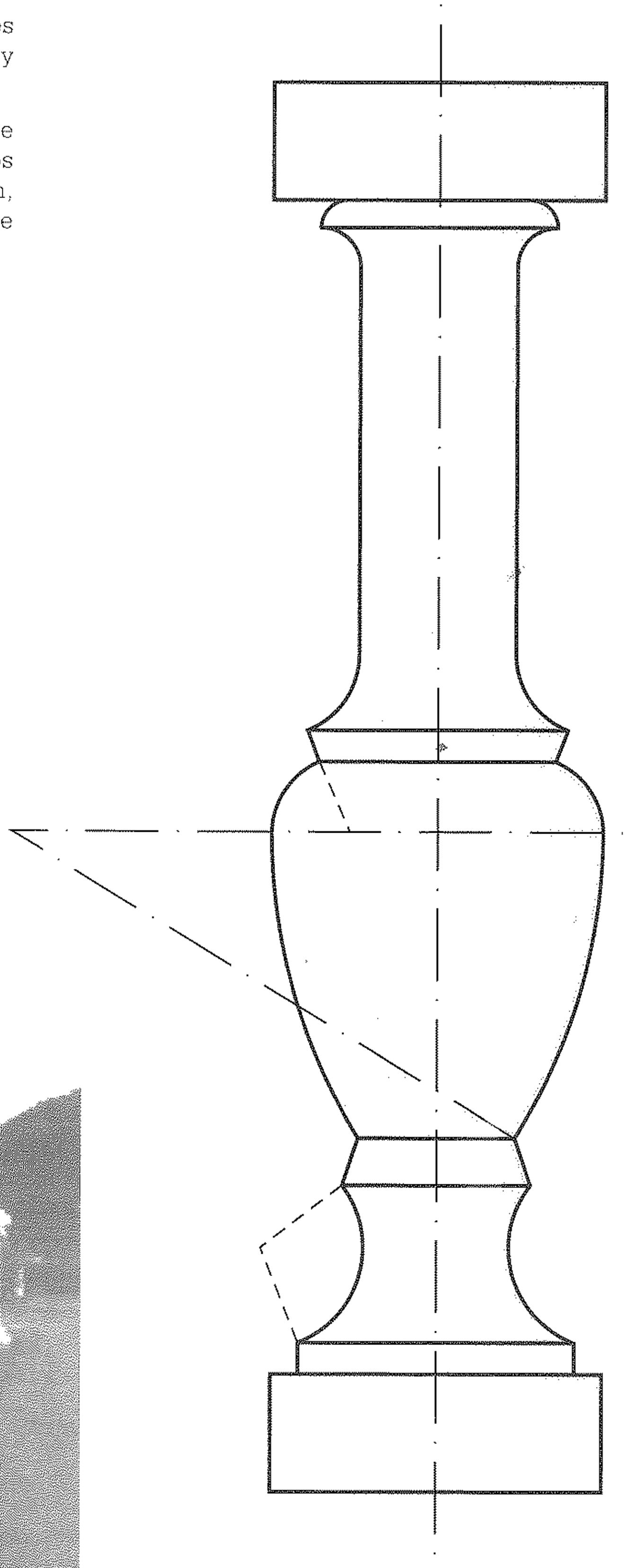
Secreter.

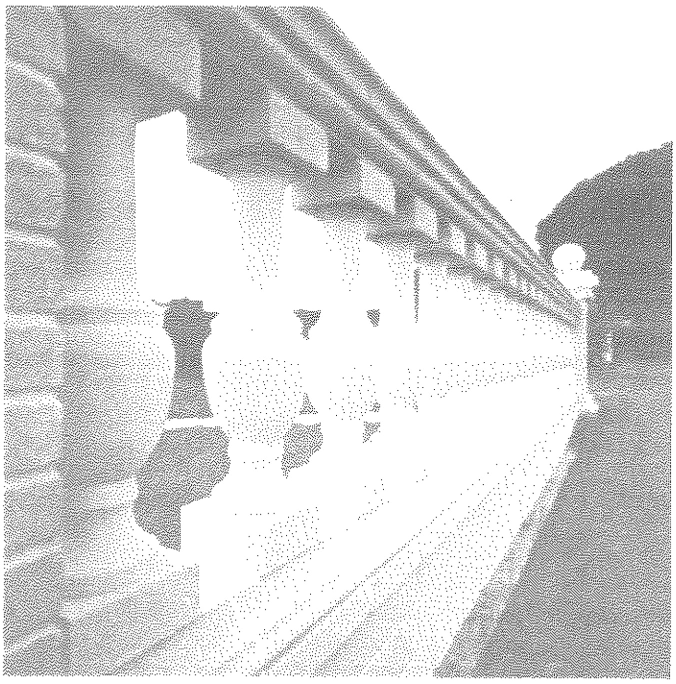
ACTIVIDADES

Análisis de formas

Como actividad complementaria a este tema es interesante comenzar por el estudio, determinación y propiedades de formas bidimensionales.

En el ejercicio resuelto de esta página se parte de una balaustrada clásica y, con los conocimientos adquiridos en temas anteriores sobre medición, simetría, tangencias, escalas, etc., se dibuja y define la geometría a escala de la silueta de un balaustre.





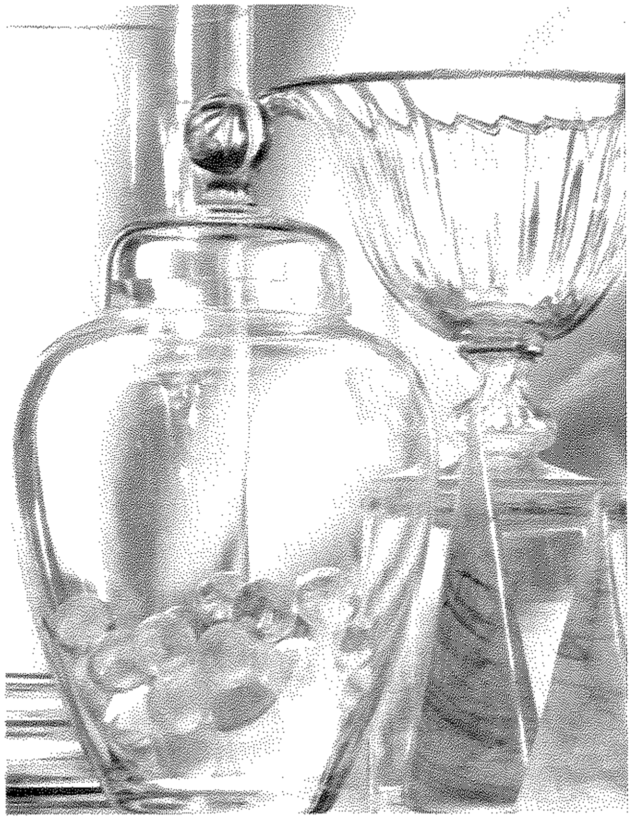
Una balaustrada es el conjunto de columnitas que forman los antepechos de balcones, escaleras, etc.

Análisis de formas

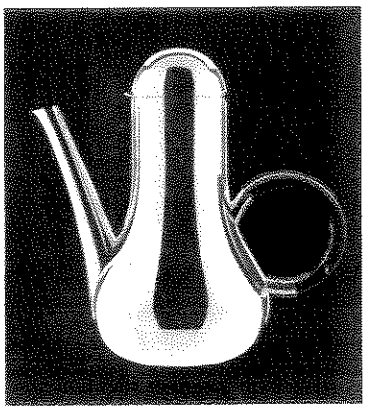
La actividad anterior se puede repetir con innumerables objetos de uso cotidiano, de formas sencillas compuestas por elementos geométricos ya estudiados.

Los ejemplos siguientes son propuestas de análisis elegidas de sectores muy diversos: menaje, mobiliario, electrónica, artículos deportivos, etc.

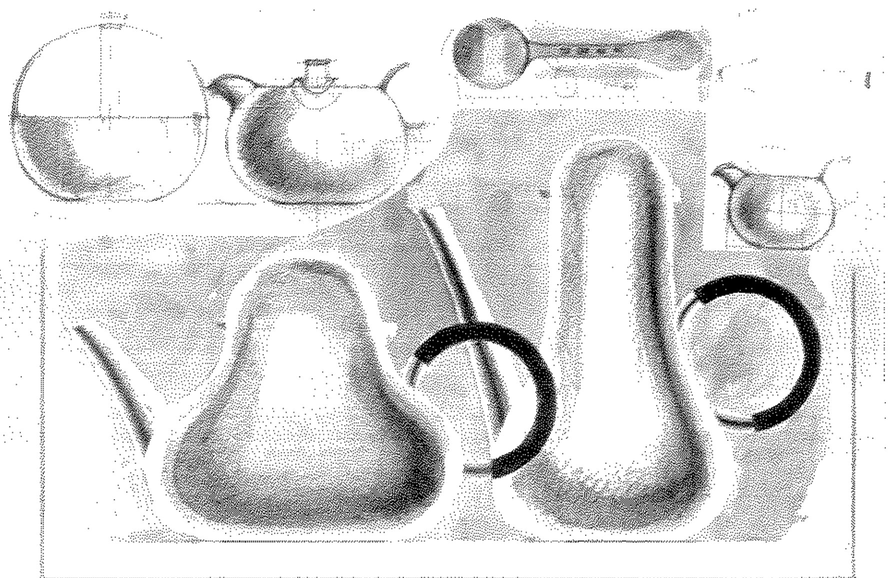
Todos ellos poseen un elevado valor estético pese a su simplicidad formal.



Artesanía. Cristal mallorquín.



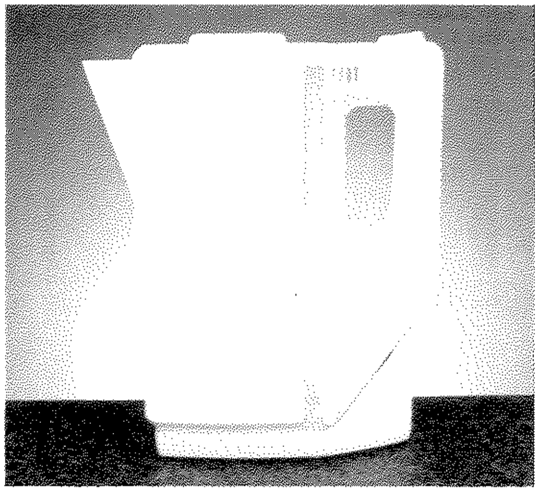
Jarra de acero.

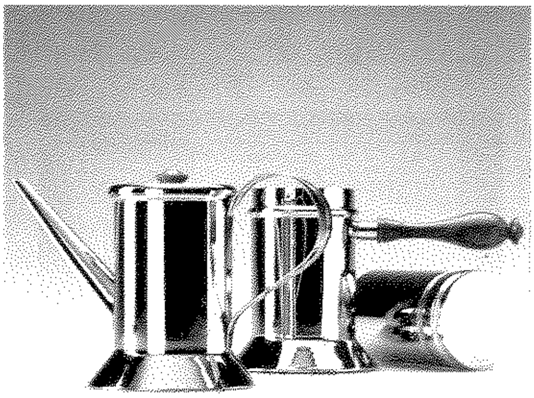


Proceso de diseño

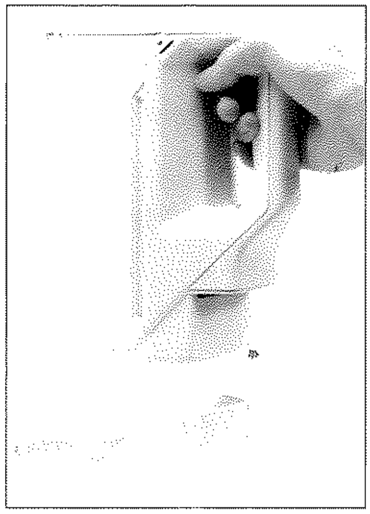
Dibujo de definición de una familia de productos. Fase previa a la realización de los planos a escala.

Frascos.

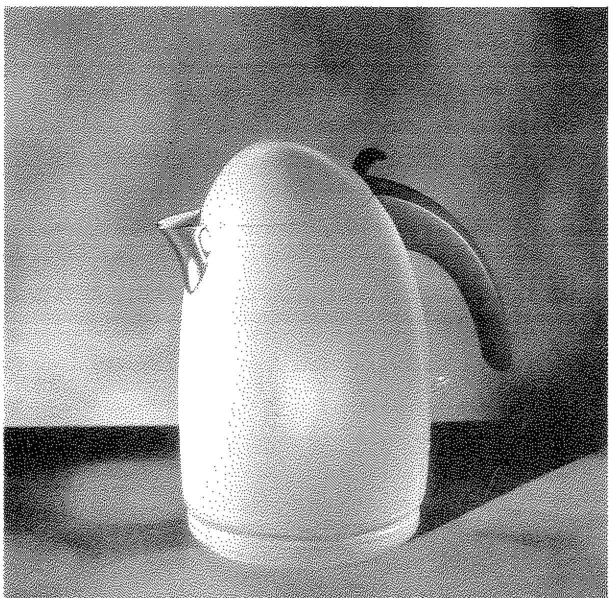




Juego de café.



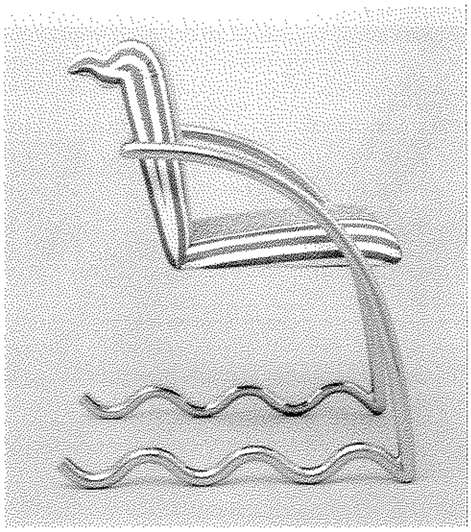
Jarra de plástico.



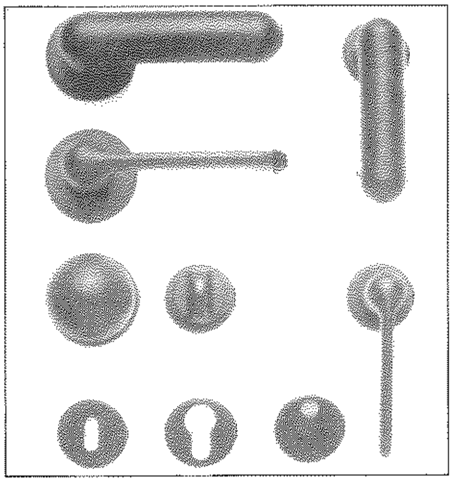
Jarra hervidora.

Termos.

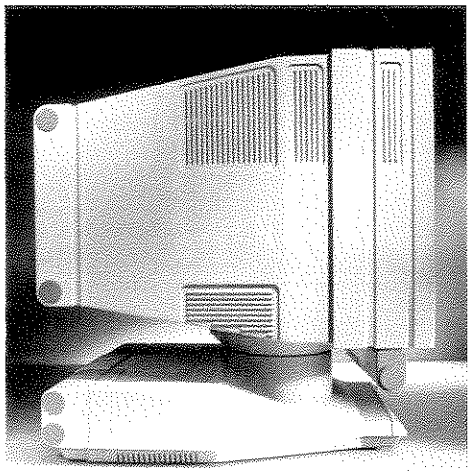
Silla.



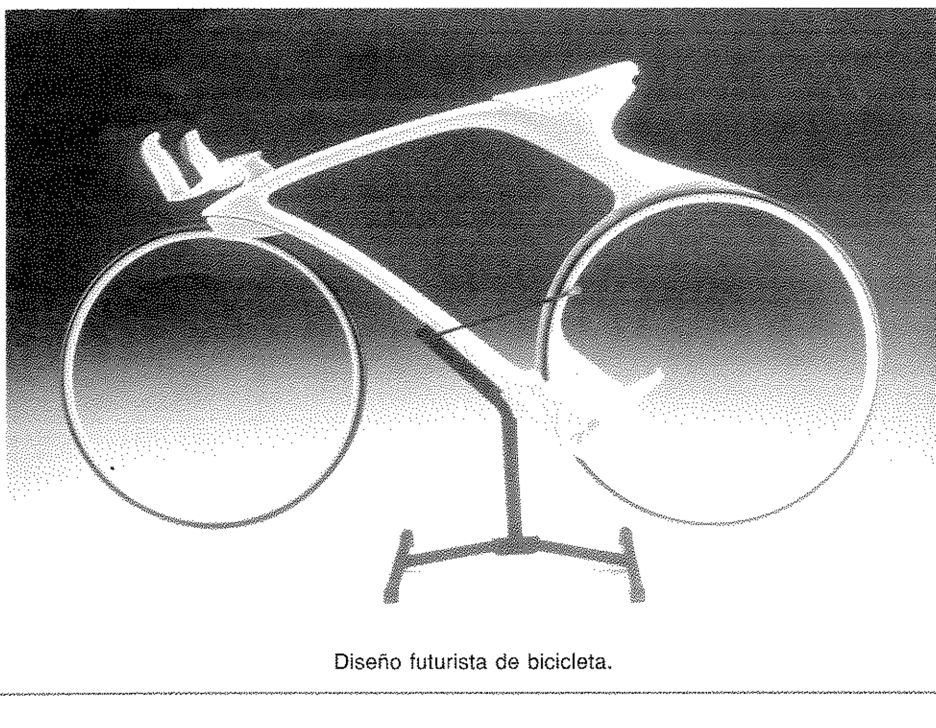
Silla.



Familia de herraje para puertas.



Vista lateral de pantalla de ordenador.



Diseño futurista de bicicleta.

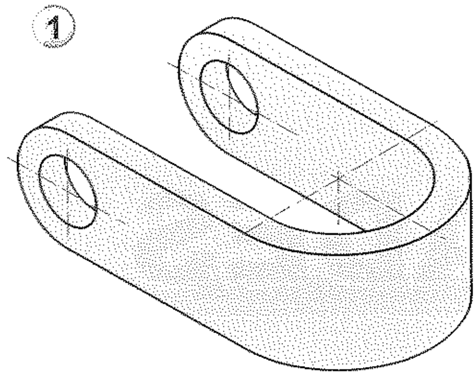
ACTIVIDADES

ACTIVIDADES

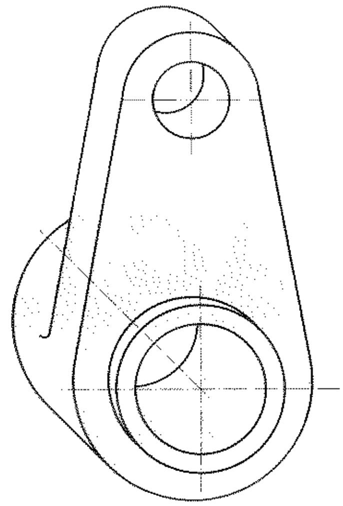
Ejercicios de croquización

A partir de una perspectiva sin acotar, obtener las vistas necesarias para que la pieza quede definida. Por el momento no se acotan las vistas.

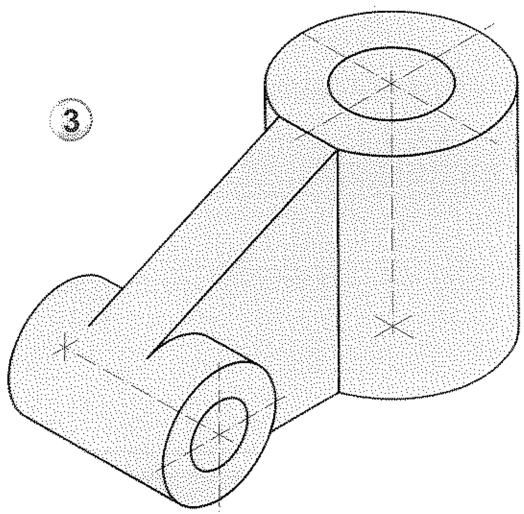
1



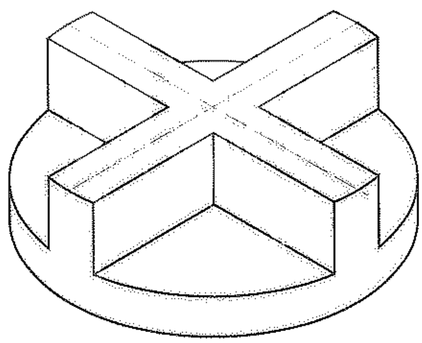
2



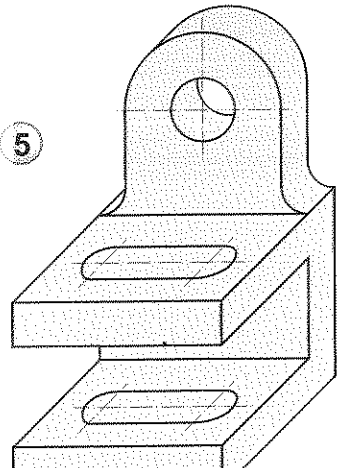
3



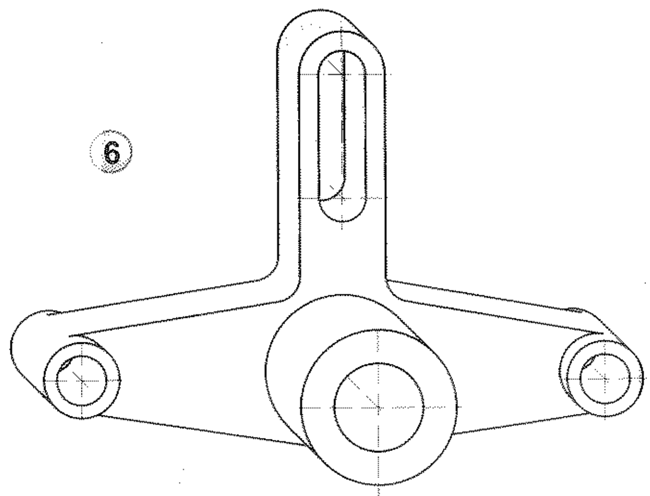
4



5



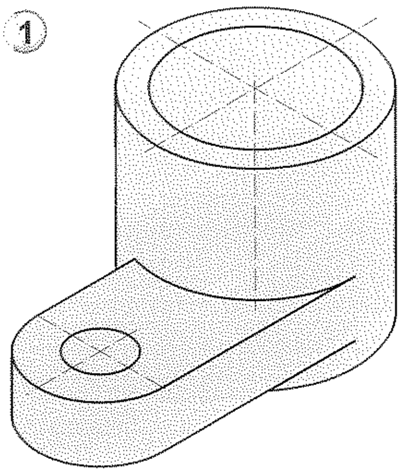
6



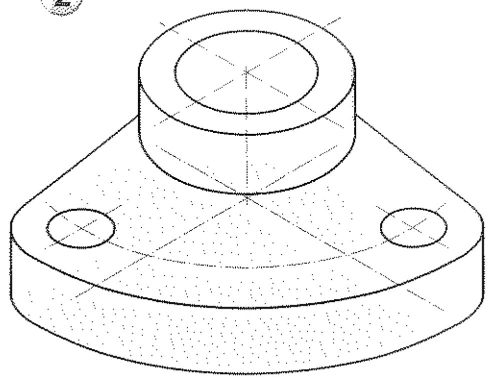
Ejercicios de croquización

A partir de una perspectiva sin acotar, obtener las vistas necesarias para que la pieza quede definida. Por el momento no se acotan las vistas.

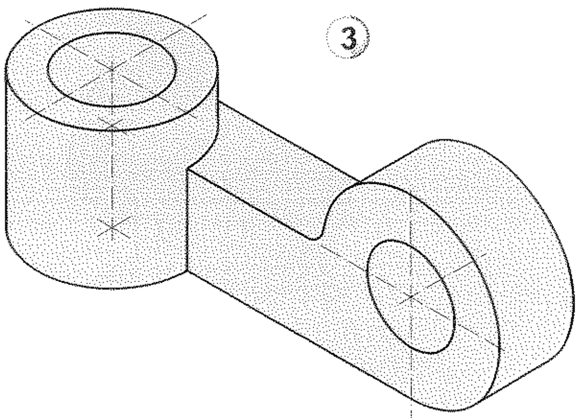
1



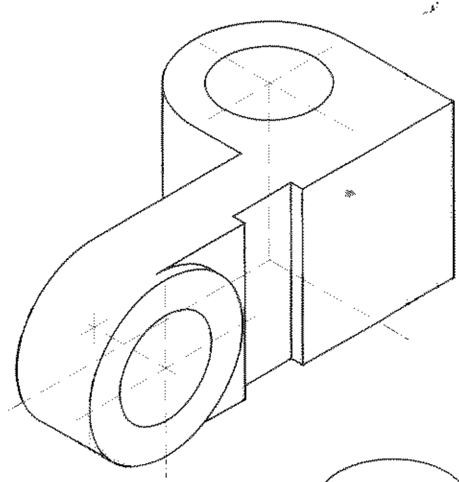
2



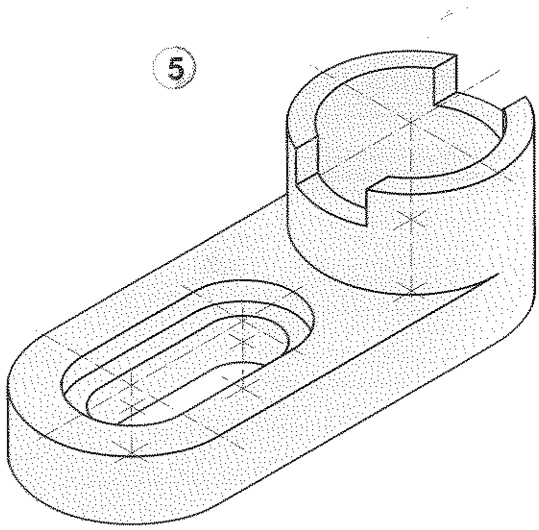
3



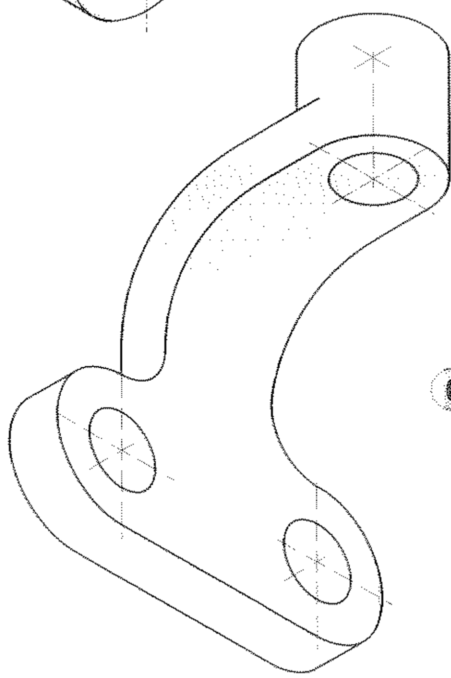
4



5

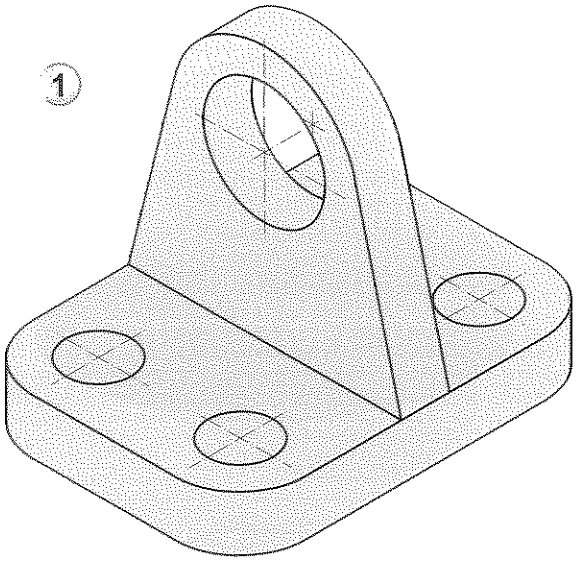


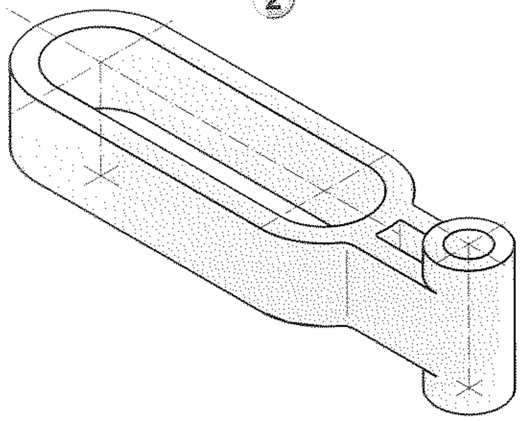
6

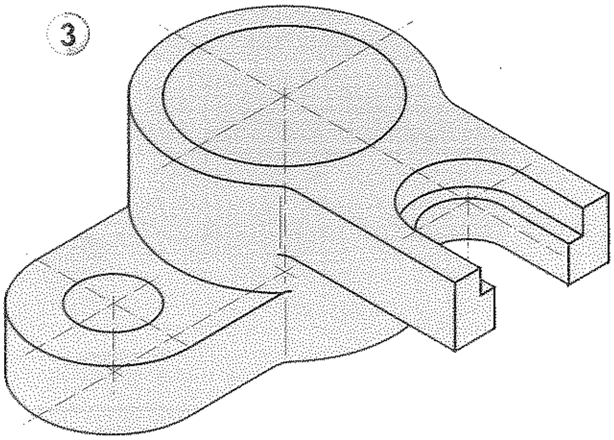


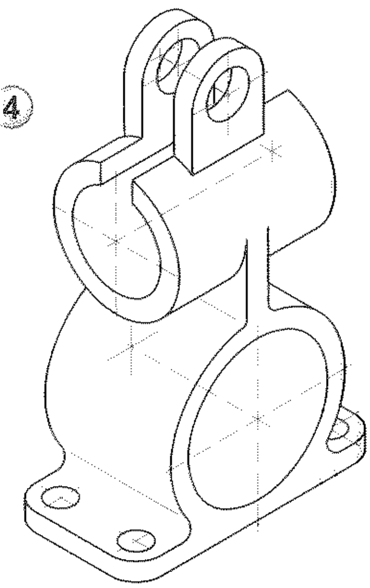
Ejercicios de croquización

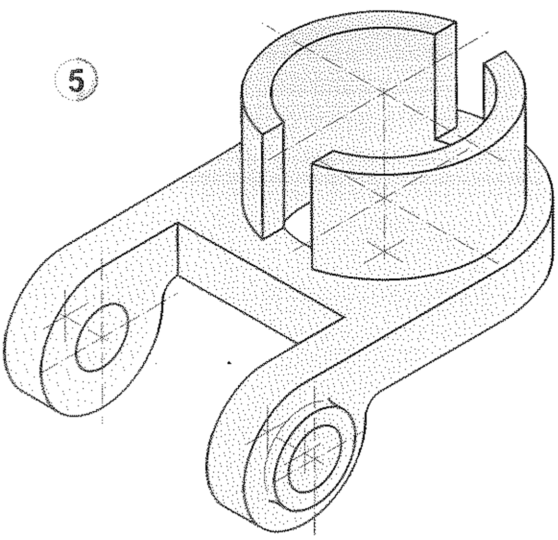
A partir de una perspectiva sin acotar, obtener las vistas necesarias para que la pieza quede definida. Por el momento no se acotan las vistas.

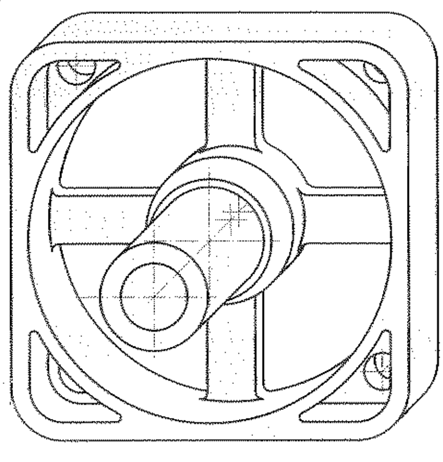
1


2


3


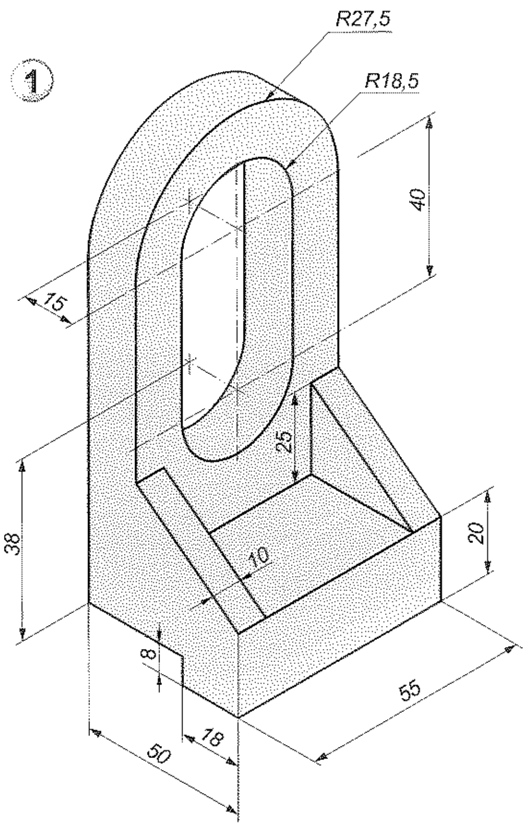
4


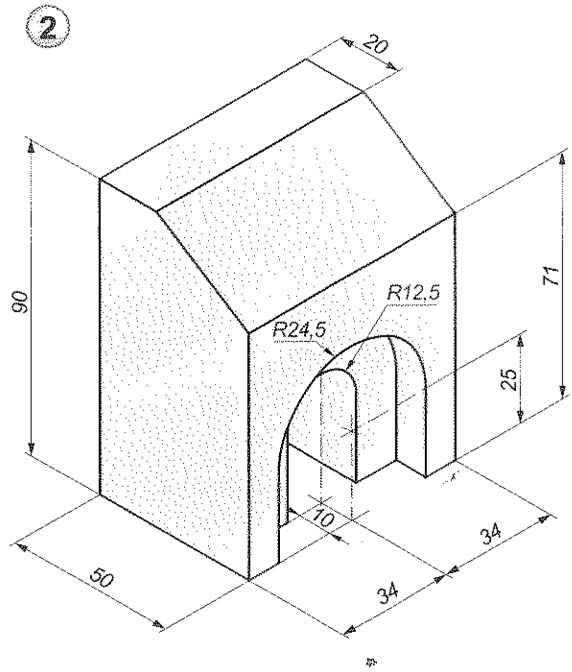
5


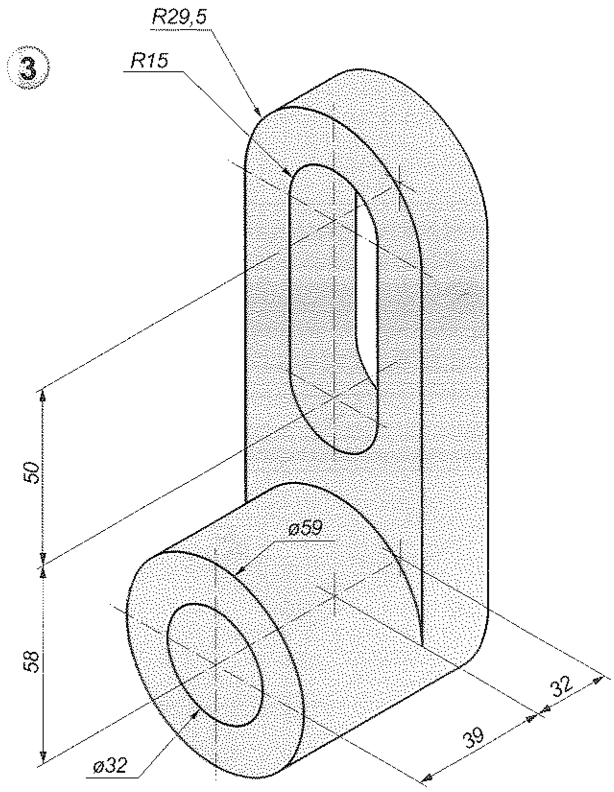
6


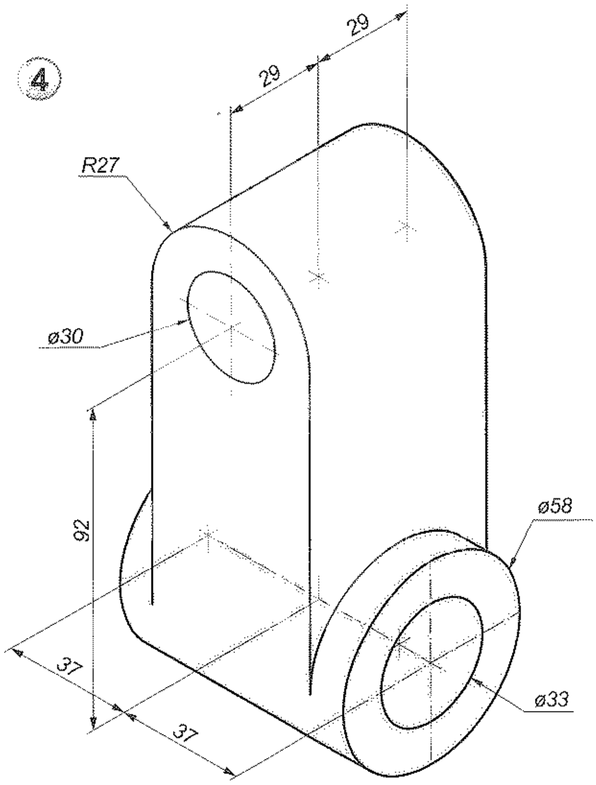
Ejercicios de croquización y acotación

A partir de una perspectiva acotada, hacer el plano completo o dibujo de taller, acotando las vistas.





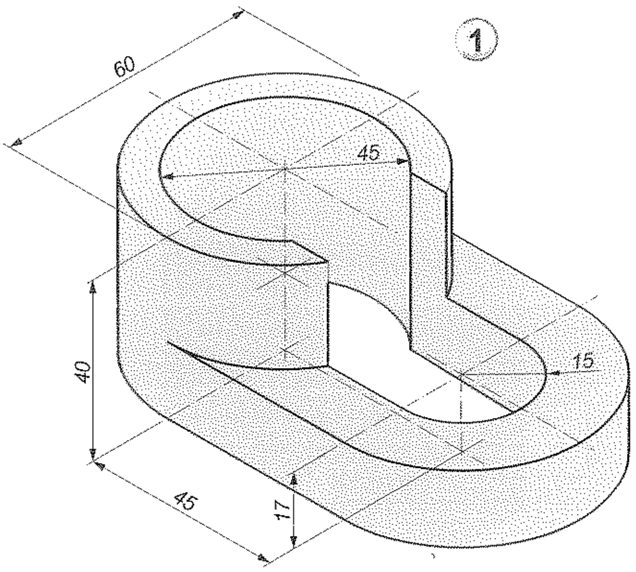




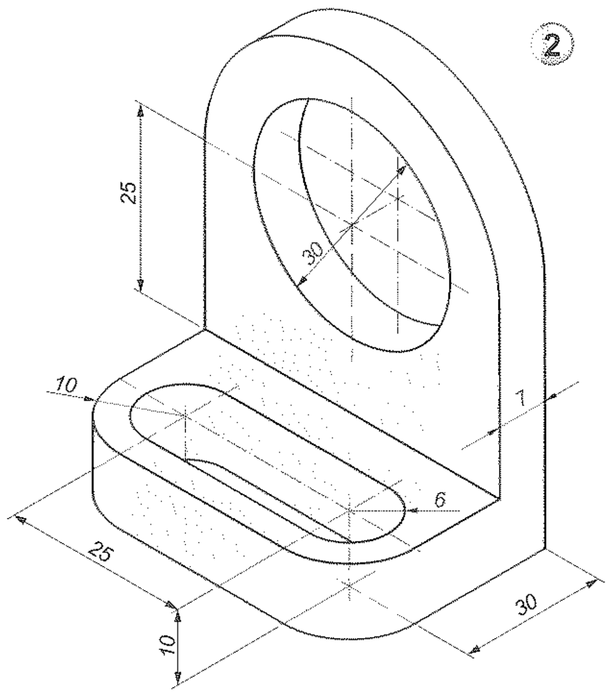
Ejercicios de croquización y acotación

A partir de una perspectiva acotada, hacer el plano completo o dibujo de taller, acotando las vistas.

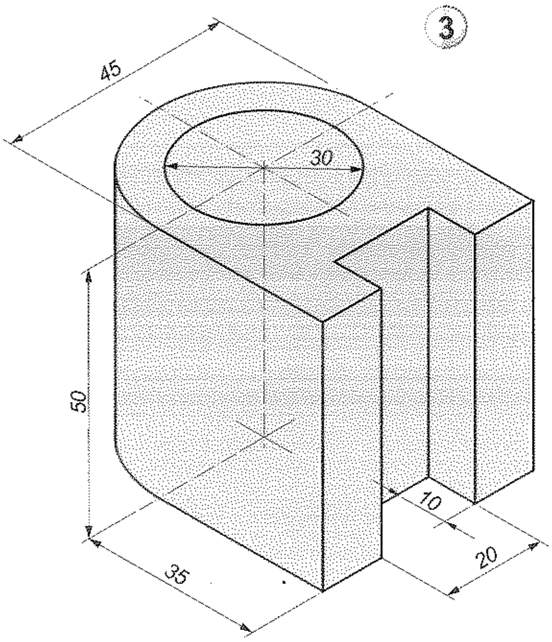
1



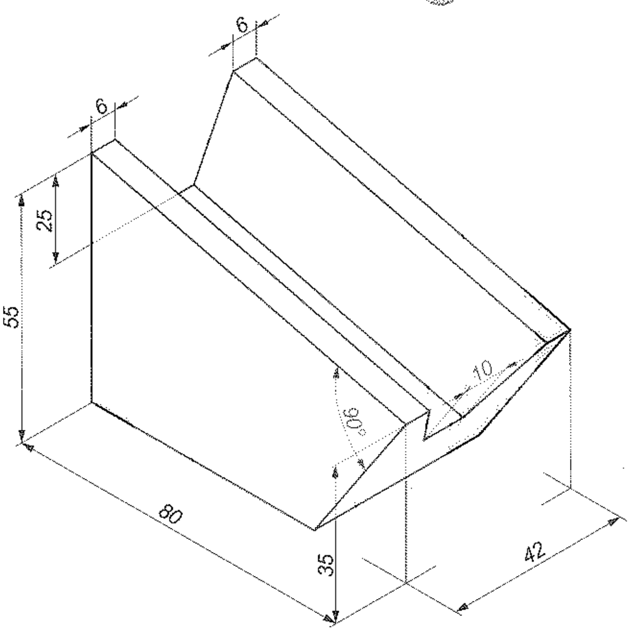
2



3



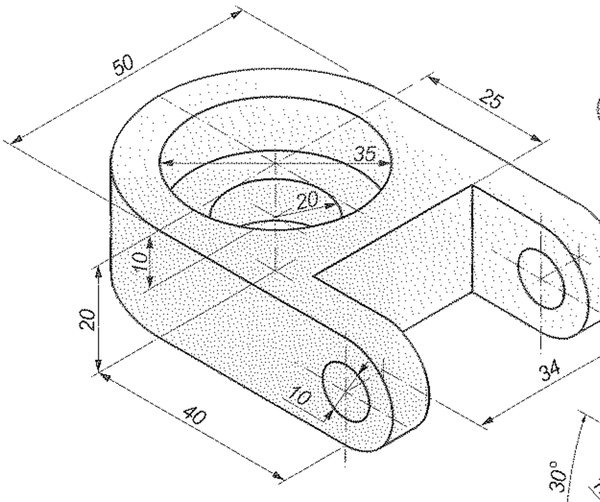
4



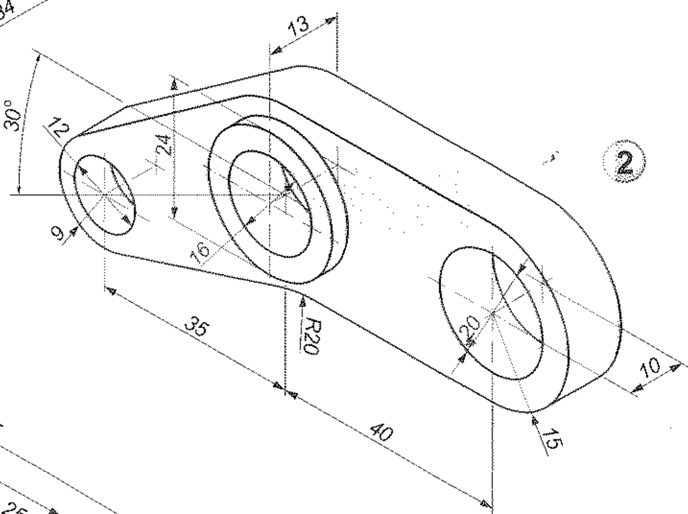
Ejercicios de croquización y acotación

A partir de una perspectiva acotada, hacer el plano completo o dibujo de taller, acotando las vistas.

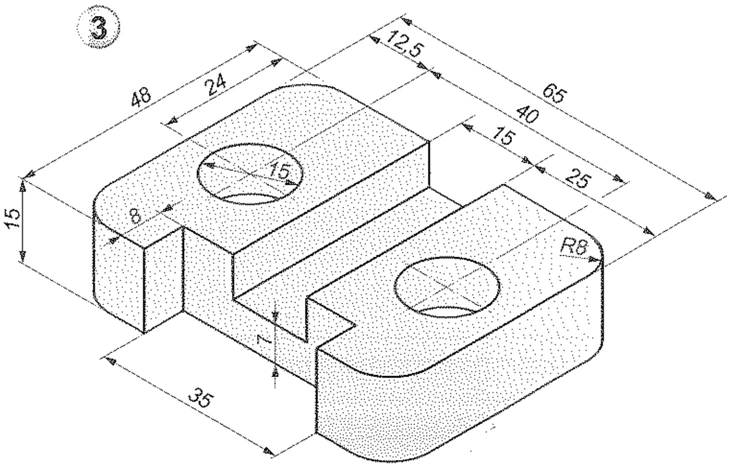
1



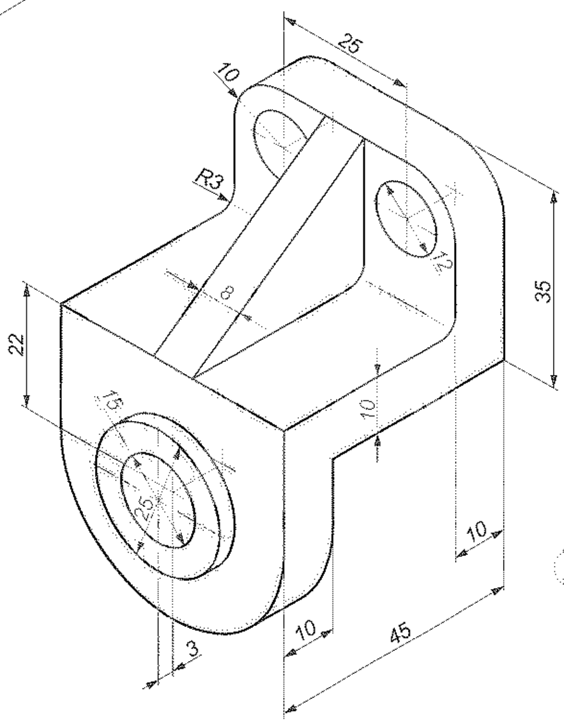
2



3

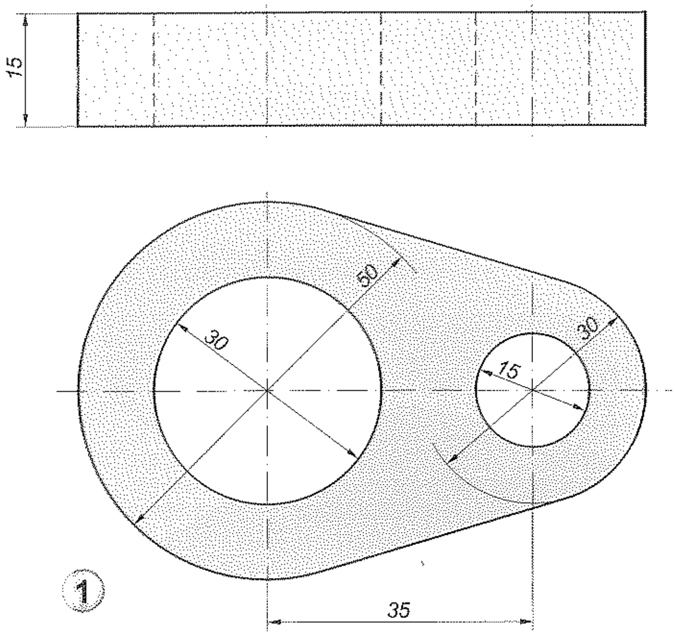


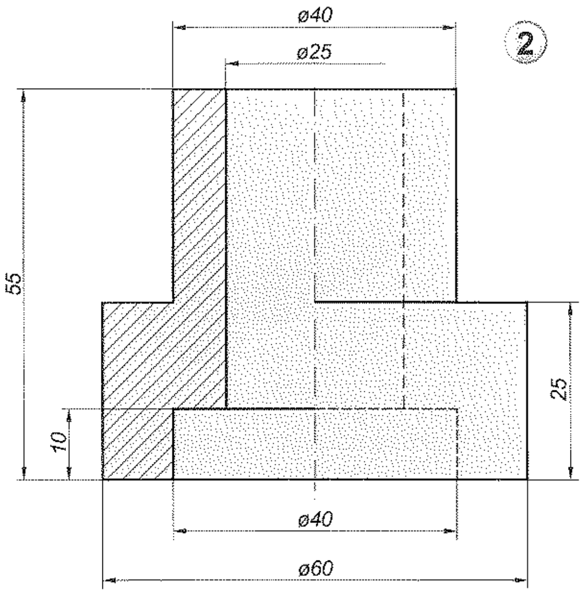
4

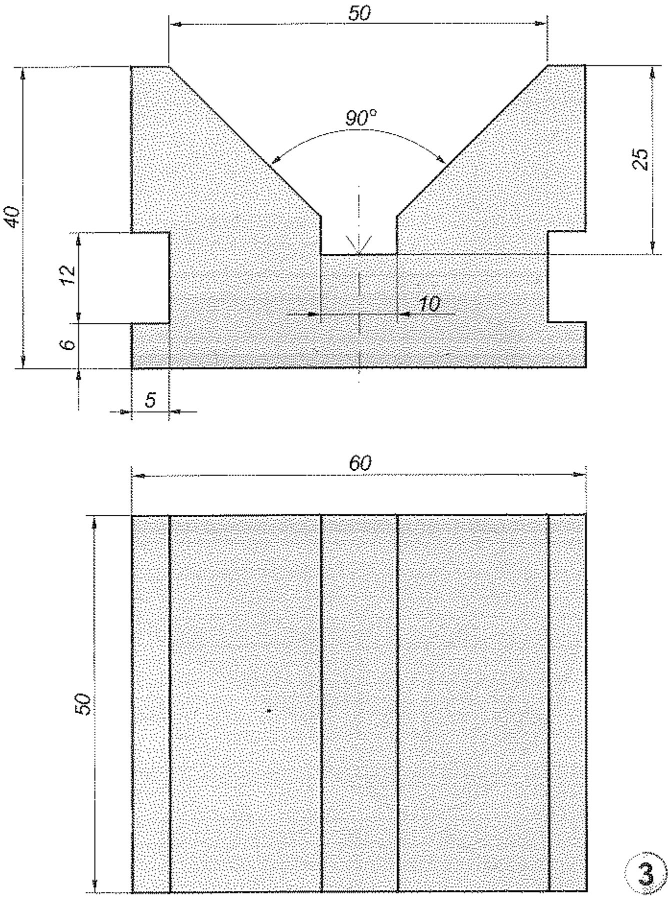


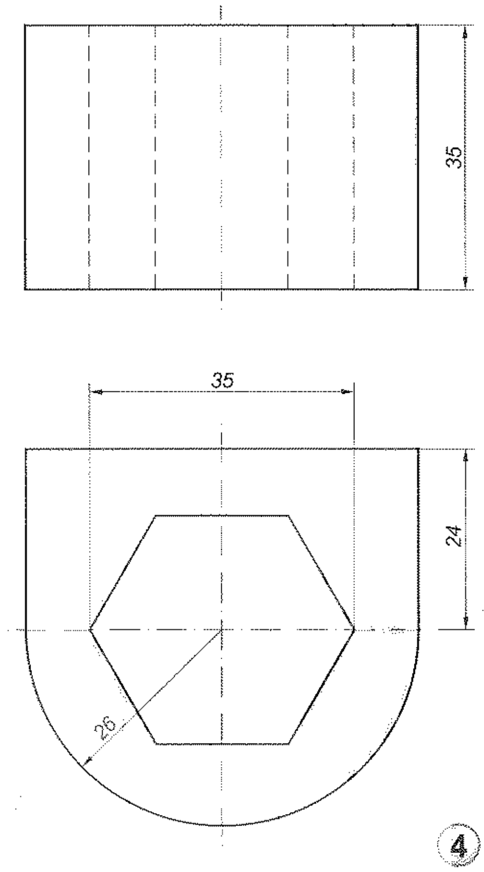
Ejercicios de visualización

A partir de las vistas diédricas de las piezas propuestas, dibujar a mano alzada o a escala una perspectiva axonométrica o caballera de las mismas.



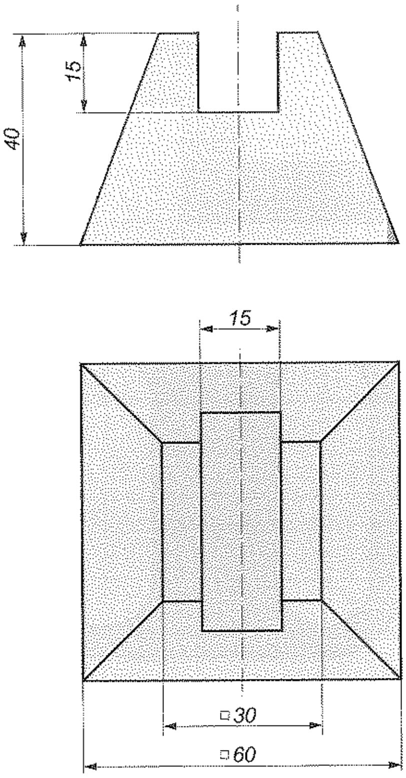




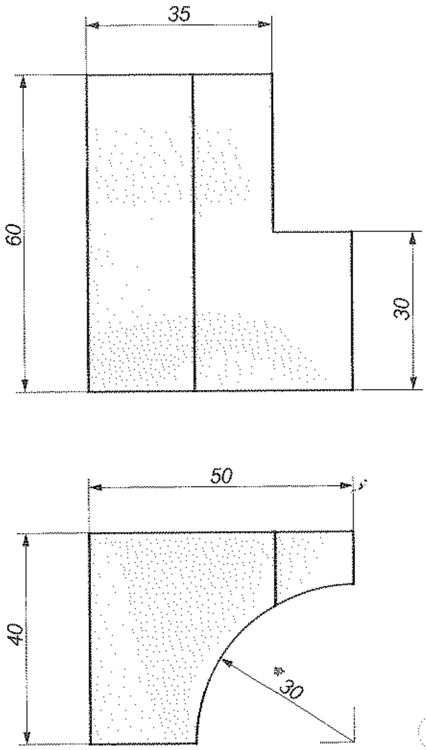


Ejercicios de visualización

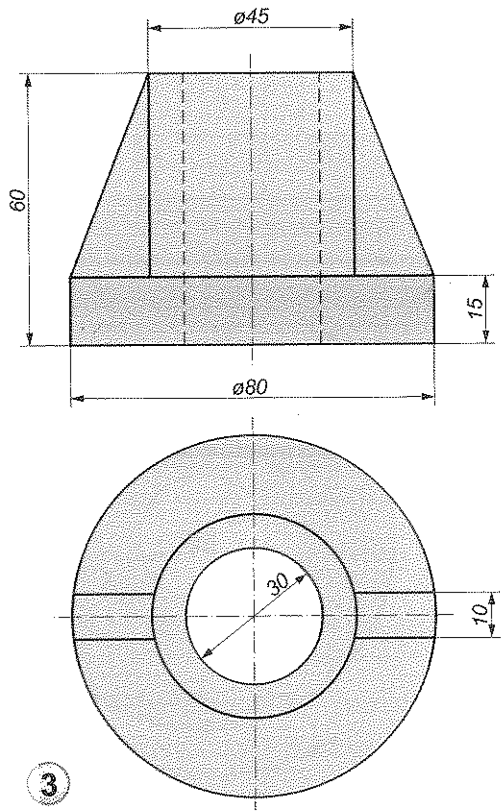
A partir de las vistas diédricas de las piezas propuestas, dibujar a mano alzada o a escala una perspectiva axonométrica o caballera de las mismas.



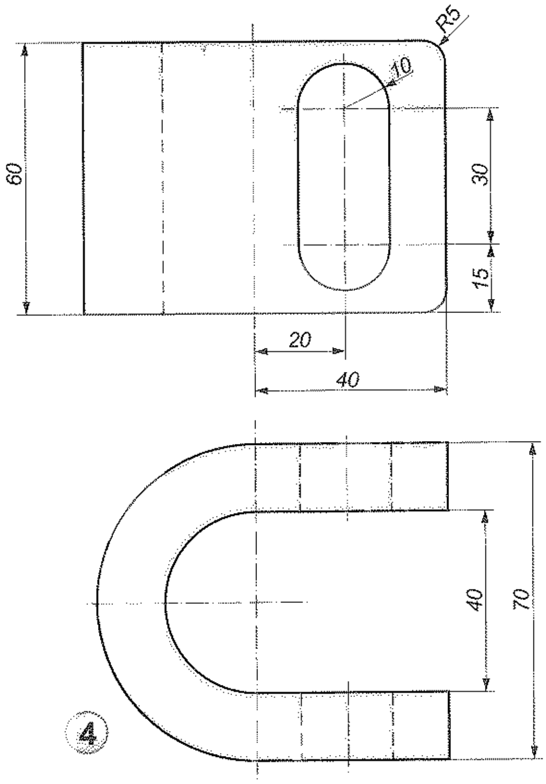
1



2



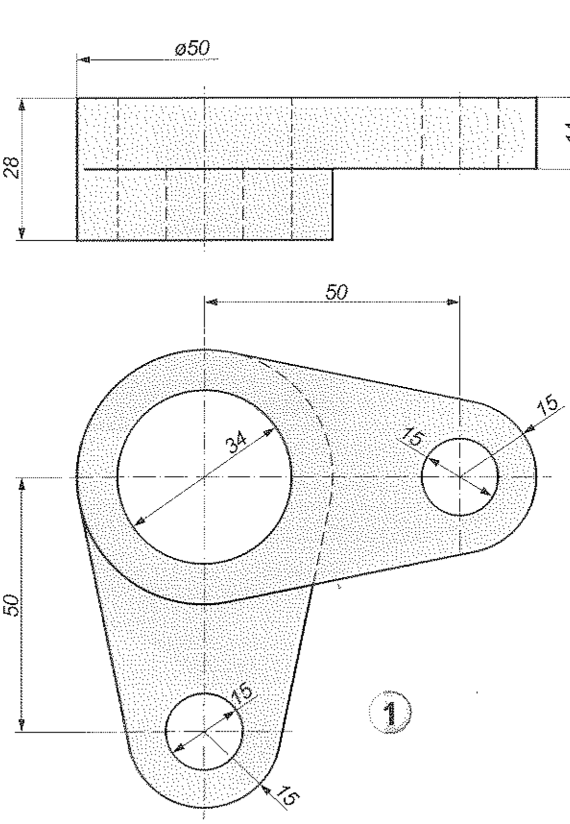
3



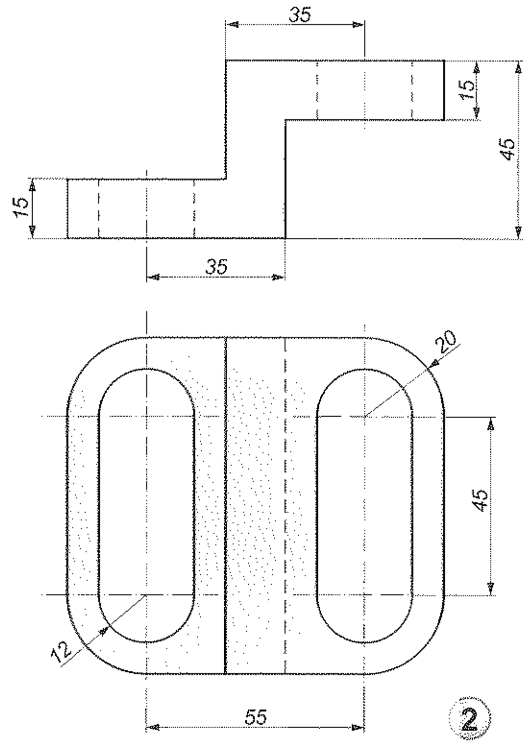
4

Ejercicios de visualización

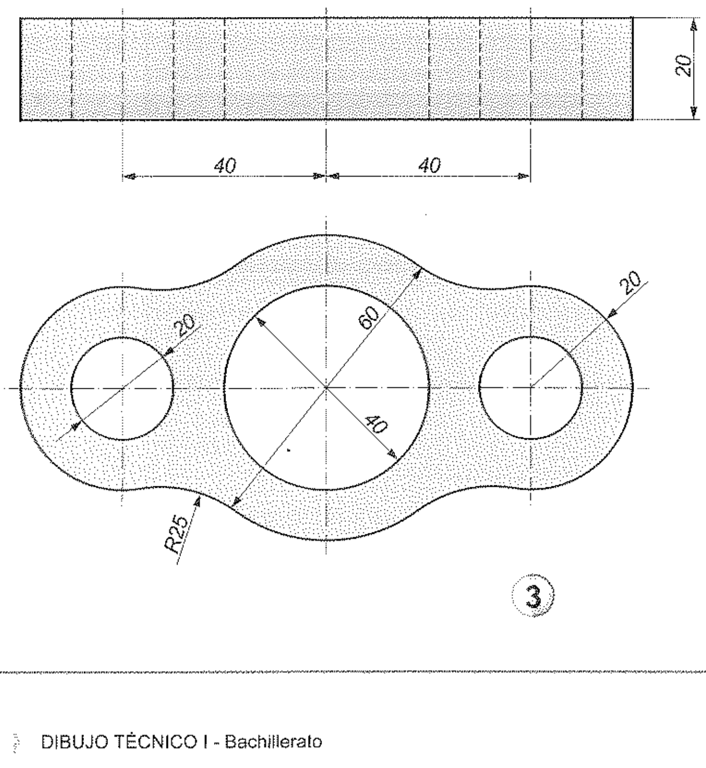
A partir de las vistas diédricas de las piezas propuestas, dibujar a mano alzada o a escala una perspectiva axonométrica o caballera de las mismas.



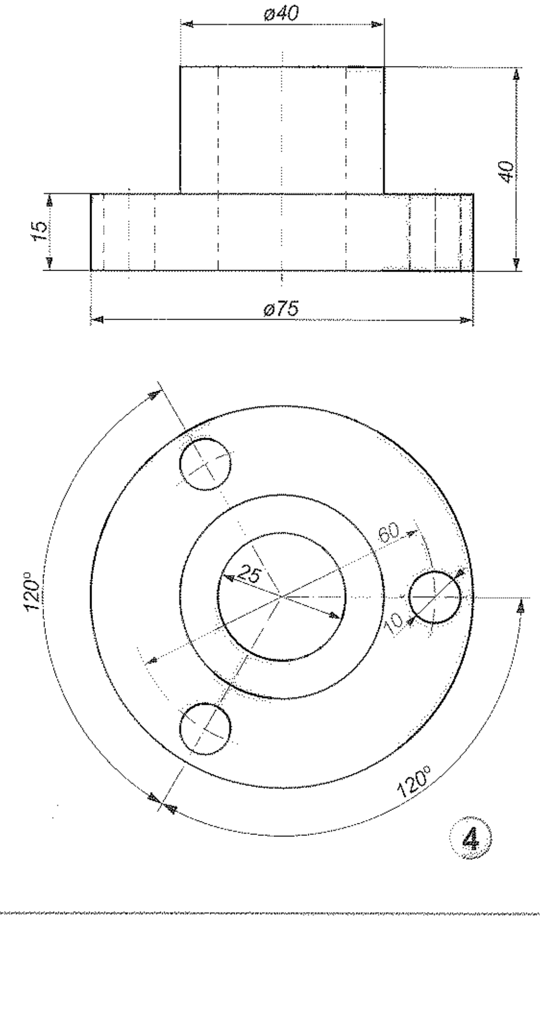
1



2



3



4

NOTAS